昆明市2021届高三“三诊一模”摸底诊断测试

理科数学参考答案及评分标准

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	C	A	A	C	C	D	B	D	A	D

二、填空题

13．$\frac{13}{2}$　　14．40　　15．228　　16．$(\frac{1}{2},\sqrt{3})$

三、解答题

17．解：（1）由正弦定理得 $\sin A\sin B+\sin B\cos A=\sin C$，　…………………2 分

因为 $\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

所以 $\sin A\sin B=\sin A\cos B$，　……………………4 分

又因为 $\sin A\neq 0$，$\cos B\neq 0$，所以 $\tan B=1$，又 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$.　………6 分

（2）由余弦定理 $b^2=c^2+a^2-2ac\cos B$，$a=\sqrt{2}c$，　……………8 分

可得 $4=c^2+2c^2-2\sqrt{2}c^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $c=2$.　……………12 分

18．解：（1）函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，由题得 $f'(x)=(x+1)e^{x+1}+2x+2$.　………2 分

又 $f(0)=2$，$f'(0)=e+2$，　……………4 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y-2=(e+2)(x-0)$，

即 $(e+2)x-y+2=0$.　…………………6 分

（2）$f'(x)=(x+1)e^{x+1}+2x+2=(x+1)(e^{x+1}+2)$.

由于 $e^{x+1}+2>0$，令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$；　……………8 分

所以当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，

当 $x>-1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递减，　……………10 分

所以 $f(x)_{\min}=f(-1)=0$，

所以对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)\geq 0$.　…………………………12 分

19．解：（1）证明：因为 $ABCH$ 为正方形，所以 $CH \perp AD$，

又因为 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$， $CH \subset$ 平面 $ABCD$，所以 $CH \perp AA_1$， ……………4 分

因为 $AA_1 \cap AH = A$， AH 、 $AA_1 \subset$ 平面 ADD_1A_1，所以 $CH \perp$ 平面 ADD_1A_1，

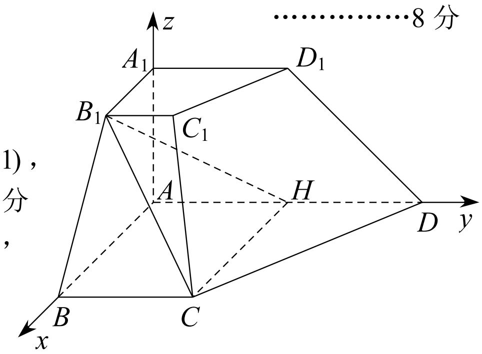
因为 $CH \subset$ 平面 B_1CH，所以平面 $B_1CH \perp$ 平面 ADD_1A_1． ……………………………6 分

（2）解：由题意， AB， AD， AA_1 两两垂直，

以 A 为原点，建立空间直角坐标系 $A-xyz$ 如图，设 $AB=1$，

则 $A(0,0,0)$， $C(1,1,0)$， $H(0,1,0)$， $B_1(\frac{1}{2},0,1)$， $D(0,2,0)$， $D_1(0,1,1)$．

$\overrightarrow{HC}=(1,0,0)$， $\overrightarrow{HB_1}=(\frac{1}{2},-1,1)$， ……………8 分



可得平面 B_1CH 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(0,1,1)$，

同理可得平面 CDD_1C_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1,1,1)$， …………………10 分

设平面 B_1CH 与平面 CDD_1C_1 所成锐二面角为 θ，

则 $\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以平面 B_1CH 与平面 CDD_1C_1 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$． ……………12 分

20．解：（1）用样本频率估计概率可知，每局比赛甲获胜的概率为 $\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$． …………2 分

每局比赛乙获胜的概率为 $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$， ……………4 分

甲获得冠军的概率 $P=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}+C_2^1\times(\frac{3}{5})^2\times\frac{2}{5}=\frac{81}{125}$． ……………………………6 分

（2）由题意知， X 的所有可能的取值为 35， 30， 20， 15， ……………7 分

$P(X=35)=\frac{9}{25}$， $P(X=30)=\frac{36}{125}$，

$P(X=20)=C_2^1\times(\frac{2}{5})^2\times\frac{3}{5}=\frac{24}{125}$， $P(X=15)=(\frac{2}{5})^2=\frac{4}{25}$， ……………9 分

X 的分布列为：

X	35	30	20	15
P	$\frac{9}{25}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{24}{125}$	$\frac{4}{25}$

…………………10 分

$E(X)=35\times\frac{9}{25}+30\times\frac{36}{125}+20\times\frac{24}{125}+15\times\frac{4}{25}=\frac{687}{25}=27.48$ （万元）． …………12 分

21．（1）设椭圆C的半焦距为c，

由题，$\triangle MF_1F_2$面积最大值为bc，则$\begin{cases} bc=3\sqrt{3}, \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases}$ 解得$\begin{cases} a=2\sqrt{3}, \\ b=\sqrt{3}, \\ c=3, \end{cases}$

所以椭圆方程为$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{3}=1$． ……………………………………………………5分

（2）设直线AB的方程为$y=kx+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

将$y=kx+m$代入$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{3}=1$，得$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$， ……………6分

$\Delta=16(12k^2-m^2+3)$，由$\Delta>0$得$m^2<12k^2+3$，

$x_1+x_2=\dfrac{-8km}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-12}{1+4k^2}$， ……………………………………………7分

由$\angle APO=\angle BPO$，得$k_{AP}=-k_{BP}$，即$\dfrac{y_1}{x_1-4}+\dfrac{y_2}{x_2-4}=0$，$\dfrac{kx_1+m}{x_1-4}+\dfrac{kx_2+m}{x_2-4}=0$，

整理得$2kx_1x_2+(m-4k)(x_1+x_2)-8m=0$，

即$2k(4m^2-12)+(m-4k)(-8km)-8m(1+4k^2)=0$，

所以$-24k-8m=0$，$m=-3k$，

所以直线l：$y=k(x-3)$经过$F_2(3,0)$，且$\Delta=48(k^2+1)>0$恒成立，………………9分

$S_{\triangle F_1AB}=S_{\triangle F_1F_2A}+S_{\triangle F_1F_2B}=\dfrac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_1-y_2|=3|k|\cdot|x_1-x_2|$，

$=3|k|\cdot\dfrac{\sqrt{48(k^2+1)}}{1+4k^2}=12\sqrt{3}\times\dfrac{|k|\sqrt{(k^2+1)}}{1+4k^2}=12\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}}{\dfrac{1}{k^2}+4}$， ………………10分

令$\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}=t$，则$t\ge 1$，

所以$S_{\triangle F_1AB}=12\sqrt{3}\times\dfrac{t}{t^2+3}\le 12\sqrt{3}\times(\dfrac{t}{2\sqrt{3}t})=6$， ………………11分

当且仅当$t^2=3$时取等号，即$1+\dfrac{1}{k^2}=3$，$k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$\triangle F_1AB$的面积取最大值为6.

……………………………12分

22．解：（1）消去参数得 $C:(x-2)^2+y^2=4$．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　$\cdots\cdots$2 分

由 $\sqrt{2}\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=3$ 得 $\sqrt{2}\rho(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4})=3$，即 $\rho\sin\theta+\rho\cos\theta=3$，

所以直线 l 的直角坐标方程为 $x+y-3=0$．　　　　　　　　　　　　　　　　$\cdots\cdots$5 分

（2）直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=3-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t,\end{cases}$（$t$ 为参数），代入曲线 C 的方程得：

$(1-\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2+\frac{1}{2}t^2=4$，整理得 $t^2-\sqrt{2}t-3=0$．　　　　　　　　　　$\cdots\cdots$8 分

所以 $t_1+t_2=\sqrt{2}$，$t_1t_2=-3<0$，所以 t_1，t_2 异号，

故 $\left||PA|-|PB|\right|=\left||t_1|-|t_2|\right|=|t_1+t_2|=\sqrt{2}$．　　　　　　　　　　$\cdots\cdots$10 分

23．解：（1）将 $a=1$，$b=2$ 代入 $f(x)\geq 5$，得 $|x+1|+|x-2|\geq 5$，

等价于：$\begin{cases}x\leq -1,\\ 1-2x\geq 5,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-1<x<2,\\ 3\geq 5,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geq 2,\\ 2x-1\geq 5,\end{cases}$　　　　　　$\cdots\cdots$3 分

解得：$x\leq -2$ 或 $x\geq 3$．

所以不等式 $f(x)\geq 5$ 的解集为 $(-\infty,-2]\cup[3,+\infty)$．　　　　　　　　　　$\cdots\cdots$5 分

（2）证明：$f(x)=|x+a|+|x-b|\geq|a+b|$，

因为 $f(x)$ 的最小值为 2，且 $a>0$，$b>0$，

所以 $a+b=2$．

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b+1}=\frac{1}{3}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+1})(a+b+1)=\frac{1}{3}(\frac{b+1}{a}+\frac{a}{b+1}+2)\geq\frac{1}{3}(2\sqrt{\frac{b+1}{a}\cdot\frac{a}{b+1}}+2)=\frac{4}{3}$，

当且仅当 $\frac{b+1}{a}=\frac{a}{b+1}$，即当 $a=b+1$，即 $a=\frac{3}{2}$，$b=\frac{1}{2}$ 时取等号.　　$\cdots\cdots$10 分