2020年秋“荆、荆、襄、宜四地七校考试联盟”

高三期中联考数学试题参考答案

一、单项选择题：

1－4　CBAB　　5－8　ACCA

二、多项选择题：

9.BCD　　10. AC　　11. BC　　12. BC

三、填空题:

13．14　　14．（0，1]　　15．-3　　16．$\dfrac{1}{2}$

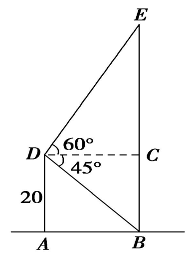
1.【解析】集合 $B=\{x\mid y=\log_2(1-x)\}$，则其中定义域 $B=\{x\mid 1-x>0\}=\{x\mid x<1\}$,又有集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，则 $A\cap B=\{-2,-1,0\}$．故选：C.

2.【解析】如图，由条件知四边形 ABCD 为正方形，

∴AB＝CD＝20 m，BC＝AD＝20 m.

在△DCE 中，∠EDC＝60°，∠DCE＝90°，CD＝20 m，

∴EC＝CD·tan 60°＝$20\sqrt{3}$ m，∴BE＝BC＋CE＝($20+20\sqrt{3}$)m.故选 B.



3.【解析】$a=\log_{\frac{1}{2}}3<\log_{\frac{1}{2}}1=0$；$0<b=(\frac{1}{2})^3<1$；$c=3^{\frac{1}{2}}>1$．故选 A.

4.【解析】∵ 原命题 $\forall x\in R$，$e^x+\dfrac{1}{e^x}\geq 2$ ，∴ 命题 $\forall x\in \mathbf{R}$，$e^x+\dfrac{1}{e^x}\geq 2$ 的否定是:$\exists x\in \mathbf{R}$，$e^x+\dfrac{1}{e^x}<2$．故选:B.

5.【解析】因为 $f\left(x\right)=\dfrac{x\ln|x|}{|x|}=\begin{cases} lnx, x>0 \\ -ln(-x), x<0 \end{cases}$ 是奇函数排除 B,C，且当 $x>1$ 时，$f\left(x\right)>0$. 故答案为 A.

6.【解析】∵ $y=f(x)$ 关于 y 轴对称，∴ $y=f(x)$ 为偶函数，又 $y=\sin x$ 为奇函数，∴y=ln ($mx+\sqrt{1+4x^2}$)为奇函数，则 $m=\pm 2$．故选 C.

7.【解析】∵等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3+a_9<0$，∴ $a_3+a_9=2a_6<0$，即 $a_6<0$.又 $a_7>0$，∴ $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的最小值为 S_6.故答案选 C.

8.【解析】由 $f\left(x\right)$ 为增函数可得 $f\left(y_0\right)=y_0$，又可知 $y_0\in[0,1]$，则问题等价于方程 $f\left(x\right)=x$，$x\in[0,1]$ 有解，即 $x^2=e^x+3x-a$ 在 $x\in[0,1]$ 有解，分离参数可得 $a=e^x+3x-x^2$，令 $g\left(x\right)=e^x+3x-x^2$，∵ $g'\left(x\right)=e^x+3-2x>0, x\in[0,1]$，所以函数 $g\left(x\right)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，

所以$1=g\left(0\right)\le g\left(x\right)\le g\left(1\right)=e+2$,所以$1\le a\le \mathrm{e}+2$.

故选：A.

9.【解析】不等式$a+b\ge 2\sqrt{ab}$恒成立的条件是$a\ge 0$，$b\ge 0$，故A不正确；

当a为负数时，不等式$a+\dfrac{1}{a}\le 2$成立.故B正确；由基本不等式可知C正确；

对于$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\left(x+2y\right)=4+\dfrac{4y}{x}+\dfrac{x}{y}\ge 4+2\sqrt{\dfrac{4y}{x}\cdot\dfrac{x}{y}}=8$，

当且仅当$\dfrac{4y}{x}=\dfrac{x}{y}$，即$x=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{4}$时取等号，故D正确.故选；BCD.

10.【解析】因为a_2，a_3+1，a_4成等差数列，所以$a_2+a_4=2(a_3+1)$，

因此，$a_1+a_2+a_3+a_4=a_1+3a_3+2=a_1+14$，故$a_3=4$．又$\{a_n\}$是公比为$q$的等比数列，

所以由$a_2+a_4=2(a_3+1)$，得$a_3(q+\dfrac{1}{q})=2(a_3+1)$，即$q+\dfrac{1}{q}=\dfrac{5}{2}$，解得$q=2$或$\dfrac{1}{2}$．故选：AC.

11.【解析】因为$f(x)=\cos(2x+\varphi)$，所以$f'(x)=-2\sin(2x+\varphi)$，

所以$F(x)=f(x)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}f'(x)=\cos(2x+\varphi)-\sqrt{3}\sin(2x+\varphi)=2\cos\left(2x+\varphi+\dfrac{\pi}{3}\right)$

因为$F(x)$为奇函数，则$F(0)=0$，即$\cos\left(\varphi+\dfrac{\pi}{3}\right)=0$，所以$\varphi+\dfrac{\pi}{3}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in Z$，因为

$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，

对于A，$\tan\varphi=\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故A错误；

对于B，令$f(x)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$，得$x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，若$f(x)$在$[-a,a]$上存在零点，则$a>0$

且a的最小值为$\dfrac{\pi}{6}$，故B正确；

对于C，$F(x)=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}\right)=-2\sin 2x$，当$x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$时，$2x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$，则$F(x)$在$\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$上

单调递增，故C正确.

对于D，因为$f'(x)=-2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，当$x\in\left(0,\dfrac{5\pi}{12}\right)$时，$f'(x)<0$，当$x\in\left(\dfrac{5\pi}{12},\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上存在一个极小值点，没有极大值点，故D错误.

故选：BC.

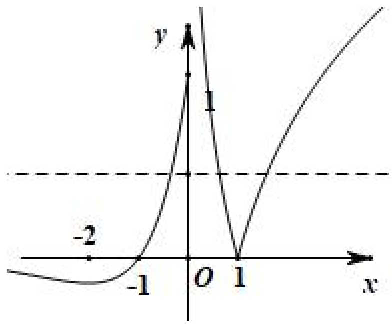
12.【解析】当 $x\le 0$ 时，$f\left(x\right)=e^{x}\left(x+1\right)$，则 $f'(x)=e^{x}(x+1)+e^{x}=e^{x}(x+2)$

由 $f'\left(x\right)<0$ 得 $x+2<0$，即 $x<-2$，此时 $f\left(x\right)$ 为减函数，

由 $f'\left(x\right)>0$ 得 $x+2>0$，即 $-2<x\le 0$，此时 $f\left(x\right)$ 为增函数，

即当 $x=-2$ 时，$f\left(x\right)$ 取得极小值 $f(-2)=-\frac{1}{e^{2}}$，

作出 $f\left(x\right)$ 的图象如图：



由图象可知当 $0<f\left(x\right)\le 1$ 时，有三个不同的 x 与 $f\left(x\right)$ 对应

设 $t=f\left(x\right)$，方程 $[f(x)]^{2}-af(x)+\frac{1}{16}=0$ 有六个不等的实数根

所以 $t^{2}-at+\frac{1}{16}=0$ 在 $t\in\left(0,1\right]$ 内有两个不等的实根

设 $g(t)=t^{2}-at+\frac{1}{16}$，即 $\begin{cases} g(0)>0 \\ g(1)\ge 0 \\ \Delta>0 \\ 0<\frac{a}{2}<1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \frac{1}{16}>0 \\ 1-a+\frac{1}{16}\ge 0 \\ a^{2}-4\times\frac{1}{16}>0 \\ 0<\frac{a}{2}<1 \end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}<a\le\frac{17}{16}$，则实数 a 可取的值可能是 $\frac{2}{3}$，1

故选：BC．

13.【解析】因为 $f(x)=\begin{cases} x^{2},x<0 \\ 2^{x}-2,x\geqslant 0 \end{cases}$ 所以 $f(-2)=(-2)^{2}=4$，

则 $f(f(-2))=f(4)=2^{4}-2=16-2=14$ ．故答案为：14

14.【解析】因为 x∈**R**，条件 p：$x^2<x$，所以 p 对应的集合为 A＝（0，1）;

因为条件 q：$\frac{1}{x}\geq a$（a＞0），所以 q 对应的集合为 B＝（0，$\frac{1}{a}$];

因为 p 是 q 的充分不必要条件，所以 A⊆B，所以 $1\leqslant\frac{1}{a}$，所以 0＜a≤1，故答案为：(0，1].

15.【解析】因为函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递增，因为 $f(-1)=2^{-1}-\frac{1}{20}(-1)^{2}>0$，

$f\left(-2\right)=2^{-2}-\frac{1}{20}\left(-2\right)^{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}>0$，$f\left(-3\right)=2^{-3}-\frac{1}{20}\left(-3\right)^{2}=\frac{1}{8}-\frac{9}{20}<0$，所以 $x_{0}\in\left(-3,-2\right)$，所以 $a=-3$.

16.【解析】$\frac{a_1+a_2+a_4}{b_1+b_2+b_3}=\frac{d+2d+4d}{d+dq+dq^2}=\frac{7}{1+q+q^2}=t(t\in N^*)$

$tq^2+tq+t-7=0$

$\because q>0\therefore q=\frac{-t+\sqrt{-3t^2+28t}}{2t}$

且 $-3t^2+28t\geq 0\therefore 0<t<\frac{28}{3},t\in N^*\ \therefore t=1,2\cdots\cdots 9$

又 q 为有理数 $\therefore -3t^2+28t\geq 0$ 是一个完全平方数

列举可得 $t=1$ 或 $t=4$ 或 $t=7$ 或 $t=9$，则 $q=2$(舍）或 $q=\frac{1}{2}$ 或 $q=0$(舍）或 $q=-\frac{1}{3}$(舍）

$\therefore q=\frac{1}{2}$

四、解答题

17.【解析】若选①，则由正弦定理 $\sqrt{3}\cos C\left(\sin A\cos B+\sin B\cos A\right)=\sin C\sin C$，

$\sqrt{3}\cos C\sin\left(A+B\right)=\sin C\sin C$，$\sqrt{3}=\tan C$，$C=\frac{\pi}{3}$ ……………………………4 分

若选②，则由正弦定理知：

$\sin A\sin\frac{\pi-C}{2}=\sin C\sin A$，$\cos\frac{C}{2}=\sin C=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$，$\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$，$C=\frac{\pi}{3}$ ………4 分

若选③，则有正弦定理知 $\left(b-a\right)^2=c^2-bc$，

$\therefore b^2+a^2-c^2=bc$，由余弦定理知：$\cos C=\frac{1}{2}$，$C=\frac{\pi}{3}$，……………………………4 分

$A+B=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore \sin A\cdot\sin B=\sin A\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=\sin A\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\cdot\cos A+\frac{1}{2}\sin^2 A=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2A+\frac{1}{4}\left(1-\cos 2A\right)=\frac{1}{2}\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{4}$ ……………8 分

$\because A\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$，$\therefore 2A-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$，

所以当 $A=\frac{\pi}{3}$ 时，$\sin A\cdot\sin B$ 的最大值是 $\frac{3}{4}$ ………………… ……………………………10 分

18.【解析】（1）由题意知$2,a_n,S_n$成等差数列，所以$2a_n=2+S_n$ ①，

可得$2a_{n-1}=2+S_{n-1}(n\geq 2)$ ②……………………………………………………2 分

①-②得$a_n=2a_{n-1}(n\geq 2)$，又$2a_1=2+a_1$，$a_1=2$，………………………………4 分

所以数列$\{a_n\}$是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，$\therefore a_n=2^n$………………………6 分

（2）由（1）可得$b_n=n\cdot 2^n$，用错位相减法得：

$T_n=2+2\times 2^2+3\times 2^3+4\times 2^4+\cdots+n\times 2^n$ ①

$2T_n=2^2+2\times 2^3+\cdots+(n-1)\times 2^n+n\times 2^{n+1}$ ②

①-②可得$T_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$……………………12 分

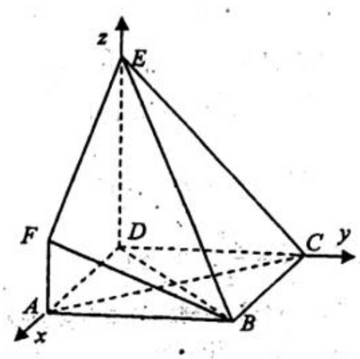
19.【解析】（1）证明：因为$DE\perp$平面$ABCD$，$AC\subset$面$ABCD$,所以$DE\perp AC$.

因为$ABCD$是正方形，所以$AC\perp BD$

又$DE\cap BD=D$，$DE\subset$面BDE，$BD\subset$面BDE,故$AC\perp$平面BDE…………5 分

（2）法 1:【向量法】

因为DA，DC，DE两两垂直，建立空间直角坐标系$D-xyz$如图所示.



因为$ED\perp$平面$ABCD$，且EB与平面$ABCD$所成角为 60°，即$\angle DBE=60°$，

所以$\dfrac{ED}{DB}=\sqrt{3}$.由已知$AD=3$，可得$DE=3\sqrt{6}$，$AF=\sqrt{6}$.

则$A(3,0,0)$，$F(3,0,\sqrt{6})$，$E(0,0,3\sqrt{6})$，$B(3,3,0)$，$C(0,3,0)$，

所以$\overrightarrow{BF}=(0,-3,\sqrt{6})$，$\overrightarrow{EF}=(3,0,-2\sqrt{6})$.

设平面BEF的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-3y+\sqrt{6}z=0\\ 3x-2\sqrt{6}z=0\end{cases}$.

令$z=\sqrt{6}$，则$\vec{n}=(4,2,\sqrt{6})$……………………………………………………9 分

因为 $AC\perp$ 平面 BDE，所以 $\overrightarrow{CA}$ 为平面 BDE 的法向量，$\overrightarrow{CA}=(3,-3,0)$.

所以 $\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{CA}\right\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\vec{n}||\overrightarrow{CA}|}=\dfrac{6}{3\sqrt{2}\times\sqrt{26}}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

因为二面角为锐角，所以二面角 $F-BE-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$……………………………12 分

法 2：【几何法】

如图，G、P 分别为线段 ED、EB 的三等分点，

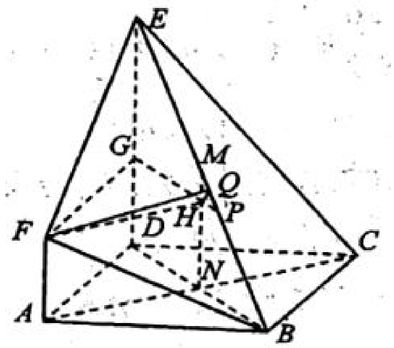
M、N 分别为线段 EB、DB 的中点，

$MN\cap GP=H$，连结 FH，

$AF\parallel NH$，且 $AF=NH$，所以 $FH\parallel AN$，且

所以 $FH\perp$ 面 BDE，

过 F 作 $FQ\perp EB$ 垂足为 Q，连结 HQ



由三垂线定理知，$\angle FQH$ 为二面角 $F-BE-D$ 的平面角. ………………………………8 分

由已知可得 $FH=AN$，所以 $FH=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

因为 $ED\perp$ 平面 $ABCD$，且 EB 与平面 $ABCD$ 所成角为 $60°$，即 $\angle DBE=60°$，

$\triangle PHQ$ 为直角三角形，$\angle QPH=60°$，$HP=\dfrac{1}{4}GP=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $HQ=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，

由勾股定理得 $FQ^2=FH^2+HQ^2$，得 $FQ=\dfrac{\sqrt{78}}{4}$，……………………………………10 分

所以 $\cos\angle FQH=\dfrac{\frac{\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{78}}{4}}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

所以二面角 $F-BE-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$…………………………………………………12 分

20.【解析】(1) ΔAF_1F_2 面积的最大值为 $\sqrt{3}$，则：$bc=\sqrt{3}$

又 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，$a^2=b^2+c^2$，解得：$a^2=4$，$b^2=3$

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ ....4 分

(2) $\dfrac{|PF_1|}{|AB|}$ 为定值 $\dfrac{1}{4}$，设直线 AB: $x=my-1$（$m\neq 0$）

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，线段 AB 的中点为 $N(x_0,y_0)$

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ x=my-1\end{cases}$，消去 x 可得：$(3m^2+4)y^2-6my-9=0$

$\because \Delta>0$ 恒成立　$\therefore y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^2+4}$　　$y_1y_2=-\dfrac{9}{3m^2+4}$ ....6 分

$|AB|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|=\dfrac{12(m^2+1)}{3m^2+4}$

$\therefore x_0=-\dfrac{4}{3m^2+4}$，　$y_0=\dfrac{3m}{3m^2+4}$，　$N(-\dfrac{4}{3m^2+4},\dfrac{3m}{3m^2+4})$ ....8 分

直线 PN：$y-\dfrac{3m}{3m^2+4}=-m\left(x+\dfrac{4}{3m^2+4}\right)$

令 $y=0$，则 $x_p=-\dfrac{1}{3m^2+4}$ ....10 分

$\dfrac{|PF_1|}{|AB|}=\dfrac{-\dfrac{1}{3m^2+4}-(-1)}{\dfrac{12(m^2+1)}{3m^2+4}}=\dfrac{1}{4}$，故 $\dfrac{|PF_1|}{|AB|}$ 为定值 $\dfrac{1}{4}$ ....12 分

21.【解析】(1) X 可能的取值为 1，2，5，－15.

根据题意，有

$P(X=1)=C_3^1\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^1\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{8}$,　　$P(X=2)=C_3^2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^1=\dfrac{3}{8}$,

$P(X=5)=C_3^3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^0=\dfrac{1}{8}$,　　$P(X=-15)=C_3^0\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^0\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$.

所以 X 的分布列为：

X	1	2	5	－15
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

……………………5 分

(2)设“第 i 盘游戏没有出现音乐”为事件 $A_i(i=1，2，3)$，则

$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=P(X=-15)=\frac{1}{8}$.

所以“三盘游戏中至少有一盘出现音乐”的概率为 $1-P(A_1A_2A_3)=1-\left(\frac{1}{8}\right)^3=1-\frac{1}{512}=\frac{511}{512}$.

因此，玩三盘游戏至少有一盘出现音乐的概率是 $\frac{511}{512}$……………………9 分

(3)由(1)知，随机变量 X 的数学期望为 $EX=1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+5\times\frac{1}{8}-15\times\frac{1}{8}=-\frac{1}{8}$.

这表明，获得分数 X 的均值为负．

因此，多次游戏之后分数减少的可能性更大．……………………12 分

22.【解析】(1) $\because f'(x)=2x^2-4x=2x(x-2)$ $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

在 $(0,2)$ 上单减，$f(x)$ 的极大值为 $f(0)=\frac{4}{3}$，$f(x)$ 的极小值为 $f(2)=-\frac{4}{3}$，

又 $f(3)=\frac{4}{3}$，若 $f(x)$ 的最大值是 $\frac{4}{3}$，则 $\begin{cases} a-5\le 0 \\ 0\le a-1\le 3 \end{cases}$，$\therefore 1\le a\le 4$……………4 分

(2) $h(x)=x^3-3x^2-x+3=(x+1)(x-1)(x-3)$，当 $x\le 0$ 时，$g(x)=e^x-ax>0$，

此时 $F(x)=h(x)$ $\therefore F(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 有一个零点，$x_1=-1$……………………6 分

当 $x>0$ 时，$g'(x)=e^x-a$ $\therefore g(x)$ 在 $(0,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增。又 $a\ge e^3$ $\therefore \ln a\ge 3$

由于 $g(0)=1>0, g(1)=e-a<0$ $\therefore F(x)$ 在 $(0,1)$ 上有一个零点 x_2……………8 分

又 $g(\ln a)=a(1-\ln a)<0$，令 $k(x)=x-\ln x(x\ge e^3), k'(x)=\frac{x-1}{}>0$

$\therefore k(x)$ 在 $[e^3,+\infty)$ 上单增，$k(x)=x-\ln x\ge k(e^3)=e^3-3>0$，

$\therefore a>\ln a, g(a)=e^a-a^2$，再令 $\varphi(x)=e^x-x^2(x\ge 2), \varphi'(x)=e^x-2x, \varphi''(x)=e^x-2>0$

$\therefore \varphi'(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，从而 $\varphi'(x)>\varphi'(2)=e^2-4>0$

$\therefore \varphi(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，$\varphi(x)>\varphi(2)=e^2-4>0$ 从而 $g(a)>0$

$\therefore F(x)$ 在 $(\ln a,a)$ 上有一个零点 x_3，

综上所述：当 $a\ge e^3$ 时，$F(x)$ 有三个零点：$x_1=-1, 0<x_2<1, \ln a<x_3<a$……12 分

（注：x_2, x_3 的范围只要表示合理，酌情给分）