2020 年清华大学强基计划笔试试题

1. 已知实数x,y满足$x^2+y^2\leq 1$，则x^2+xy-y^2的最大值为___________。

A. 1　　B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{10}}{3}$　　D. $\sqrt{2}$

2. 设a,b,c均为正实数，若一元二次方程$ax^2+bx+c=0$有实根，则___________。

A. $\max\{a,b,c\}\geq\frac{1}{2}(a+b+c)$　　B. $\max\{a,b,c\}\geq\frac{4}{9}(a+b+c)$

C. $\min\{a,b,c\}\leq\frac{1}{4}(a+b+c)$　　D. $\min\{a,b,c\}\leq\frac{1}{3}(a+b+c)$

3. 已知平面向量a,b满足$|a|\leq 2,|b|\leq 1$，且c满足$|a-2b-c|\leq|a+2b|$. 那么对所有可能的c而言，$|c|$的___________。

A. 最大值为$4\sqrt{2}$　　B. 最大值为$2\sqrt{6}$

C. 最小值为 0　　D. 最小值为$\sqrt{2}$

4. 在ΔABC中，$AC=1$，$BC=\sqrt{3}$，$AB=2$. M为AB中点。将ΔABC沿CM折起，使得$B-ACM$的体积为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，则折起后AB的长度可能为___________。

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

5. 已知$A(1,1),Q(1,0)$，P为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$上的动点，则$|PA|+|PQ|$的_________。

A. 最大值为$4+\sqrt{3}$　　B. 最大值为$4+\sqrt{5}$

C. 最小值为$4-\sqrt{3}$　　D. 最小值为$4-\sqrt{5}$

6. 已知A,B分别为双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$的左、右顶点，P为该双曲线上不同于A,B的任意一点。设$\angle PAB=\alpha,\angle PBA=\beta$，$\Delta PAB$的面积为$S$，则___________。

A. $\tan\alpha\tan\beta$为定值　　B. $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}$为定值

C. $S\cdot\tan(\alpha+\beta)$为定值　　D. $S\cdot\cot(\alpha+\beta)$为定值

7. 设正四棱锥的侧棱与底面所成角为α，相邻两侧面所成角为β，则___________。

A. $\cos\beta=\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha-2}$　　B. $\cos\beta=\frac{\cos^2\alpha-1}{\cos^2\alpha+1}$

C. $\tan\frac{\beta}{2}=\sin\alpha$　　D. $\cot\frac{\beta}{2}=\sin\alpha$

8. 已知复数z_1,z_2在复平面内对应的点为Z_1,Z_2. O为坐标原点，若$|z_1|=1$，$5z_1^2-2z_1z_2+z_2^2=0$，则ΔOZ_1Z_2的面积为___________。

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{3}$

9. 在非等边ΔABC中，$AC=BC$. 点O,P分别为ΔABC的外心和内心。点D在边BC上，且$OD\perp BP$，则__________。

A. $OP>DP$　　B. $OP<DP$

C. $OP//AC$　　D. B,O,P,D四点共圆

10. 使得$n\sin 1>1+5\cos 1$成立的最小正整数n的值为__________。

A. 3　B. 4　C. 5　D. 6

11. 已知实数x,y,z满足$\begin{cases}\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}y^2-y=1,\\ \frac{1}{9}y^3-\frac{1}{3}z^2-z=1,\\ \frac{1}{9}z^3-\frac{1}{3}x^2-x=1.\end{cases}$则__________。

A. (x,y,z)只有 1 组　　B. (x,y,z)有 4 组

C. x,y,z均为有理数　　D. x,y,z均为无理数

12. 设实数$x_1,x_2,\dots,x_{21}$满足$0\le x_i\le 1(i=1,2,\dots,21)$，则$\sum_{i=1}^{21}\sum_{k=1}^{21}|x_i-x_k|$的最大值为__________。

A. 110　B. 120　C. 220　D. 240

13. 在平面直角坐标系中，横坐标与纵坐标都是整数的点称为格点。所有顶点都是格点的多边形称为格点多边形。若一个格点多边形内部有 8 个格点，边界上有 10 个格点，则这个格点多边形的面积为__________。

A. 10　B. 11　C. 12　D. 13

14. 甲、乙、丙三位同学讨论一道数学题。甲说：“我做错了”，乙说：“甲做对了”，丙说：“我做错了”。老师看过他们的答案并听了他们的上述对话后说：“你们只有一个人做对了，只有一个人说错了。”则根据以上信息可以推断出________。

A. 甲做对了　　B. 乙做对了

C. 丙做对了　　D. 无法确定谁做对了

15. 设复数z满足$|3z-7i|=3$，令$z_1=\frac{z^2-2z+2}{z-1+i}$，则$|z_1|$的__________。

A. 最大值为$\frac{8}{3}$　　B. 最大值为$\frac{7}{3}$

C. 最小值为$\frac{4}{3}$　　D. 最小值为$\frac{2}{3}$

16. 在ΔABC中，$\angle A=90^\circ$，$AB=1$，$AC=\sqrt{3}$. 点P满足$\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|}+\frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}+\frac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|}=\vec{0}$，则__________。

A. $\angle APC=120^\circ$　　B. $\angle APB=120^\circ$

C. $|PB|=2|PA|$　　D. $|PC|=2|PB|$

17. 设α,β为锐角，且$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$，则$\tan\alpha$的最大值为__________。

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　C. 1　D. $\sqrt{2}$

18. 设袋中装有编号从 0 到 9 的 10 个球，随机从中抽取 5 个球，然后排成一行，构成的数（0 在首位时看成 4 位数）能被 396 整除的概率是__________。

A. $\frac{1}{240}$　B. $\frac{1}{280}$　C. $\frac{1}{315}$　D. $\frac{1}{360}$

19. 设函数$f(x)=e^x+a(x-1)+b$在区间$[1,3]$上存在零点，则a^2+b^2的最小值为__________。

A. $\frac{e}{2}$ B. e C. $\frac{e^2}{2}$ D. e^2

20. 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n. 若数列$\{a_n\}$满足：对任意$n\in\mathbb{N}^*$，存在$m\in\mathbb{N}^*$，使得$S_n=a_m$，则称数列$\{a_n\}$为T数列。下列命题中，正确的有__________。

A. 若$a_n=\begin{cases}1, n=1\\ 2^{n-2}, n\geq 2\end{cases}$，则$\{a_n\}$为$T$数列；

B. 若$a_n=na$（其中a为常数），则$\{a_n\}$为T数列；

C. 若$\{b_n\},\{c_n\}$均为T数列，则$a_n=b_n+c_n$为等差数列；

D. 若$\{a_n\}$为等差数列，则存在两个T数列$\{b_n\},\{c_n\}$，使得$a_n=b_n+c_n$.

21. 设函数$f(x)=\frac{2e^x}{e^x+e^{-x}}+\sin x$，在区间$[-2,2]$上的最大值为$M$，最小值为$m$，则__________。

A. $M+m=2$ B. $M+m=1$ C. $M-m=2$ D. $M-m=1$

22. 设A,B分别是x轴、y轴上的动点。若以AB为直径的圆C与直线$2x+y-4=0$相切，则圆C面积的最小值为__________。

A. $\frac{\pi}{5}$ B. $\frac{2\pi}{5}$ C. $\frac{4\pi}{5}$ D. π

23. 已知实数a,b满足$a^3+b^3+3ab=1$，设$a+b$的所有可能取值构成的集合为M，则__________。

A. M为单元素集 B. M为有限集，但不是单元素集

C. M为无限集，且有下界 D. M为无限集，且无下界

24. 设x,y为不同的正整数，给出以下三个结论：

① y^2+2x与x^2+2y不可能同时为完全平方数；

② y^2+4x与x^2+4y不可能同时为完全平方数；

③ y^2+6x与x^2+6y不可能同时为完全平方数。

其中正确结论的个数为__________。

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

25. 设随机变量X的概率分布为$\mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{2^k},(k=1,2,\dots)$，$Y$表示$X$被 3 除的余数。则随机变量$Y$的数学期望为$\mathbb{E}Y=$__________。

A. 1 B. $\frac{8}{7}$ C. $\frac{9}{7}$ D. $\frac{3}{2}$

26. 设数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=(-1)^n a_n+\frac{1}{2^n}+n-3$，且实数$t$满足$(t-a_{n+1})(t-a_n)<0$，则$t$的取值范围是__________。

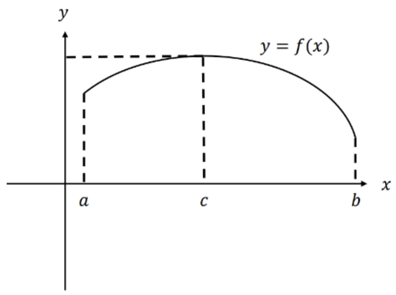
A. $\left(-\frac{3}{4},\frac{11}{4}\right)$ B. $\left(-\frac{3}{4},\frac{11}{5}\right)$ C. $\left(-\frac{3}{5},\frac{11}{4}\right)$ D. $\left(-\frac{3}{5},\frac{11}{5}\right)$

27. 《红楼梦》、《三国演义》、《水浒传》和《西游记》四部书分列在四层架子的书柜的不同层上。小赵、小钱、小孙、小李分别借阅了四部书中的一部。现已知：小钱借阅了第一层的书籍，小赵借阅了第二层的书籍，小孙借阅的是《红楼梦》，《三国演义》在第四层。则__________。

A. 《水浒传》一定陈列在第二层 B. 西游记一定陈列在第一层

C. 小孙借阅的一定是第三层的书籍　　D. 小李借阅的一定是第四层的书籍

28. 已知函数$f(x)$，其图像$y=f(x)$的图像如图所示。设$S(t)(a\le t\le b)$是由曲线$y=f(x)$与直线$x=a,x=t$及x轴围成的平面图形的面积。则在区间$[a,b]$上____________。



28 题图

A. $f'(x)$的最大值是$f'(a)$，最小值是$f'(c)$

B. $f'(x)$的最大值是$f'(c)$，最小值是$f'(b)$

C. $S'(t)$的最大值是$S'(a)$，最小值是$S'(c)$

D. $S'(t)$的最大值是$S'(c)$，最小值是$S'(b)$

29. 已知数列$A: a_0,a_1,\dots,a_{20}$满足$a_0=0,|a_i|=|a_{i-1}+1|(i=1,2,\dots,20)$，则____________。

A. 存在这样的数列A，使得$|a_0+a_1+\cdots+a_{20}|=0$

B. 存在这样的数列A，使得$|a_0+a_1+\cdots+a_{20}|=2$

C. 存在这样的数列A，使得$|a_0+a_1+\cdots+a_{20}|=10$

D. 存在这样的数列A，使得$|a_0+a_1+\cdots+a_{20}|=12$

30. 求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{2}{k^2}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

A. $\frac{3\pi}{4}$　　B. π　　C. $\frac{4\pi}{5}$　　D. $\frac{3\pi}{2}$

31. 设多项式$f(x)$的各项系数都是非负实数，且$f(1)=f'(1)=f''(1)=f'''(1)=1$. 则$f(x)$的常数项的最小值为____________。

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{5}$

32. $\sin\left(\arctan 1+\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}+\arccos\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)=$____________。

A. 1　　B. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$　　C. $\frac{3\sqrt{2}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

33. 设A,B,C是集合$\{1,2,\dots,2020\}$的子集，且满足$A\subseteq C,B\subseteq C$. 这样的有序组$(A,B,C)$的总数为____________。

A. 3^{2020}　　B. 4^{2020}　　C. 5^{2020}　　D. 6^{2020}

34. 设ΔABC的边长为a,b,c，且均为整数。若ΔABC的面积为有理数，那么a的值可以为____________。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

35. 已知$f(z)=z^{10}+\frac{1}{z^{10}}+\frac{1}{2}\left(z^{5}+\frac{1}{z^{5}}\right)$，则__________。

A. $f(z)=0$存在实数解
B. $f(z)=0$共有 20 个不同的复数解
C. $f(z)=0$复数解的模长均为 1
D. $f(z)=0$存在模长大于 1 的复数解