

昆明市 2021 届高三“三诊一模”摸底诊断测试

理科数学

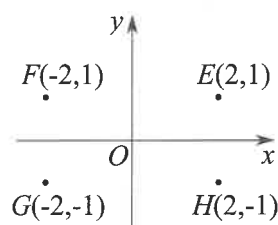
注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在答题卡上，并认真核准条形码上的准考证号、姓名、考场号、座位号及科目，在规定的位罝贴好条形码。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 如图，复数 $z = \frac{1+2i}{i}$ 在复平面内对应的点为

- A. E
B. F
C. G
D. H



2. 已知集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$ ，集合 $B = \{x | x^2 \leq 4\}$ ，则 $A \cap B =$

- A. $[-2, 2]$
B. $[-1, 1]$
C. $\{-1, 0, 1\}$
D. $\{-1, 1\}$

3. 已知向量 $a = (1, -1)$ ， $|b| = 4$ ， $a \cdot b = -2\sqrt{2}$ ，则 a 与 b 的夹角为

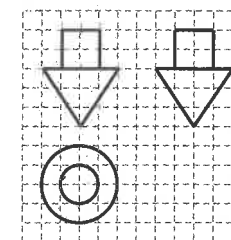
- A. $\frac{5\pi}{6}$
B. $\frac{3\pi}{4}$
C. $\frac{2\pi}{3}$
D. $\frac{\pi}{3}$

4. $\{a_n\}$ 为等比数列，若 a_1, a_3, a_5 成等差数列，则 $\frac{a_3 + a_5}{a_1 + a_3} =$

- A. 1
B. 2
C. 4
D. 8

5. 如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某个零件的三视图，则这个零件的体积等于

- A. 6π
B. 8π
C. 12π
D. 14π

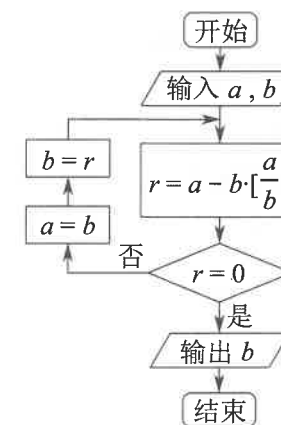


6. 双曲线 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的顶点到渐近线的距离为

- A. 2
B. $\sqrt{3}$
C. $\sqrt{2}$
D. 1

7. 右边程序框图的算法思路源于欧几里得在公元前 300 年左右提出的“辗转相除法”，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。执行该程序框图，若输入的 a, b 分别为 196 和 42，则输出 $b =$

- A. 2
B. 7
C. 14
D. 28



8. 若函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$ ($\omega > 0$) 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后，所得图象关于原点对称，

则 ω 的最小值为

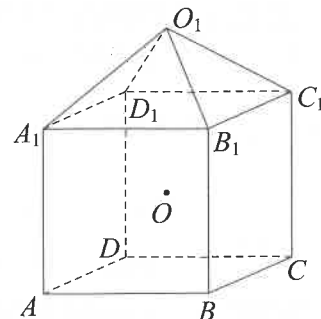
- A. $\frac{1}{4}$
B. $\frac{3}{4}$
C. $\frac{7}{4}$
D. $\frac{9}{4}$

9. 在计算机的算法分析中，常用时间复杂度来衡量一个算法的优劣，算法的时间复杂度是指算法完成一次运行所需要的运算次数，若用 $T(n)$ (单位：次) 表示算法的时间复杂度，它是算法求解问题数据规模 n 的函数。已知某算法的时间复杂度 $T(n) = 20n^4 + n \log_2 n$ ($n \in \mathbf{N}^*$)，一台计算机每秒可以进行 1.3 亿次运算，则要保证该算法能在此计算机上 1 秒内完成一次运行，则 n 的最大值为

- A. 40
B. 50
C. 60
D. 70

10. 已知 O_1 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的中心 O 关于平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的对称点, 则下列说法中错误的是

- A. $O_1C_1 \parallel$ 平面 A_1BCD_1
 B. 平面 $O_1A_1D_1 \perp$ 平面 $O_1B_1C_1$
 C. $O_1C_1 \perp$ 平面 AB_1D_1
 D. $O, O_1, A_1, B_1, C_1, D_1$ 六点在同一球面上



11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases}$ 若 $g(x) = f(x) - ax$ 有四个不同的零点, 则 a 的取值范围为

- A. $(0, \frac{1}{e})$ B. $[\frac{1}{e}, 1)$ C. $[1, e)$ D. $[e, +\infty)$

12. 银行按“复利”计算利息, 即把上一个月的利息和本金加在一起算作本金, 再计算下一个月的利息. 某人在银行贷款金额为 A 元, 采用的还款方式为“等额本息”, 即每个月还款 1 次, 每次还款的金额固定不变, 直到贷款的本金和利息全部还完为止. 若月利率 p 固定不变, 按“复利”计算本息和, 分 n 个月还清 (贷款 1 个月开始第 1 次还款), 则此人每月还款金额为

- A. $\frac{A}{n}$ 元 B. $\frac{A(1+p)^n}{n}$ 元 C. $\frac{A(1+p)^n}{(1+p)^n - 1}$ 元 D. $\frac{Ap(1+p)^n}{(1+p)^n - 1}$ 元

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x \geq 0, \\ x + y \leq 2, \\ x + 3y \geq 3, \end{cases}$ 则 $z = 4x + y$ 的最大值等于_____.

14. $(2x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}})^5$ 的展开式中 x^3 的系数为_____. (用数字作答)

15. 随着《生物多样性公约》第十五次缔约方大会 (COP15) 重新确定于 2021 年 5 月 17 日至 30 日在云南省昆明市举办, “生物多样性”的目标、方法和全球通力合作, 又成为国际范围的热点关注内容. 昆明市市花为云南山茶花, 又名滇山茶, 原产云南, 国家二级保护植物. 为了监测滇山茶的生长情况, 从不同林区随机抽取 100 株滇山茶测量胸径 D (厘米) 作为样本, 通过数据分析得到 $D \sim N(12.5, 4.5^2)$, 若将 $D \geq 21.5$ 的植株建档重点监测, 据此估算 10000 株滇山茶建档的约有_____株.

附: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6826$, $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544$.

16. 设抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 第一象限内的 A, B 两点都在 C 上, O 为坐标原点, 若 $\angle AFO = \angle AFB = \frac{\pi}{3}$, $|AB| = 2\sqrt{7}$, 则点 A 的坐标为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $a \sin B + b \cos A = c$.

- (1) 求 B ;
 (2) 设 $a = \sqrt{2}c$, $b = 2$, 求 c .

18. (12 分)

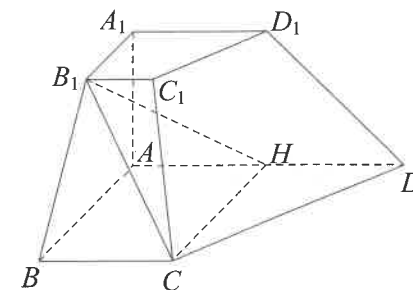
已知函数 $f(x) = xe^{x+1} + x^2 + 2x + 2$.

- (1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
 (2) 证明: 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x) \geq 0$.

19. (12 分)

如图, 在四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$, H 是 AD 的中点, 四边形 $ABCH$ 为正方形, $AB = AA_1 = A_1D_1$.

- (1) 证明: 平面 $B_1CH \perp$ 平面 ADD_1A_1 ;
 (2) 求平面 B_1CH 与平面 CDD_1C_1 所成锐二面角的余弦值.



20. (12 分)

甲、乙两位选手在某次比赛的冠、亚军决赛中相遇，赛制为三局两胜（当一方赢得两局胜利时，该方获胜，比赛结束），比赛每局均分出胜负。甲、乙以往进行过多次比赛，若从中随机抽取 20 局比赛结果作为样本，抽取的 20 局中甲胜 12 局、乙胜 8 局，若将样本频率视为概率，各局比赛结果相互独立。

- (1) 求甲获得冠军的概率；
- (2) 此次决赛设总奖金 50 万元，若决赛结果为 2:0，则冠军奖金为 35 万元，亚军奖金为 15 万元；若决赛结果为 2:1，则冠军奖金为 30 万元，亚军奖金为 20 万元。求甲参加此次决赛获得奖金数 X 的分布列和数学期望。

21. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ， M 为 C 上一点， $\triangle MF_1F_2$ 面积的最大值为 $3\sqrt{3}$ 。

- (1) 求 C 的标准方程；
- (2) 已知点 $P(4, 0)$ ， O 为坐标原点，不与 x 轴垂直的直线 l 与 C 交于 A, B 两点，且 $\angle APO = \angle BPO$ 。试问： $\triangle F_1AB$ 的面积是否存在最大值？若存在，求出该最大值；若不存在，说明理由。

(二) 选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。并用铅笔在答题卡选考题区域内把所选的题号涂黑。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4—4：坐标系与参数方程] (10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + 2\cos\alpha, \\ y = 2\sin\alpha, \end{cases}$ (α 为参数)。以坐标

原点为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\sqrt{2}\rho\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = 3$ 。

- (1) 求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程；
- (2) 设 $P(3, 0)$ ，若直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点，求 $\|PA\| - \|PB\|$ 。

23. [选修 4—5：不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |x + a| + |x - b|$ 。

- (1) 当 $a = 1, b = 2$ 时，求不等式 $f(x) \geq 5$ 的解集；
- (2) 设 $a > 0, b > 0$ ，若 $f(x)$ 的最小值为 2，证明： $\frac{1}{a} + \frac{1}{b+1} \geq \frac{4}{3}$ 。