

湖北省部分重点中学 2021 届高三第一次联考 高三数学试卷参考答案

- 一、单选题. 1—4: BCAC 5—8: DABD
二、多选题. 9. ABC 10. AB 11. AC 12. AD
三、填空题. 13. $y = 2x - e$ 14. $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ 15. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 16. 12

四、解答题.

17. 解: (1) 由 $b = c(\cos A - \sin A)$ 知 $\sin B = \sin C \cos A - \sin C \sin A$,

又 $\sin B = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C$,

因为 $\sin A \cos C = -\sin C \sin A (\sin A \neq 0) \Rightarrow \tan C = -1$

又 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{3\pi}{4}$ 5 分

(2) 选择条件①: 由 $\triangle ABC$ 的面积 $S = 2$ 知, $\frac{1}{2}ab \sin C = 2$, 即

$$\frac{1}{2}ab \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \Rightarrow ab = 4\sqrt{2} \quad (1)$$

又 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, 所以 $a^2 + b^2 + ab = 20$ (2)

联立 (1) (2) 得 $\begin{cases} a = 2\sqrt{2}, \\ b = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = 2, \\ b = 2\sqrt{2}. \end{cases}$ 又 $B > A$, 所以 $a = 2, b = 2\sqrt{2}$.

因此, 在 $\triangle ACD$ 中,

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos C = 8 + 1 - 2 \times 2\sqrt{2} \times 1 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 13,$$

所以 $AD = \sqrt{13}$10 分

选择条件②: 由 $\cos B = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 知 $\sin B = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

所以 $\sin A = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C = \frac{\sqrt{10}}{10}$,

在 $\triangle ABC$ 中, 由 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 知: $\frac{a}{\frac{\sqrt{10}}{10}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$,

所以 $a = 2, b = 2\sqrt{2}$,

所以在 $\triangle ACD$ 中,

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos C = 8 + 1 - 2 \times 2\sqrt{2} \times 1 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 13,$$

所以 $AD = \sqrt{13}$10 分

18. 解: (1) 由题意, $a_1 = 2$.

由

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2(n \geq 1), \quad (1)$$

得

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1} = (n-2) \cdot 2^n + 2(n \geq 2), \quad (2)$$

①-②, 得

$$na_n = [(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2] - [(n-2) \cdot 2^n + 2] = n \cdot 2^n (n \geq 2),$$

所以

$$a_n = 2^n (n \geq 2)$$

又因为当 $n=1$ 时, 上式也成立, 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^n$6 分

(没有讨论 $n=1$ 的情况扣 1 分)

(2) 由题意, $b_n = \frac{2n+1}{a_n} = \frac{2n+1}{2^n}$, 所以

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = \frac{3}{2^1} + \frac{5}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \cdots + \frac{2n+1}{2^n}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} + \frac{2n+1}{2^{n+1}}, \quad (4)$$

③-④, 得

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{1}{2}S_n &= \left[\frac{3}{2^1} + \frac{5}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \cdots + \frac{2n+1}{2^n} \right] - \left[\frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} + \frac{2n+1}{2^{n+1}} \right] \\ &= \frac{3}{2} + 2 \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right) - \frac{2n+1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} + 2 \times \frac{\frac{1}{2} [1 - (\frac{1}{2})^n]}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n+1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{5}{2} - (2n+5) \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

从而 $S_n = -(2n+5) \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n + 5$12 分

19. 解: (1) 连接 AC 交 BD 于 O , 连接 PO ,

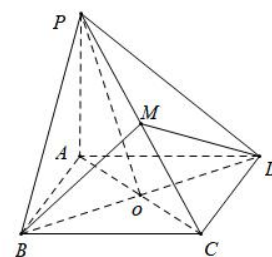
由四边形 $ABCD$ 是菱形, 得 $BD \perp AC$,

因为 $PB=PD$, 所以 $BD \perp PO$,

又 $AC, PO \subset$ 平面 PAC , $AC \cap PO = O$, 故 $BD \perp$ 平面 PAC .

又 $BD \subset$ 平面 $ABCD$,

所以平面 $PAC \perp$ 平面 $ABCD$5 分



(2) 解法一: 由 (1) 知: 平面 $PAC \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAC \cap$ 平面 $ABCD = AC$, 又 $PA \perp AC$, $PA \subset$ 平面 PAC , 故 $PA \perp$ 平面 $ABCD$.

在菱形 $ABCD$ 中, 因为 $BD = \sqrt{3}AB$, 所以 $\angle ABD = 30^\circ$,

所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 所以 $AC = 2$,

在 $\triangle PBC$ 和 $\triangle PDC$ 中, $PB = PD$, $PC = PC$, $BC = DC$,

所以 $\triangle PBC \cong \triangle PDC$, 所以 $\angle BPM = \angle DPM$.

在 $\triangle PBM$ 和 $\triangle PDM$ 中, $PB = PD$, $\angle BPM = \angle DPM$, $PM = PM$,

所以 $\triangle PBM \cong \triangle PDM$, 所以 $BM = DM$.

因为 $BM \perp MD$, 所以 $\triangle BDM$ 为等腰直角三角形,

所以 $OM = OB = \sqrt{3}$, 所以 $OM = \frac{1}{2}AP$,

所以 M 为 PC 中点, $OM \parallel AP$8 分
又 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $OM \perp$ 平面 $ABCD$.

设 O 到平面 ABM 的距离为 h , BD 与平面 ABM 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = \frac{h}{OB}$.

由 $V_{O-ABM} = V_{M-AOB}$, 知 $\frac{1}{3}S_{\triangle ABM} \cdot h = \frac{1}{3}S_{\triangle AOB} \cdot OM$, 所以 $h = \frac{S_{\triangle AOB} \cdot OM}{S_{\triangle ABM}}$.

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

在 $\text{Rt}\triangle BMD$ 中, $BM = \frac{\sqrt{2}}{2}BD = \sqrt{6}$.

在 $\text{Rt}\triangle PAC$ 中, $PC = \sqrt{PA^2 + AC^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$, 所以 $AM = 2$,

所以 $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot \sqrt{AB^2 - \left(\frac{1}{2}BM\right)^2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$,

所以 $h = \frac{S_{\triangle AOB} \cdot OM}{S_{\triangle ABM}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{15}}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$, $\sin \theta = \frac{h}{OB} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

即直线 BD 与平面 ABM 所成角的正弦为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$12 分

解法二: 以 O 为原点, 建立如图所示空间直角坐标系.

则 $A(0, -1, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $B(\sqrt{3}, 0, 0)$, $D(-\sqrt{3}, 0, 0)$,

设 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PC} (0 \leq \lambda \leq 1)$, 则有

$(x_M, y_M + 1, z_M - 2\sqrt{3}) = \lambda(0, 2, -2\sqrt{3})$,

所以 $M(0, 2\lambda - 1, 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\lambda)$,

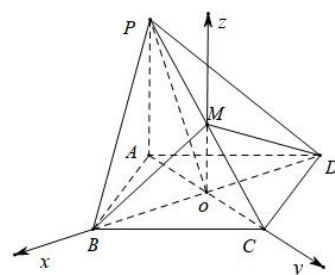
由 $BM \perp MD$, 得 $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$, 即

$(-\sqrt{3}, 2\lambda - 1, 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\lambda) \cdot (-\sqrt{3}, 1 - 2\lambda, 2\sqrt{3}\lambda - 2\sqrt{3}) = 0$,

所以 $3 - (2\lambda - 1)^2 - (2\sqrt{3}\lambda - 2\sqrt{3})^2 = 0$, 即 $8\lambda^2 - 14\lambda + 5 = 0$,

解得 $\lambda = \frac{1}{2}$ 或 $\lambda = \frac{5}{4}$ (舍去)

所以 $M(0, 0, \sqrt{3})$.



设平面 ABM 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0, \\ \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0, \end{cases}$ 即

$\begin{cases} (\sqrt{3}, 1, 0) \cdot (x, y, z) = 0, \\ (0, 1, \sqrt{3}) \cdot (x, y, z) = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \sqrt{3}x + y = 0, \\ y + \sqrt{3}z = 0, \end{cases}$ 可取 $\vec{n} = (1, -\sqrt{3}, 1)$.

设 BD 与平面 ABM 所成的角为 θ , 则

$\sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{BD}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{BD} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{BD}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$12 分

20. 解: (1) 设 $M(x_1, y_1)$, 则由题意知, $y_1 > 0$, $A(-2, 0)$.

由已知及椭圆的对称性, 知 $k=1$, 所以 AM 的方程为 $y=x+2$.

将 $x=y-2$ 代入 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 中, 得 $7y^2 - 12y = 0$.

所以 $y=0$ 或 $y=\frac{12}{7}$. 所以 $y_1=\frac{12}{7}$.

所以 $S_{\triangle AMN} = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{12}{7} \times \frac{12}{7} = \frac{144}{49}$4 分

(2) 由题意, $k > 0$, 设直线 AM 的方程为 $y=k(x+2)$,

联立 $\begin{cases} y=k(x+2), \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1. \end{cases}$ 消 y , 得

$$(3+4k^2)x^2 + 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0,$$

由 $x_1 \cdot (-2) = \frac{16k^2 - 12}{3+4k^2}$, 得 $x_1 = \frac{6-8k^2}{3+4k^2}$,

所以 $|AM| = \sqrt{1+k^2} |x_1+2| = \frac{12\sqrt{1+k^2}}{3+4k^2}$8 分

同理可设直线 AN 的方程为 $y=-\frac{1}{k}(x+2)$,

可得 $|AN| = \frac{12k\sqrt{k^2+1}}{3k^2+4}$9 分

由 $19|AM| = 8|AN|$, 得 $\frac{19}{3+4k^2} = \frac{8k}{3k^2+4}$, 即 $32k^3 - 57k^2 + 24k - 76 = 0$, 即

$$(k-2)(32k^2+7k+38)=0,$$

又 $k > 0$, 所以 $32k^2+7k+38 > 0$, 所以 $k=2$12 分

21. 解: 由图可知, 1000 名高血压患者中:

BMI	[28, 30)	[30, 32)	[32, 34)
人数	$0.1 \times 2 \times 1000 = 200$	$0.05 \times 2 \times 1000 = 100$	$0.025 \times 2 \times 1000 = 50$

5000 名非高血压患者中:

BMI	[28, 30)	[30, 32)	[32, 34)
人数	$0.08 \times 2 \times 5000 = 800$	$0.03 \times 2 \times 5000 = 300$	$0.005 \times 2 \times 5000 = 50$

被调查者中肥胖人群的 BMI 平均值

$$\mu = \frac{(200+800) \times 29 + (100+300) \times 31 + (50+50) \times 33}{200+100+50+800+300+50} = 29.8.$$

(2) 由 (1) 及频率分布直方图知, 1000 名高血压患者中有 $200+100+50=350$ 人肥胖,

5000 名非高血压患者中有 $800+300+50=1150$ 人肥胖, 所以可得如下列联表:

	肥胖	不肥胖	总计
高血压	350	650	1000
非高血压	1150	3850	5000
总计	1500	4500	6000

由列联表中数据得 K^2 的观测值为 $k = \frac{6000 \times (350 \times 3850 - 1150 \times 650)^2}{1000 \times 5000 \times 4500 \times 1500} = 64 > 10.828$,

所以能有 99.9% 的把握认为 35 岁以上成人高血压与肥胖有关.

22. 解: (1) 设 $f(x)$ 的零点为 $x = x_0$, 则 $a^{x_0} = x_0^a$,①

又因 $f'(x) = a^x \ln a - ax^{a-1}$, 则由题意知 $f'(x_0) = 0$, 即 $a^{x_0} \ln a - ax_0^{a-1} = 0$,②

由①②得 $x_0^a \ln a = ax_0^{a-1}$, 所以 $\frac{\ln a}{a} = \frac{1}{x_0}$ ③

又对①式两边取对数得 $x_0 \ln a = a \ln x_0$, 即 $\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln x_0}{x_0}$④

比较③④得: $\ln x_0 = 1$, 故 $x_0 = e$.

所以满足条件的实数 a 的值只有一个, 且 $a = e$6 分

(2) 当 $a = e$ 时, $f(x) = e^x - x^e$.

$f(x) \geq 1 + \lambda x^2 - x^e$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立 $\Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{x^2} \geq \lambda$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

设 $g(x) = \frac{e^x - 1}{x^2}$, 则 $g'(x) = \frac{e^x(x-2)+2}{x^3}$.

设 $h(x) = e^x(x-2)+2$, 则 $h'(x) = e^x(x-1)$.

故 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

又 $h(0)=0$, $h(1)=2-e<0$, $h(1.5)=2-0.5e^{1.5}<0$, $h(1.6)=2-0.4e^{1.6}>0$.

所以存在 $x_0 \in (1.5, 1.6)$, 使得 $h(x_0)=e^{x_0}(x_0-2)+2=0$, 即 $e^{x_0} = \frac{2}{2-x_0}$.

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h(x) < 0$, 此时 $g'(x) = \frac{e^x(x-2)+2}{x^3} < 0$;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h(x) > 0$, 此时 $g'(x) = \frac{e^x(x-2)+2}{x^3} > 0$.

所以 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $g(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得最小值 $g(x_0)$.

又 $x_0 \in (1.5, 1.6)$, 所以

$$g(x_0) = \frac{e^{x_0} - 1}{x_0^2} = \frac{\frac{2}{2-x_0} - 1}{x_0^2} = \frac{1}{x_0(2-x_0)} \in \left(\frac{4}{3}, \frac{25}{16}\right)$$

要使 $g(x) = \frac{e^x - 1}{x^2} \geq \lambda$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，需满足 $g(x_0) \geq \lambda$.

所以整数 λ 的最大值为 1.12 分