

2020 学年高三教学测试 (2021.4)

数学 试题卷

注意事项:

1. 本科考试分试题卷和答题卷, 考生须在答题卷上作答. 答题前, 请在答题卷的密封线内填写学校、班级、学号、姓名;

2. 本试题卷分为第 I 卷 (选择题) 和第 II 卷 (非选择题) 两部分, 共 6 页, 全卷满分 150 分, 考试时间 120 分钟.

参考公式:

若事件 A , B 互斥, 则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

若事件 A , B 相互独立, 则

$$P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)$$

若事件 A 在一次试验中发生的概率是 p ,

则 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生

$$k \text{ 次的概率 } P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

$$(k=0,1,2,\cdots,n)$$

台体的体积公式

$$V=\frac{1}{3}h(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)$$

其中 S_1, S_2 分别表示台体的上、下底面积,

h 表示台体的高

柱体的体积公式

$$V=Sh$$

其中 S 表示柱体的底面积, h 表示柱体的高

锥体的体积公式

$$V=\frac{1}{3}Sh$$

其中 S 表示锥体的底面积, h 表示锥体的高
球的表面积公式

$$S=4\pi R^2$$

球的体积公式

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

选择题部分（共 40 分）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | 2 < x < 9\}$ ， $B = \{x | |x - 2| < 3\}$ ，则 $A \cap B =$

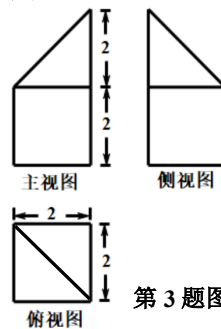
- A. $(-1, 5)$ B. $(2, 5)$ C. $(-1, 9)$ D. $(2, 9)$

2. 已知 i 为虚数单位，且复数 $a^2 - 1 + (a - 1)i$ 是纯虚数，则实数 a 的值为

- A. 1 或 -1 B. 1 C. -1 D. 0

3. 某几何体的三视图如图所示（单位：cm），则该几何体的体积（单位： cm^3 ）是

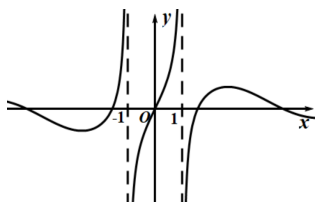
- A. $\frac{28}{3}$ B. $\frac{32}{3}$
C. $\frac{26}{3}$ D. $\frac{16}{3}$



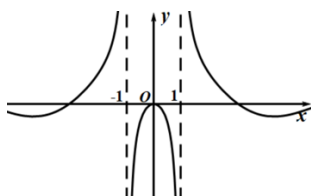
4. “ $k = \sqrt{3}$ ”是“直线 $y = kx + 2$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

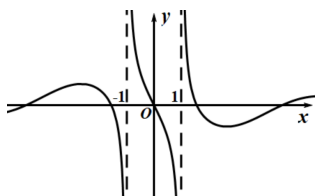
5. 函数 $f(x) = \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)\cos x$ 的图象可能是



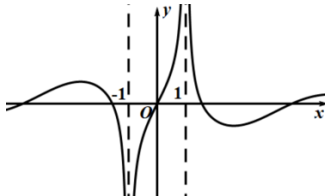
A.



B.



C.



D.

6. 在平面直角坐标系中, 不等式组
$$\begin{cases} x - y \leq 0, \\ y - x \leq 2, \\ x + y \leq 2, \\ y \geq ax + a \end{cases}$$
 所表示的平面区域是一个梯形, 则实数 a 的

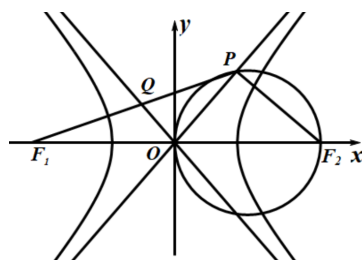
取值范围是

- A. $[0, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$ B. $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$
C. $[0, 2)$ D. $(-\infty, -1) \cup (-1, \frac{1}{2})$
7. 如图, 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 以 OF_2 为直径的圆与双曲线 C 的渐近线在第一象限的交点为 P , 线段 PF_1 与另一条渐近线交于点

Q , 且 $\triangle OPF_2$ 的面积是 $\triangle OPQ$ 面积的 2 倍, 则该双曲线的离心率为

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$
8. 若正实数 a, b 满足 $\log_2 a - \frac{1}{a+1} = 2\log_4 b - \frac{1}{2b+1}$, 则

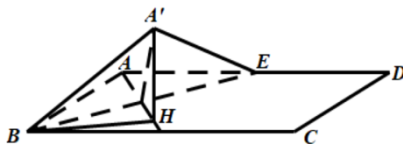
- A. $a > 2b$ B. $a < 2b$
C. $b > 2a$ D. 以上均不正确



第 7 题图

9. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, 已知 $AB = 2$, $BC = 4$, E 为 AD 的中点. 将 $\triangle ABE$ 沿着 BE 向上翻折至 $\triangle A'BE$, 记锐二面角 $A' - BE - C$ 的平面角为 α , $A'B$ 与平面 $BCDE$ 所成的角为 β , 则下列结论不可能成立的是

- A. $\sin \alpha = \sqrt{2} \sin \beta$
B. $\sqrt{2} \cos \alpha = \cos \beta$
C. $\alpha < 2\beta$
D. $\alpha - \beta > \frac{\pi}{4}$



第 9 题图

10. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_n = a_{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n}} a_{n+1}^2$. 则下列正确的是

A. $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} > \frac{1}{\sqrt{n}}$

B. 数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是递减数列

C. 数列 $\{a_{n+1} + a_n\}$ 是递增数列

D. $a_{n+1} > \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

非选择题部分（共 110 分）

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分。

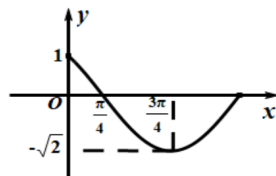
11. 若直线 $l_1: 2x + y + a = 0$ 与直线 $l_2: ax - y - 3 = 0$ 平行，则实数 $a = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$ ，直线 l_1 与 l_2 之间的距离为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

12. 设 $(2+x)^6 = a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x)^2 + \cdots + a_6(1+x)^6$,

则 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_6 = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$, $a_2 = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

13. 若函数 $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的

部分图象如图所示，则 $\varphi = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$, $f(-\frac{\pi}{2}) = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.



第 13 题图

14. 已知袋中装有大小相同的 x 个红球和 2 个白球. 从中任取 2 个球，记取出的白球个数为 ξ ，若 $P(\xi = 1) = \frac{3}{5}$ ，则 $x = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$, $E(\xi) = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

15. 若正实数 a, b 满足 $b + 3a = 2ab$ ，则 $\frac{a+b}{ab^2}$ 的最大值为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

16. 若函数 $f(x) = \begin{cases} k - \frac{1}{x^2} (x < 0), \\ |x-1| - kx^2 (x > 0) \end{cases}$ 恰有 4 个零点，则实数 k 的取值范围是 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

17. 已知平面向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足 $|\vec{a}| = |\vec{c}| = \frac{1}{2}|\vec{b}| = 1$, $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq 1$. 若 $\vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$ ，则 $|\vec{a} \cdot \vec{c}| + |\vec{b} \cdot \vec{d}|$ 的最大值是 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

18. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，已知 $b = \sqrt{3}$ ，

$$a \cos C + c \cos A = 2b \cos B.$$

(I) 求角 B 的大小；

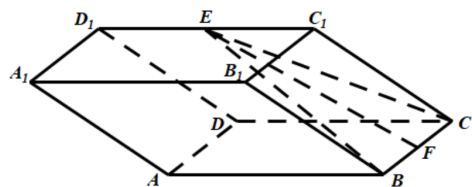
(II) 求 $a \sin C$ 的最大值.

19. 如图，四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形， $AD = 2$ ， $AB = AA_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ，

$\angle D_1DC = 120^\circ$ ，且二面角 $D_1 - CD - A$ 的平面角的大小为 60° ， E, F 分别为 C_1D_1, BC 的中点.

(I) 求证： $AD \perp EF$ ；

(II) 求 DD_1 与平面 BCE 所成角的正弦值.



第 19 题图

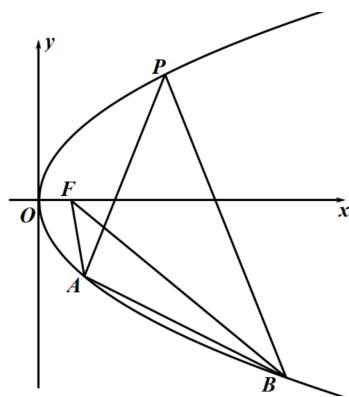
20. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，公比为 q ($q > 0$) 的等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，并

满足 $2^{S_{n+1}}(1 + T_n) = 2^{S_n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)，且 $a_1 = 0$ ， $a_2 = -1$ ， $T_3 = 7$.

(I) 求 a_n 与 b_n ；

(II) 若不等式 $t(T_n + 1) + S_n + S_{n+1} > 0$ 对任意的正整数 n 恒成立，求实数 t 的取值范围.

21. 如图, 已知点 $P(2,2)$ 是焦点为 F 的抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点, A, B 是抛物线 C 上异于 P 的两点, 且直线 PA, PB 的倾斜角互补, 若直线 PA 的斜率为 $k (k > 1)$.
- (I) 证明: 直线 AB 的斜率为定值;
- (II) 求焦点 F 到直线 AB 的距离 d (用 k 表示);
- (III) 在 $\triangle ABF$ 中, 记 $\angle FAB = \alpha, \angle FBA = \beta$, 求 $\sin \alpha - \sin \beta$ 的最大值.



第21题图

22. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{a} - \ln(ax - a) + 1 (a > 0)$ (e 为自然对数的底数).
- (I) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线的斜率;
- (II) 若 $f(x) > 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;
- (III) 设函数 $g(x) = \ln(x - 1) - ax - 1$, 且 $h(x) = f(x) + g(x)$. 若 x_1, x_2 为函数 $h(x)$ 的两个零点, 且 $h(x)$ 的导函数为 $h'(x)$, 求证: $h'(\frac{x_1 + x_2}{2}) < 0$.