

2020 年秋“荆、荆、襄、宜四地七校考试联盟”

高三期中联考

数 学 试 题

命题学校：钟祥一中 命题人：金 伟 审题：高三数学组

本试卷共 4 页，共 22 题。满分 150 分，考试用时 120 分钟

★祝考试顺利★

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

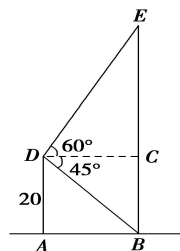
1. 若集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ，集合 $B = \{x | y = \log_2(1-x)\}$ ，则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{2\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{-2, -1, 0\}$ D. $\{-2, -1, 0, 1\}$

2. 在一幢 20 m 高的楼顶测得对面一塔吊顶的仰角为 60° ，塔基的俯角为 45° ，那么

这座塔吊的高是()

- A. $20\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ m B. $20(1 + \sqrt{3})$ m
C. $10(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ m D. $20(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ m



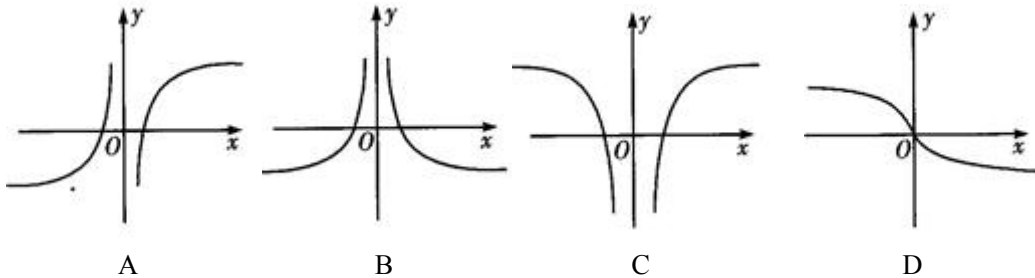
3. 设 $a = \log_{\frac{1}{2}} 3$ ， $b = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ ， $c = 3^{\frac{1}{2}}$ ，则()

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $b < a < c$

4. 已知命题 p ， $\forall x \in \mathbf{R}$ ， $e^x + \frac{1}{e^x} \geq 2$ ，则 $\neg p$ 为()

- A. $\exists x \in \mathbf{R}$ ， $e^x + \frac{1}{e^x} \geq 2$ B. $\exists x \in \mathbf{R}$ ， $e^x + \frac{1}{e^x} < 2$
C. $\exists x \in \mathbf{R}$ ， $e^x + \frac{1}{e^x} \leq 2$ D. $\forall x \in \mathbf{R}$ ， $e^x + \frac{1}{e^x} \leq 2$

5. 函数 $f(x) = \frac{x \ln |x|}{|x|}$ 的大致图象为 ()



6. 若函数 $f(x) = \sin x \cdot \ln(mx + \sqrt{1+4x^2})$ 的图象关于 y 轴对称, 则实数 m 的值为 ()

- A. 2 B. 4 C. ± 2 D. ± 4

7. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_7 > 0$, $a_3 + a_9 < 0$, 则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的最小值为 ()

- A. S_4 B. S_5 C. S_6 D. S_7

8. 设函数 $f(x) = \sqrt{e^x + 3x - a}$. 若曲线 $y = \sin x$ 上存在点 (x_0, y_0) , 使得 $f(f(y_0)) = y_0$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $[1, e+2]$ B. $[e^{-1}-3, 1]$ C. $[1, e+1]$ D. $[e^{-1}-3, e+1]$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 3 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列选项中正确的是 ()

- A. 不等式 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 恒成立 B. 存在实数 a , 使得不等式 $a + \frac{1}{a} \leq 2$ 成立
C. 若 a, b 为正实数, 则 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$ D. 若正实数 x, y 满足 $x + 2y = 1$, 则 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} \geq 8$

10. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 前 4 项的和为 $a_1 + 14$, 且 $a_2, a_3 + 1, a_4$ 成等差数列, 则 q 的值可能为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 3

11. 已知函数 $f(x) = \cos(2x + \varphi)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$), $F(x) = f(x) + \frac{\sqrt{3}}{2} f'(x)$ 为奇函数, 则下述四个结论中说法正确的是 ()

- A. $\tan \varphi = \sqrt{3}$ B. $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上存在零点, 则 a 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$
C. $F(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ 上单调递增 D. $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 有且仅有一个极大值点

12. 设函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln x|, & x > 0 \\ e^x(x+1), & x \leq 0 \end{cases}$, 若方程 $[f(x)]^2 - af(x) + \frac{1}{16} = 0$ 有六个不等的实数根, 则实数 a 可取的值可能是 ()

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{2}{3}$

C. 1

D. 2

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 2^x - 2, & x \geq 0 \end{cases}$ 则 $f(f(-2)) = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知 $x \in \mathbb{R}$, 条件 $p: x^2 < x$, 条件 $q: \frac{1}{x} \geq a$ ($a > 0$), 若 p 是 q 的充分不必要条件, 则实数 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 若函数 $f(x) = 2^x - \frac{1}{20}x^2$ ($x < 0$) 的零点为 x_0 , 且 $x_0 \in (a, a+1)$, $a \in \mathbb{Z}$, 则 a 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 不为 0, 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比 q 是小于 1 的正有理数, 若 $a_1 = b_1 = d$, 且 $\frac{a_1 + a_2 + a_4}{b_1 + b_2 + b_3}$ 是正整数, 则 $q = \underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对应边分别为 a, b, c ,

在 ① $\sqrt{3} \cos C (a \cos B + b \cos A) = c \sin C$

② $a \sin \frac{A+B}{2} = c \sin A$

③ $(\sin B - \sin A)^2 = \sin^2 C - \sin B \sin A$

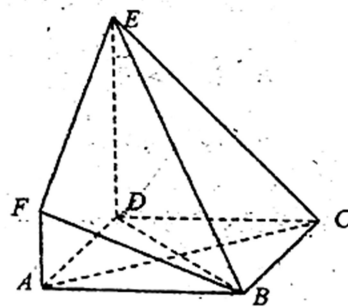
这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 当 $\underline{\hspace{2cm}}$ 时, 求 $\sin A \cdot \sin B$ 的最大值.

18. (本题满分 12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 2, a_n , S_n 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = n \cdot a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (本题满分 12 分) 如图, $ABCD$ 是边长为 3 的正方形, $DE \perp$ 平面 $ABCD$, $AF \parallel DE$, $DE = 3AF$, BE 与平面 $ABCD$ 所成角为 60° .



- (1) 求证: $AC \perp$ 平面 BDE ;
- (2) 求二面角 $F-BE-D$ 的余弦值.

20. (本题满分 12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{1}{2}$, A 为椭圆上一动点 (异于左右顶点), ΔAF_1F_2 面积的最大值为 $\sqrt{3}$.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 设过点 F_1 的直线 l (l 的斜率存在且不为 0) 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 线段 AB 的垂直平分线交 x 轴于点 P , 试判断 $\frac{|PF_1|}{|AB|}$ 是否为定值? 若是, 求出该定值; 若不是, 请说明理由.

21. (本题满分 12 分) 某款游戏的规则如下: 每盘游戏都需击鼓三次, 每次击鼓要么出现一次音乐, 要么不出现音乐; 每盘游戏击鼓三次, 若出现一次音乐获得 1 分, 若出现两次音乐获得 2 分, 若出现三次音乐获得 5 分, 若没有出现音乐则扣 15 分 (即获得 -15 分). 设每次击鼓出现音乐的概率为 $\frac{1}{2}$, 且各次击鼓出现音乐相互独立.

- (1) 设每盘游戏获得的分数为 X , 求 X 的分布列.
- (2) 玩三盘此游戏, 至少有一盘出现音乐的概率是多少?
- (3) 玩过这款游戏的人发现, 若干盘游戏后, 与最初的得分相比, 得分没有增加反而减少了. 请你分析得分减少的原因.

22. (本题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}$, $g(x) = e^x - ax (x \in R)$.

- (1) 若 $f(x)$ 在区间 $[a-5, a-1]$ 上的最大值为 $\frac{4}{3}$, 求实数 a 的取值范围;
- (2) 设 $h(x) = \frac{3}{2}f(x) - x + 1$, $F(x) = \begin{cases} h(x), & h(x) \leq g(x) \\ g(x), & h(x) > g(x) \end{cases}$, 记 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为 $F(x)$ 从小到大的零点, 当 $a \geq e^3$ 时, 讨论 $F(x)$ 的零点个数及大小.