2021 中科大创新班数学试题解析

一、填空题

1. 设 $a\in\mathrm{R}$，关于 x 的方程 $x^4-(4a-50)x^2+a^2=0$ 有四个实数解且成等差数列，则 $a=$________.

解析：设四个实数解为 $-x_2$，$-x_1$，x_1，x_2，且 $x_1^2<x_2^2$，

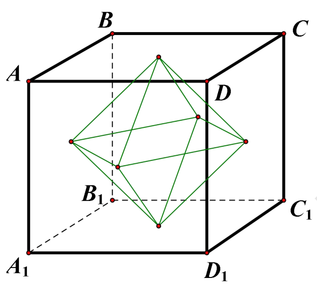
则有 $x_2-x_1=2x_1$，$x_1^2+x_2^2=4a-50$，$x_1^2x_2^2=a^2$，

可知 $a>\dfrac{25}{2}$，有 $10x_1^2=4a-50$，$9x_1^4=a^2$，可得 $\dfrac{10a}{3}=4a-50$，

所以 $a=75$.

2. 棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，ACB_1D_1 与 BDA_1C_1 公共部分的体积为________.

解析：易知公共部分为正方体六个面中心所围成的几何体，如下图所示：



可知 $V=\dfrac{1}{3}\times1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$.

3. 若直线 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$（$a>0$，$b>0$）与曲线 $y=\dfrac{4}{\sqrt{x}}$ 相切，则 $a+b$ 的最小值为________.

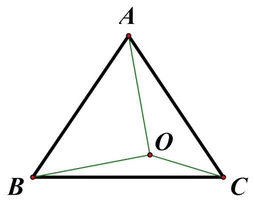
解析：当相切时，有 $\begin{cases}\dfrac{b}{a}=\dfrac{2}{x\sqrt{x}}\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{4}{b\sqrt{x}}=1\end{cases}$，可得 $ab^2=108$，

所以 $a+b=a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{b}{2}\geqslant3\sqrt[3]{\dfrac{ab^2}{4}}\geqslant9$，当且仅当 $a=3$，$b=6$ 取等号.

4. 若 $x^2+y^2=x^2+z^2+\sqrt{3}xz=z^2+y^2+yz=16$，则 $2xy+xz+\sqrt{3}yz=$________.

解析：x，y，z 应该是正数，构造如下边长为 4 的等边 $\triangle ABC$，满足 $OA=y$，$OB=x$，

$OC=z$，$\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle AOC=\dfrac{2\pi}{3}$，$\angle BOC=\dfrac{5\pi}{6}$，



则可知 $2xy+xz+\sqrt{3}yz=4(S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOC})=4S_{\triangle ABC}=16\sqrt{3}$.

5. 一小球在 0，1，2，…，n 这 $n+1$ 个位置移动，小球向前向后移动一个单位的概率都为 $\dfrac{1}{2}$. 若在 0 处，则小球只能向前移动，若初始位置在 0 处，则首次移动到 n 的步数的期望为________.

解析：设首次从 k 到 n 的步数期望为 a_k，则有 $a_k=\dfrac{1}{2}(a_{k+1}+1)+\dfrac{1}{2}(a_{k-1}+1)$，

所以 $a_k-a_{k+1}=a_{k-1}-a_k+2$，可得 $a_k-a_{k+1}=2k+a_0-a_1$，

又小球在 0 处，只能向前移动到 1，则有 $a_0-a_1=1$，

所以 $a_0-a_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)=n^2$，又有 $a_n=0$，则 $a_0=n^2$.

二、在 ΔABC 中，证明：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\cos B+\sqrt{3}\cos C\le 2$.

证法一：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\cos B+\sqrt{3}\cos C$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\sin A\sin C+\left(\sqrt{3}-\cos A\right)\cos C$$

$$\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\sqrt{\sin^2 A+\left(\sqrt{3}-\cos A\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\sqrt{4-2\sqrt{3}\cos A}$$

$=2-\left(1-\dfrac{t}{2}\right)^2\leqslant 2$，其中 $t=\sqrt{4-2\sqrt{3}\cos A}\in\left(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+1\right)$；

证法二：由嵌入不等式有$x^2+y^2+z^2\geqslant 2yz\cos A+2xz\cos B+2yx\cos C$，

令$yz=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，$xz=\dfrac{1}{2}$，$yx=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则有$x^2=1$，$y^2=\dfrac{3}{4}$，$z^2=\dfrac{1}{4}$，

所以$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\cos B+\sqrt{3}\cos C\leqslant 2$.

三、对$\forall x,y\in \mathrm{R}$，有$f(x+y)=f(x)\cos y+f(y)f(\dfrac{\pi}{2}-x)$，求$f(x)$解析式.

解析：取$x=\dfrac{\pi}{2}$，$y=0$，有$f(0)=0$，

取$x=0$，则有$\left[1-f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right]f(y)=0$，

（Ⅰ）若$f(y)=0$，对任意$y\in\mathbb{R}$均成立，可得$f(x)=0$，符合；

（Ⅱ）若$f(y)$不恒为0，有$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$，

取$x=\dfrac{\pi}{2}$，有$f\left(y+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos y$，对任意$y\in\mathbb{R}$均成立，可得$f(x)=\sin x$；

综上可知$f(x)=0$或$f(x)=\sin x$.

四、已知$g_0(x)=1$，$g_1(x)=x$，$g_n(x)=\dfrac{[g_{n-1}(x)]^2-2^{n-1}}{g_{n-2}(x)}$，证明$g_n(x)$为$n$次整系数多项式，并求$g_n(x)=0$的所有根.

解析：由$2^{n-1}=[g_{n-1}(x)]^2-g_n(x)g_{n-2}(x)$，

可得$\dfrac{[g_n(x)]^2-g_{n+1}(x)g_{n-1}(x)}{[g_{n-1}(x)]^2-g_n(x)g_{n-2}(x)}=2$，

整理得$\dfrac{g_{n+1}(x)+2g_{n-1}(x)}{g_n(x)}=\dfrac{g_n(x)+2g_{n-2}(x)}{g_{n-1}(x)}$，

则有$\dfrac{g_n(x)+2g_{n-2}(x)}{g_{n-1}(x)}=\dfrac{g_2(x)+2g_0(x)}{g_1(x)}=x$，

所以$g_n(x)=xg_{n-1}(x)-2g_{n-2}(x)$，

又$g_0(x)$，$g_1(x)$符合$g_n(x)$为n次整系数多项式，则由数学归纳法，可知$g_n(x)$为n次整系数多项式，

记$f_n(x)=\dfrac{g_n(x)}{2^{\frac{n}{2}}}$，有$f_0(x)=1$，$f_1(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$，

所以有$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2}}\cdot f_{n-1}(x)-f_{n-2}(x)$（第二类切比雪夫多项式），

取$x=2\sqrt{2}\cos\theta$，有$f_0\left(2\sqrt{2}\cos\theta\right)=1=\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta}$，

$f_1\left(2\sqrt{2}\cos\theta\right)=2\cos\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}$，

由数学归纳法可知，$f_n\left(2\sqrt{2}\cos\theta\right)=\dfrac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta}$，

由$\sin(n+1)\theta=0$，有$(n+1)\theta=k\pi$，

所以$\theta=\dfrac{\pi}{n+1}$，$\dfrac{2\pi}{n+1}$，…，$\dfrac{n\pi}{n+1}$均为$\sin(n+1)\theta=0$的解且互不相同，

又$f_n(x)$为n次多项式，$f_n(x)=0$至多n个根，

故可知$f_n(x)=0$的n个根为$x=2\sqrt{2}\cos\dfrac{k\pi}{n+1}$（$k=1$，$2$，…，$n$），

所以$g_n(x)=0$的所有根为$x=2\sqrt{2}\cos\dfrac{k\pi}{n+1}$（$k=1$，$2$，…，$n$）.

五、证明a为无理数当且仅当$\forall m\in\mathrm{N}^*$，$\exists n\in\mathrm{Z}$，使$0<\{na\}<\dfrac{1}{m}$.

证明：必要性，假设a为有理数，设$a=\dfrac{p}{q}$，$p\in\mathrm{Z}$，$q\in\mathrm{N}^*$，$(p,q)=1$，

记$np=sq+r$，$s\in\mathrm{Z}$，$r=0$，1，…，$q-1$，

则有$\{na\}=\left\{s+\dfrac{r}{q}\right\}=\dfrac{r}{q}$，

若$r=0$，显然不符合；若$r\geqslant 1$，取$m\geqslant\left[\dfrac{q}{r}\right]+1$，有$\dfrac{1}{m}<\dfrac{r}{q}$，不符合；

所以必要性得证，充分性即为狄利克雷定理.