绝密★启用前

2020年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷）

数学Ⅰ

注意事项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

1．本试卷共4页，均为非选择题(第1题~第20题，共20题)。本卷满分为160分，考试时间为120分钟。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回.

2．答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用0.5毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置.

3．请认真核对监考员从答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符.

4．作答试题，必须用0.5毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效.

5．如需作图，须用2B铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗.

参考公式：

柱体的体积$V=Sh$，其中S是柱体的底面积，h是柱体的高.

一、填空题：本大题共14小题，每小题5分，共计70分．请把答案填写在答题卡相应位置上.

1.已知集合$A=\{-1,0,1,2\},B=\{0,2,3\}$，则$A\bigcap B=$_____.

【答案】$\{0,2\}$

【解析】

【分析】

根据集合的交集即可计算.

【详解】∵$A=\{-1,0,1,2\},B=\{0,2,3\}$

∴$A\cap B=\{0,2\}$

故答案为：$\{0,2\}$.

【点睛】本题考查了交集及其运算，是基础题型.

2.已知i是虚数单位，则复数$z=(1+i)(2-i)$的实部是_____.

【答案】3

【解析】

【分析】

根据复数的运算法则，化简即可求得实部的值.

【详解】∵复数 $z=(1+i)(2-i)$

∴ $z=2-i+2i-i^2=3+i$

∴复数的实部为 3.

故答案为：3.

【点睛】本题考查复数的基本概念，是基础题.

3.已知一组数据 $4,2a,3-a,5,6$ 的平均数为 4，则 a 的值是_____.

【答案】2

【解析】

【分析】

根据平均数的公式进行求解即可.

【详解】∵数据 $4,2a,3-a,5,6$ 的平均数为 4

∴ $4+2a+3-a+5+6=20$，即 $a=2$.

故答案为：2.

【点睛】本题主要考查平均数的计算和应用，比较基础.

4.将一颗质地均匀的正方体骰子先后抛掷 2 次，观察向上的点数，则点数和为 5 的概率是_____.

【答案】$\frac{1}{9}$

【解析】

【分析】

分别求出基本事件总数，点数和为 5 的种数，再根据概率公式解答即可.

【详解】根据题意可得基本事件数总为 $6\times6=36$ 个.

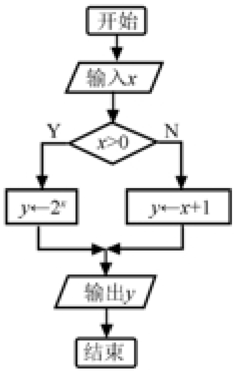
点数和为 5 的基本事件有 $(1,4)$，$(4,1)$，$(2,3)$，$(3,2)$ 共 4 个.

∴出现向上的点数和为 5 的概率为 $P=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

故答案为：$\frac{1}{9}$.

【点睛】本题考查概率的求法，考查古典概型、列举法等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

5.如图是一个算法流程图，若输出 y 的值为 -2，则输入 x 的值是_____.



【答案】-3

【解析】

【分析】

根据指数函数的性质，判断出 $y=x+1$，由此求得 x 的值.

【详解】由于 $2^x>0$，所以 $y=x+1=-2$，解得 $x=-3$.

故答案为：-3

【点睛】本小题主要考查根据程序框图输出结果求输入值，考查指数函数的性质，属于基础题.

6.在平面直角坐标系 xOy 中，若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{5}=1(a>0)$的一条渐近线方程为 $y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$，则该双曲线的离心率是____.

【答案】$\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】

根据渐近线方程求得 a，由此求得 c，进而求得双曲线的离心率.

【详解】双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{5}=1$，故 $b=\sqrt{5}$. 由于双曲线的一条渐近线方程为 $y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$，即 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}\Rightarrow a=2$，所以 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+5}=3$，所以双曲线的离心率为 $\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$.

故答案为：$\frac{3}{2}$

【点睛】本小题主要考查双曲线的渐近线，考查双曲线离心率的求法，属于基础题.

7.已知 $y=f(x)$是奇函数，当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=x^{\frac{2}{3}}$，则 $f(-8)$的值是____.

【答案】-4

【解析】

【分析】

先求 $f(8)$，再根据奇函数求 $f(-8)$

【详解】$f(8)=8^{\frac{2}{3}}=4$，因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-8)=-f(8)=-4$

故答案为：-4

【点睛】本题考查根据奇函数性质求函数值，考查基本分析求解能力，属基础题.

8.已知 $\sin^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{2}{3}$，则 $\sin 2\alpha$ 的值是____.

【答案】$\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】

直接按照两角和正弦公式展开，再平方即得结果.

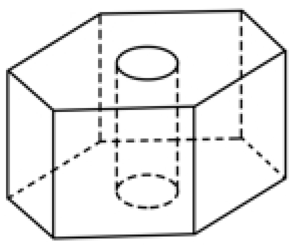
【详解】$\because \sin^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)=(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha)^2=\frac{1}{2}(1+\sin 2\alpha)$

$\therefore \frac{1}{2}(1+\sin 2\alpha)=\frac{2}{3}\therefore \sin 2\alpha=\frac{1}{3}$

故答案为：$\frac{1}{3}$

【点睛】本题考查两角和正弦公式、二倍角正弦公式，考查基本分析求解能力，属基础题.

9.如图，六角螺帽毛坯是由一个正六棱柱挖去一个圆柱所构成的．已知螺帽的底面正六边形边长为 2 cm，高为 2 cm，内孔半轻为 0.5 cm，则此六角螺帽毛坯的体积是____cm.



【答案】$12\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$

【解析】

【分析】

先求正六棱柱体积，再求圆柱体积，相减得结果.

【详解】正六棱柱体积为 $6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\times 2=12\sqrt{3}$

圆柱体积为$\pi(\frac{1}{2})^2\cdot 2=\frac{\pi}{2}$

所求几何体体积为$12\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$

故答案为： $12\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$

【点睛】本题考查正六棱柱体积、圆柱体积，考查基本分析求解能力，属基础题.

10.将函数 $y=3\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，则平移后的图象中与 y 轴最近的对称轴的方程是____.

【答案】 $x=-\frac{5\pi}{24}$

【解析】

【分析】

先根据图象变换得解析式，再求对称轴方程，最后确定结果.

【详解】 $y=3\sin[2(x-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{4}]=3\sin(2x-\frac{\pi}{12})$

$2x-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)\therefore x=\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$

当$k=-1$时 $x=-\frac{5\pi}{24}$

故答案为： $x=-\frac{5\pi}{24}$

【点睛】本题考查三角函数图象变换、正弦函数对称轴，考查基本分析求解能力，属基础题.

11.设$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列，$\{b_n\}$是公比为 q 的等比数列．已知数列$\{a_n+b_n\}$的前 n 项和

$S_n=n^2-n+2^n-1(n\in\mathbf{N}^+)$，则 $d+q$ 的值是_______.

【答案】 4

【解析】

【分析】

结合等差数列和等比数列前n项和公式的特点，分别求得$\{a_n\},\{b_n\}$的公差和公比，由此求得$d+q$.

【详解】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，等比数列$\{b_n\}$的公比为q，根据题意$q\neq 1$.

等差数列$\{a_n\}$的前n项和公式为$P_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$，

等比数列$\{b_n\}$的前n项和公式为$Q_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=-\frac{b_1}{1-q}q^n+\frac{b_1}{1-q}$，

依题意 $S_n=P_n+Q_n$，即 $n^2-n+2^n-1=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n-\frac{b_1}{1-q}q^n+\frac{b_1}{1-q}$，

通过对比系数可知 $\begin{cases}\frac{d}{2}=1\\ a_1-\frac{d}{2}=-1\\ q=2\\ \frac{b_1}{1-q}=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=2\\ a_1=0\\ q=2\\ b_1=1\end{cases}$，故 $d+q=4$.

故答案为：4

【点睛】本小题主要考查等差数列和等比数列的前 n 项和公式，属于中档题.

12.已知 $5x^2y^2+y^4=1(x,y\in R)$，则 x^2+y^2 的最小值是_______.

【答案】$\frac{4}{5}$

【解析】

【分析】

根据题设条件可得 $x^2=\frac{1-y^4}{5y^2}$，可得 $x^2+y^2=\frac{1-y^4}{5y^2}+y^2=\frac{1}{5y^2}+\frac{4y^2}{5}$，利用基本不等式即可求解.

【详解】$\because 5x^2y^2+y^4=1$

$\therefore y\neq 0$ 且 $x^2=\frac{1-y^4}{5y^2}$

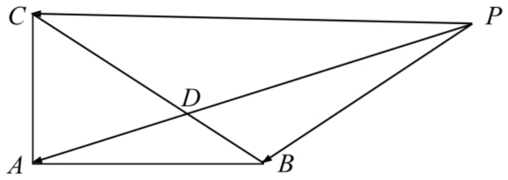
$\therefore x^2+y^2=\frac{1-y^4}{5y^2}+y^2=\frac{1}{5y^2}+\frac{4y^2}{5}\geq 2\sqrt{\frac{1}{5y^2}\cdot\frac{4y^2}{5}}=\frac{4}{5}$，当且仅当 $\frac{1}{5y^2}=\frac{4y^2}{5}$，即 $x^2=\frac{3}{10},y^2=\frac{1}{2}$ 时取等号.

$\therefore x^2+y^2$ 的最小值为 $\frac{4}{5}$.

故答案为：$\frac{4}{5}$.

【点睛】本题考查了基本不等式在求最值中的应用.利用基本不等式求最值时，一定要正确理解和掌握‘一正，二定，三相等”的内涵：一正是，首先要判断参数是否为正；二定是，其次要看和或积是否为定值（和定积最大，积定和最小)；三相等是，最后一定要验证等号能否成立（主要注意两点，一是相等时参数否在定义域内，二是多次用 $\geq$ 或 $\leq$ 时等号能否同时成立）.

13.在△ABC 中，$AB=4$，$AC=3$，$\angle BAC=90°$，D 在边 BC 上，延长 AD 到 P，使得 $AP=9$，若 $\overrightarrow{PA}=m\overrightarrow{PB}+(\frac{3}{2}-m)\overrightarrow{PC}$（$m$ 为常数），则 CD 的长度是________.



【答案】$\dfrac{18}{5}$

【解析】

【分析】

根据题设条件可设 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PD}(\lambda>0)$，结合 $\overrightarrow{PA}=m\overrightarrow{PB}+\left(\dfrac{3}{2}-m\right)\overrightarrow{PC}$ 与 B,D,C 三点共线，可求得 λ，再根据勾股定理求出 BC，然后根据余弦定理即可求解.

【详解】∵ A,D,P 三点共线，

∴可设 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PD}(\lambda>0)$，

∵ $\overrightarrow{PA}=m\overrightarrow{PB}+\left(\dfrac{3}{2}-m\right)\overrightarrow{PC}$，

∴ $\lambda\overrightarrow{PD}=m\overrightarrow{PB}+\left(\dfrac{3}{2}-m\right)\overrightarrow{PC}$，即 $\overrightarrow{PD}=\dfrac{m}{\lambda}\overrightarrow{PB}+\dfrac{\left(\dfrac{3}{2}-m\right)}{\lambda}\overrightarrow{PC}$，

若 $m\neq 0$ 且 $m\neq\dfrac{3}{2}$，则 B,D,C 三点共线，

∴ $\dfrac{m}{\lambda}+\dfrac{\left(\dfrac{3}{2}-m\right)}{\lambda}=1$，即 $\lambda=\dfrac{3}{2}$，

∵ $AP=9$，∴ $AD=3$，

∵ $AB=4$，$AC=3$，$\angle BAC=90^\circ$，

∴ $BC=5$，

设 $CD=x$，$\angle CDA=\theta$，则 $BD=5-x$，$\angle BDA=\pi-\theta$.

∴根据余弦定理可得 $\cos\theta=\dfrac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}=\dfrac{x}{6}$，$\cos(\pi-\theta)=\dfrac{AD^2+BD^2-AB^2}{2AD\cdot BD}=\dfrac{(5-x)^2-7}{6(5-x)}$，

∵ $\cos\theta+\cos(\pi-\theta)=0$，

∴ $\dfrac{x}{6}+\dfrac{(5-x)^2-7}{6(5-x)}=0$，解得 $x=\dfrac{18}{5}$，

∴ CD 的长度为 $\dfrac{18}{5}$.

当 $m=0$ 时，$\overrightarrow{PA}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{PC}$，$C,D$ 重合，此时 CD 的长度为 0，

当 $m=\frac{3}{2}$ 时，$\overrightarrow{PA}=\frac{3}{2}\overrightarrow{PB}$，$B,D$ 重合，此时 $PA=12$，不合题意，舍去.

故答案为：0 或 $\frac{18}{5}$.

【点睛】本题考查了平面向量知识的应用、余弦定理的应用以及求解运算能力，解答本题的关键是设出 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PD}(\lambda>0)$.

14.在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $P(\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，A，B 是圆 C：$x^2+(y-\frac{1}{2})^2=36$ 上的两个动点，满足 $PA=PB$，则△PAB 面积的最大值是__________.

【答案】$10\sqrt{5}$

【解析】

【分析】

根据条件得 $PC\perp AB$,再用圆心到直线距离表示三角形 PAB 面积，最后利用导数求最大值.

【详解】$\because PA=PB\therefore PC\perp AB$

设圆心 C 到直线 AB 距离为 d，则 $|AB|=2\sqrt{36-d^2},|PC|=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$

所以 $S_{\triangle PAB}\le\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{36-d^2}(d+1)=\sqrt{(36-d^2)(d+1)^2}$

令 $y=(36-d^2)(d+1)^2(0\le d<6)\therefore y'=2(d+1)(-2d^2-d+36)=0\therefore d=4$（负值舍去）

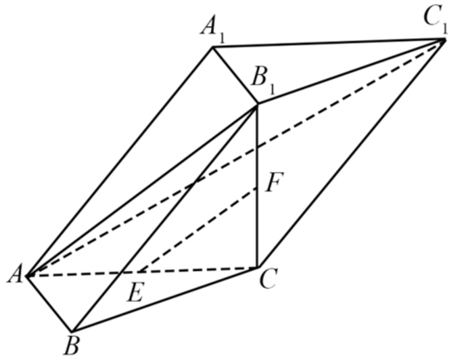
当 $0\le d<4$ 时，$y'>0$；当 $4\le d<6$ 时，$y'\le0$，因此当 $d=4$ 时，y 取最大值，即 $S_{\triangle PAB}$ 取最大值为 $10\sqrt{5}$，

故答案为：$10\sqrt{5}$

【点睛】本题考查垂径定理、利用导数求最值，考查综合分析求解能力，属中档题.

二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分，请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp AC$，$B_1C\perp$平面 ABC，E，F 分别是 AC，B_1C 的中点.



（1）求证：$EF//$ 平面 AB_1C_1；

（2）求证：平面 $AB_1C \perp$ 平面 ABB_1.

【答案】（1）证明详见解析；（2）证明详见解析.

【解析】

【分析】

（1）通过证明 $EF//AB_1$，来证得 $EF//$ 平面 AB_1C_1.

（2）通过证明 $AB \perp$ 平面 AB_1C，来证得平面 $AB_1C \perp$ 平面 ABB_1.

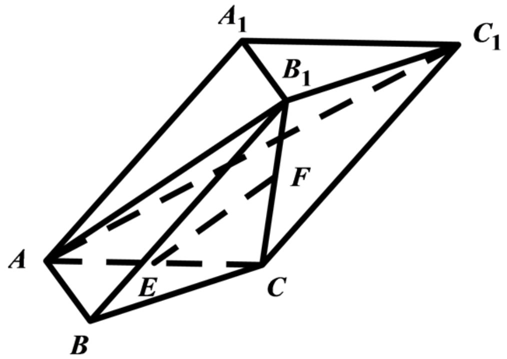
【详解】（1）由于 E,F 分别是 AC,B_1C 的中点，所以 $EF//AB_1$.

由于 $EF \not\subset$ 平面 AB_1C_1，$AB_1 \subset$ 平面 AB_1C_1，所以 $EF//$ 平面 AB_1C_1.

（2）由于 $B_1C \perp$ 平面 ABC，ABÌ 平面 ABC，所以 $B_1C \perp AB$.

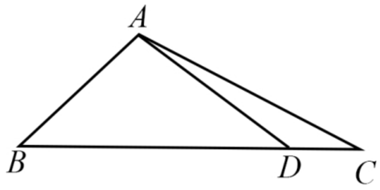
由于 $AB \perp AC, AC \cap B_1C = C$，所以 $AB \perp$ 平面 AB_1C，

由于 ABÌ 平面 ABB_1，所以平面 $AB_1C \perp$ 平面 ABB_1.



【点睛】本小题主要考查线面平行的证明，考查面面垂直的证明，属于中档题.

16.在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $a=3, c=\sqrt{2}, B=45°$.



（1）求 $\sin C$ 的值；

（2）在边 BC 上取一点 D，使得 $\cos\angle ADC=-\frac{4}{5}$，求 $\tan\angle DAC$ 的值.

【答案】（1）$\sin C=\frac{\sqrt{5}}{5}$；（2）$\tan\angle DAC=\frac{2}{11}$.

【解析】

【分析】

（1）利用余弦定理求得 b，利用正弦定理求得 $\sin C$.

（2）根据 $\cos\angle ADC$ 的值，求得 $\sin\angle ADC$ 的值，由（1）求得 $\cos C$ 的值，从而求得 $\sin\angle DAC,\cos\angle DAC$ 的值，进而求得 $\tan\angle DAC$ 的值.

【详解】（1）由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=9+2-2\times3\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=5$，所以 $b=\sqrt{5}$.

由正弦定理得 $\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

（2）由于 $\cos\angle ADC=-\frac{4}{5}$，$\angle ADC\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\sin\angle ADC=\sqrt{1-\cos^2\angle ADC}=\frac{3}{5}$.

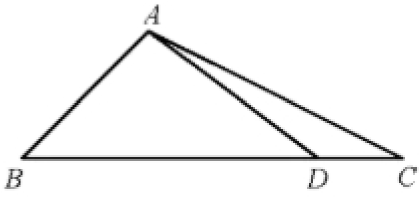
由于 $\angle ADC\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

所以 $\sin\angle DAC=\sin\left(\pi-\angle DAC\right)=\sin\left(\angle ADC+\angle C\right)$

$=\sin\angle ADC\cdot\cos C+\cos\angle ADC\cdot\sin C=\frac{3}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}+\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{25}$.

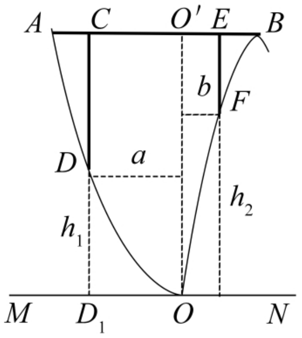
由于 $\angle DAC\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos\angle DAC=\sqrt{1-\sin^2\angle DAC}=\frac{11\sqrt{5}}{25}$.

所以 $\tan\angle DAC=\frac{\sin\angle DAC}{\cos\angle DAC}=\frac{2}{11}$.



【点睛】本小题主要考查正弦定理、余弦定理解三角形，考查三角恒等变换，属于中档题.

17.某地准备在山谷中建一座桥梁，桥址位置的竖直截面图如图所示：谷底 O 在水平线 MN 上、桥 AB 与 MN 平行，OO' 为铅垂线(O' 在 AB 上).经测量，左侧曲线 AO 上任一点 D 到 MN 的距离 h_1(米)与 D 到 OO' 的距离 a(米)之间满足关系式 $h_1=\frac{1}{40}a^2$；右侧曲线 BO 上任一点 F 到 MN 的距离 h_2(米)与 F 到 OO' 的距离 b(米)之间满足关系式 $h_2=-\frac{1}{800}b^3+6b$.已知点 B 到 OO' 的距离为 40 米.



（1）求桥 AB 的长度；

（2）计划在谷底两侧建造平行于 OO' 的桥墩 CD 和 EF，且 CE 为 80 米，其中 C，E 在 AB 上(不包括端点).桥墩 EF 每米造价 k(万元)、桥墩 CD 每米造价 $\frac{3}{2}k$(万元)(k>0).问 $O'E$ 为多少米时，桥墩 CD 与 EF 的总造价最低?

【答案】（1）120 米（2）$O'E=20$ 米

【解析】

【分析】

（1）根据 A,B 高度一致列方程求得结果；

（2）根据题意列总造价的函数关系式，利用导数求最值，即得结果.

【详解】（1）由题意得 $\frac{1}{40}|O'A|^2=-\frac{1}{800}\times 40^3+6\times 40\ \therefore |O'A|=80$

$\therefore |AB|=|O'A|+|O'B|=80+40=120$ 米

（2）设总造价为 $f(x)$ 万元，$|O'O|=\frac{1}{40}\times 80^2=160$，设 $|O'E|=x$，

$f(x)=k(160+\frac{1}{800}x^3-6x)+\frac{3}{2}k[160-\frac{1}{40}(80-x)^2],(0<x<40)$

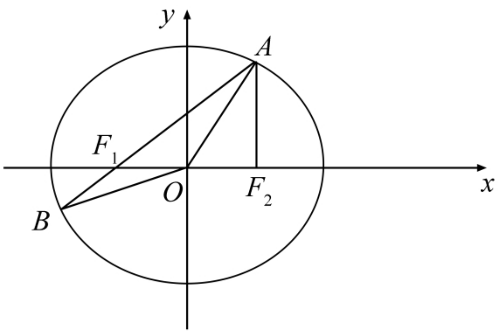
$\therefore f(x)=k(160+\frac{1}{800}x^3-\frac{3}{80}x^2),\therefore f'(x)=k(\frac{3}{800}x^2-\frac{6}{80}x)=0 \therefore x=20$ (0 舍去)

当 $0<x<20$ 时，$f'(x)<0$；当 $20<x<40$ 时，$f'(x)>0$，因此当 $x=20$ 时，$f(x)$ 取最小值，

答：当 $O'E=20$ 米时，桥墩 CD 与 EF 的总造价最低.

【点睛】本题考查实际成本问题、利用导数求最值，考查基本分析求解能力，属中档题.

18.在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $E:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 A 在椭圆 E 上且在第一象限内，$AF_2\perp F_1F_2$，直线 AF_1 与椭圆 E 相交于另一点 B.



（1）求$\triangle AF_1F_2$的周长；

（2）在 x 轴上任取一点 P，直线 AP 与椭圆 E 的右准线相交于点 Q，求 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{QP}$ 的最小值；

（3）设点 M 在椭圆 E 上，记$\triangle OAB$ 与$\triangle MAB$ 的面积分别为 S_1，S_2，若 $S_2=3S_1$，求点 M 的坐标.

【答案】（1）6；（2）-4；（3）$M(2,0)$ 或 $\left(-\frac{2}{7},-\frac{12}{7}\right)$.

【解析】

【分析】

（1）根据椭圆定义可得 $AF_1+AF_2=4$，从而可求出$\triangle AF_1F_2$的周长；

（2）设 $P(x_0,0)$，根据点 A 在椭圆 E 上，且在第一象限，$AF_2\perp F_1F_2$，求出 $A\left(1,\frac{3}{2}\right)$，根据准线方程得 Q 点坐标，再根据向量坐标公式，结合二次函数性质即可出最小值；

（3）设出设 $M(x_1,y_1)$，点 M 到直线 AB 的距离为 d，由点 O 到直线 AB 的距离与 $S_2=3S_1$，可推出 $d=\frac{9}{5}$，根据点到直线的距离公式，以及 $M(x_1,y_1)$ 满足椭圆方程，解方程组即可求得坐标.

【详解】（1）∵椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

$\therefore F_1(-1,0), F_2(1,0)$

由椭圆定义可得：$AF_1+AF_2=4$.

$\therefore \triangle AF_1F_2$的周长为$4+2=6$

（2）设$P(x_0,0)$，根据题意可得$x_0\neq 1$.

$\because$点A在椭圆E上，且在第一象限，$AF_2\perp F_1F_2$

$\therefore A\left(1,\frac{3}{2}\right)$

$\because$准线方程为$x=4$

$\therefore Q(4,y_Q)$

$\therefore \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{QP}=(x_0,0)\cdot(x_0-4,-y_Q)=(x_0-4)x_0=(x_0-2)^2-4\geq -4$，当且仅当$x_0=2$时取等号.

$\therefore \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{QP}$的最小值为$-4$.

（3）设$M(x_1,y_1)$，点M到直线AB的距离为d.

$\because A\left(1,\frac{3}{2}\right)$，$F_1(-1,0)$

$\therefore$直线AF_1的方程为$y=\frac{3}{4}(x+1)$

$\because$点O到直线AB的距离为$\frac{3}{5}$，$S_2=3S_1$

$\therefore S_2=3S_1=3\times\frac{1}{2}\times|AB|\times\frac{3}{5}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d$

$\therefore d=\frac{9}{5}$

$\therefore |3x_1-4y_1+3|=9$ ①

$\because \frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$ ②

$\therefore$联立①②解得$\begin{cases}x_1=2\\y_1=0\end{cases}$，$\begin{cases}x_1=-\frac{2}{7}\\y_1=-\frac{12}{7}\end{cases}$.

$\therefore M(2,0)$ 或 $\left(-\frac{2}{7},-\frac{12}{7}\right)$.

【点睛】本题考查了椭圆的定义，直线与椭圆相交问题、点到直线距离公式的运用，熟悉运用公式以及根据 $S_2=3S_1$ 推出 $d=\frac{9}{5}$ 是解答本题的关键.

19.已知关于 x 的函数 $y=f(x),y=g(x)$ 与 $h(x)=kx+b(k,b\in\mathbf{R})$ 在区间 D 上恒有 $f(x)\geq h(x)\geq g(x)$.

（1）若 $f(x)=x^2+2x$，$g(x)=-x^2+2x$，$D=(-\infty,+\infty)$，求 $h(x)$的表达式；

（2）若 $f(x)=x^2-x+1$，$g(x)=k\ln x$，$h(x)=kx-k,D=(0,+\infty)$，求 k 的取值范围；

（3）若 $f(x)=x^4-2x^2$，$g(x)=4x^2-8$，$h(x)=4\left(t^2-t\right)x-3t^4+2t^2(0<|t|\leqslant\sqrt{2})$, $D=[m,n]\subseteq\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$,求证：$n-m\leq\sqrt{7}$.

【答案】（1）$h(x)=2x$；（2）$k\in[0,3]$；（3）证明详见解析

【解析】

【分析】

（1）求得 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公共点，并求得过该点的公切线方程，由此求得 $h(x)$ 的表达式.

（2）先由 $h(x)-g(x)\geq 0$，求得 k 的一个取值范围，再由 $f(x)-h(x)\geq 0$，求得 k 的另一个取值范围，从而求得 k 的取值范围.

（3）先由 $f(x)\geq h(x)$，求得 $|t|$ 的取值范围，由方程 $g(x)-h(x)=0$ 的两个根，求得 $n-m$ 的表达式，利用导数证得不等式成立.

【详解】（1）由题设有 $-x^2+2x\leq kx+b\leq x^2+2x$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

令 $x=0$，则 $0\leq b\leq 0$，所以 $b=0$.

因此 $kx\leq x^2+2x$ 即 $x^2+(2-k)x\geq 0$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

所以 $\Delta=(2-k)^2\leq 0$，因此 $k=2$.

故 $h(x)=2x$.

（2）令 $F(x)=h(x)-g(x)=k(x-1-\ln x)(x>0)$，$F(1)=0$.

又 $F'(x)=k\cdot\frac{x-1}{x}$.

若$\mathrm{k}<0$，则$F\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上递增，在$\left(1,+\infty\right)$上递减，则$F\left(x\right)\leq F\left(1\right)=0$，即$h\left(x\right)-g\left(x\right)\leq 0$，不符合题意.

当$k=0$时，$F\left(x\right)=h\left(x\right)-g\left(x\right)=0,h\left(x\right)=g\left(x\right)$，符合题意.

当$k>0$时，$F\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上递减，在$\left(1,+\infty\right)$上递增，则$F\left(x\right)\geq F\left(1\right)=0$，

即$h\left(x\right)-g\left(x\right)\geq 0$，符合题意.

综上所述，$k\geq 0$.

由$f\left(x\right)-h\left(x\right)=x^2-x+1-\left(kx-k\right)=x^2-\left(k+1\right)x+\left(k+1\right)\geq 0$

当$x=\dfrac{k+1}{2}<0$，即$k<-1$时，$y=x^2-\left(k+1\right)x+k+1$在$\left(0,+\infty\right)$为增函数，

因为$f\left(0\right)-h\left(0\right)=k+1<0$，

故存在$x_0\in\left(0,+\infty\right)$，使$f\left(x\right)-h\left(x\right)<0$，不符合题意.

当$x=\dfrac{k+1}{2}=0$，即$k=-1$时，$f\left(x\right)-h\left(x\right)=x^2\geq 0$，符合题意.

当$x=\dfrac{k+1}{2}>0$，即$k>-1$时，则需$\Delta=\left(k+1\right)^2-4\left(k+1\right)\leq 0$，解得$-1<k\leq 3$.

综上所述，k的取值范围是$k\in\left[0,3\right]$.

（3）因为$x^4-2x^2\geq 4\left(t^3-t\right)x-3t^4+2t^2\geq 4x^2-8$对任意$x\in[m,n]\subset[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$恒成立，

$x^4-2x^2\geq 4\left(t^3-t\right)x-3t^4+2t^2$对任意$x\in[m,n]\subset[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$恒成立，

等价于$(x-t)^2\left(x^2+2tx+3t^2-2\right)\geq 0$对任意$x\in[m,n]\subset[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$恒成立.

故$x^2+2tx+3t^2-2\geq 0$对任意$x\in[m,n]\subset[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$恒成立.

令$M(x)=x^2+2tx+3t^2-2$，

当$0<t^2<1$，$\Delta=-8t^2+8>0,-1<-t<1$，

此时$n-m\leq\sqrt{2}+\left|t\right|<\sqrt{2}+1<\sqrt{7}$，

当$1\leq t^2\leq 2$，$\Delta=-8t^2+8\leq 0$，

但$4x^2-8\geq 4\left(t^3-t\right)x-3t^4+2t^2$对任意的$x\in[m,n]\subset[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$恒成立.

等价于$4x^2-4\left(t^3-t\right)x+\left(3t^2+4\right)\left(t^2-2\right)\leq 0$对任意的$x\in[m,n]\subset[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$恒成立.

$4x^2-4\left(t^3-t\right)x+\left(3t^2+4\right)\left(t^2-2\right)=0$ 的两根为 x_1,x_2，

则 $x_1+x_2=t^3-t,x_1\cdot x_2=\dfrac{3t^4-2t^2-8}{4}$，

所以 $n-m=\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\sqrt{t^6-5t^4+3t^2+8}$.

令 $t^2=\lambda,\lambda\in\left[1,2\right]$，则 $\left|n-m\right|=\sqrt{\lambda^3-5\lambda^2+3\lambda+8}$.

构造函数 $P\left(\lambda\right)=\lambda^3-5\lambda^2+3\lambda+8\left(\lambda\in\left[1,2\right]\right)$，$P'\left(\lambda\right)=3\lambda^2-10\lambda+3=\left(\lambda-3\right)\left(3\lambda-1\right)$，

所以 $\lambda\in\left[1,2\right]$ 时，$P'\left(\lambda\right)<0$，$P\left(\lambda\right)$ 递减，$P\left(\lambda\right)_{\max}=P\left(1\right)=7$.

所以 $\left(n-m\right)_{\max}=\sqrt{7}$，即 $n-m\leq\sqrt{7}$.

【点睛】本小题主要考查利用的导数求切线方程，考查利用导数研究不等式恒成立问题，考查利用导数证明不等式，考查分类讨论的数学思想方法，属于难题.

20.已知数列 $\left\{a_n\right\}(n\in N^*)$ 的首项 $a_1=1$，前 n 项和为 S_n. 设 λ 与 k 是常数，若对一切正整数 n，均有 $S_{n+1}^{\frac{1}{k}}-S_n^{\frac{1}{k}}=\lambda a_{n+1}^{\frac{1}{k}}$ 成立，则称此数列为“λ–k”数列.

（1）若等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 是“λ–1”数列，求 λ 的值；

（2）若数列 $\left\{a_n\right\}$ 是“$\frac{\sqrt{3}}{3}-2$”数列，且 $a_n>0$，求数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式；

（3）对于给定的 λ，是否存在三个不同的数列 $\left\{a_n\right\}$ 为“λ–3”数列，且 $a_n\geq0$?若存在，求 λ 的取值范围；若不存在，说明理由，

【答案】（1）1

（2）$a_n=\begin{cases}1,n=1\\3\cdot4^{n-2},n\geq2\end{cases}$

（3）$0<\lambda<1$

【解析】

【分析】

（1）根据定义得 $S_{n+1}-S_n=\lambda a_{n+1}$，再根据和项与通项关系化简得 $a_{n+1}=\lambda a_{n+1}$，最后根据数列不为零数列得结果；

（2）根据定义得 $S_{n+1}^{\frac{1}{2}}-S_n^{\frac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(S_{n+1}-S_n)^{\frac{1}{2}}$，根据平方差公式化简得 $S_{n+1}=4S_n$，求得 S_n，即得 a_n；

（3）根据定义得 ${S_{n+1}}^{\frac{1}{3}}-{S_n}^{\frac{1}{3}}=\lambda {a_{n+1}}^{\frac{1}{3}}$，利用立方差公式化简得两个方程，再根据方程解的个数确定参数满足的条件，解得结果

【详解】（1） $S_{n+1}-S_n=\lambda a_{n+1}\therefore a_{n+1}=\lambda a_{n+1}\ \because a_1=1\therefore a_{n+1}\neq 0\therefore \lambda=1$

（2） $\because a_n>0\therefore S_{n+1}>S_n\therefore {S_{n+1}}^{\frac{1}{2}}-{S_n}^{\frac{1}{2}}>0$

$\because {S_{n+1}}^{\frac{1}{2}}-{S_n}^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}(S_{n+1}-S_n)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore ({S_{n+1}}^{\frac{1}{2}}-{S_n}^{\frac{1}{2}})^2=\frac{1}{3}({S_{n+1}}^{\frac{1}{2}}-{S_n}^{\frac{1}{2}})({S_{n+1}}^{\frac{1}{2}}+{S_n}^{\frac{1}{2}})$

$\therefore {S_{n+1}}^{\frac{1}{2}}-{S_n}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}({S_{n+1}}^{\frac{1}{2}}+{S_n}^{\frac{1}{2}})\therefore {S_{n+1}}^{\frac{1}{2}}=2{S_n}^{\frac{1}{2}}\therefore S_{n+1}=4S_n\therefore S_n=4^{n-1}$

$\because S_1=a_1=1$， $S_n=4^{n-1}$

$\therefore a_n=4^{n-1}-4^{n-2}=3\cdot 4^{n-2},n\geq 2$

$$\therefore a_n=\begin{cases}1,n=1\\ 3\cdot 4^{n-2},n\geq 2\end{cases}$$

（3）假设存在三个不同的数列$\{a_n\}$为"$\lambda-3$"数列.

${S_{n+1}}^{\frac{1}{3}}-{S_n}^{\frac{1}{3}}=\lambda {a_{n+1}}^{\frac{1}{3}}\therefore ({S_{n+1}}^{\frac{1}{3}}-{S_n}^{\frac{1}{3}})^3=\lambda^3(S_{n+1}-S_n)$

$\therefore {S_{n+1}}^{\frac{1}{3}}={S_n}^{\frac{1}{3}}$或$({S_{n+1}}^{\frac{1}{3}}-{S_n}^{\frac{1}{3}})^2=\lambda^3({S_{n+1}}^{\frac{2}{3}}+{S_n}^{\frac{2}{3}}+{S_{n+1}}^{\frac{1}{3}}{S_n}^{\frac{1}{3}})$

$\therefore S_{n+1}=S_n$或$(\lambda^3-1){S_{n+1}}^{\frac{2}{3}}+(\lambda^3-1){S_n}^{\frac{2}{3}}+(\lambda^3+2){S_{n+1}}^{\frac{1}{3}}{S_n}^{\frac{1}{3}}=0$

$\because$对于给定的λ，存在三个不同的数列$\{a_n\}$为"$\lambda-3$"数列，且$a_n\geq 0$

$\therefore a_n=\begin{cases}1,n=1\\ 0,n\geq 2\end{cases}$或$(\lambda^3-1){S_{n+1}}^{\frac{2}{3}}+(\lambda^3-1){S_n}^{\frac{2}{3}}+(\lambda^3+2){S_{n+1}}^{\frac{1}{3}}{S_n}^{\frac{1}{3}}=0\left(\lambda\neq 1\right)$有两个不等的正根.

$(\lambda^3-1){S_{n+1}}^{\frac{2}{3}}+(\lambda^3-1){S_n}^{\frac{2}{3}}+(\lambda^3+2){S_{n+1}}^{\frac{1}{3}}{S_n}^{\frac{1}{3}}=0\left(\lambda\neq 1\right)$可转化为

$\frac{(\lambda^3-1){S_{n+1}}^{\frac{2}{3}}}{{S_n}^{\frac{2}{3}}}+(\lambda^3-1)+\frac{(\lambda^3+2){S_{n+1}}^{\frac{1}{3}}}{{S_n}^{\frac{1}{3}}}=0\left(\lambda\neq 1\right)$，不妨设$\left(\frac{S_{n+1}}{S_n}\right)^{\frac{1}{3}}=x\left(x>0\right)$，则

$(\lambda^3-1)x^2+(\lambda^3+2)x+(\lambda^3-1)=0\left(\lambda\neq 1\right)$有两个不等正根，设

$f\left(x\right)=(\lambda^3-1)x^2+(\lambda^3+2)x+(\lambda^3-1)=0\left(\lambda\neq 1\right)$.

① 当$\lambda<1$时，$\Delta=(\lambda^3+2)^2-4(\lambda^3-1)^2>0\Rightarrow 0<\lambda^3<4$，即$0<\lambda<1$，此时$f(0)=\lambda^3-1<0$，

$x_{对}=-\dfrac{(\lambda^3+2)}{2(\lambda^3-1)}>0$，满足题意.

② 当$\lambda>1$时，$\Delta=(\lambda^3+2)^2-4(\lambda^3-1)^2>0\Rightarrow 0<\lambda^3<4$，即$1<\lambda<\sqrt[3]{4}$，此时

$f(0)=\lambda^3-1>0$，$x_{对}=-\dfrac{(\lambda^3+2)}{2(\lambda^3-1)}<0$，此情况有两个不等负根，不满足题意舍去.

综上，$0<\lambda<1$

【点睛】本题考查数列新定义、由和项求通项、一元二次方程实根分步，考查综合分析求解能力，属难题.

数学Ⅱ(附加题)

【选做题】本题包括 A、B、C 三小题，请选定其中两小题，并在相应的答题区域内作答．若多做，则按作答的前两小题评分．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

A．[选修 4-2：矩阵与变换]

21.平面上点$A(2,-1)$在矩阵$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{bmatrix}$对应的变换作用下得到点$B(3,-4)$.

（1）求实数a，b的值；

（2）求矩阵M的逆矩阵M^{-1}.

【答案】（1）$\begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$；（2）$M^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$.

【解析】

【分析】

（1）根据变换写出具体的矩阵关系式，然后进行矩阵的计算可得出实数a,b的值；

（2）设出逆矩阵，由定义得到方程，即可求解.

【详解】（1）∵平面上点$A(2,-1)$在矩阵$M=\begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{bmatrix}$对应的变换作用下得到点$B(3,-4)$

$\therefore \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{cases} 2a-1=3 \\ -2-b=-4 \end{cases}$，解得$\begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$

（2）设 $M^{-1}=\begin{bmatrix} m & n \\ c & d \end{bmatrix}$，则 $MM^{-1}=\begin{bmatrix} 2m+c & 2n+d \\ -m+2c & -n+2d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{cases} 2m+c=1 \\ 2n+d=0 \\ -m+2c=0 \\ -n+2d=1 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} m=\dfrac{2}{5} \\ n=-\dfrac{1}{5} \\ c=\dfrac{1}{5} \\ d=\dfrac{2}{5} \end{cases}$

$\therefore M^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{2}{5} & -\dfrac{1}{5} \\ \dfrac{1}{5} & \dfrac{2}{5} \end{bmatrix}$

【点睛】本题考查矩阵变换的应用，考查逆矩阵的求法，解题时要认真审题，属于基础题.

B．[选修 4-4：坐标系与参数方程]

22.在极坐标系中，已知点 $A(\rho_1,\dfrac{\pi}{3})$ 在直线 $l:\rho\cos\theta=2$ 上，点 $B(\rho_2,\dfrac{\pi}{6})$ 在圆 $C:\rho=4\sin\theta$ 上（其中 $\rho\ge 0$，$0\le\theta<2\pi$）.

（1）求 ρ_1，ρ_2 的值

（2）求出直线 l 与圆 C 的公共点的极坐标.

【答案】（1）$\rho_1=4$，$\rho_2=2$（2）$(2\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4})$

【解析】

【分析】

(1)将 A,B 点坐标代入即得结果；（2）联立直线与圆极坐标方程，解得结果.

【详解】（1）以极点为原点，极轴为 x 轴的正半轴，建立平面直角坐标系，

$\because \rho_1\cos\dfrac{\pi}{3}=2,\therefore \rho_1=4$，

因为点 B 为直线 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 上，故其直角坐标方程为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，

又 $\rho=4\sin\theta$ 对应的圆的直角坐标方程为：$x^2+y^2-4y=0$，

由 $\begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x \\ x^2+y^2-4y=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=1 \end{cases}$，

对应的点为$\left(0,0\right),\left(\sqrt{3},1\right)$，故对应的极径为$\rho_2=0$或$\rho_2=2$.

（2）$\because \rho\cos\theta=2,\rho=4\sin\theta,\therefore 4\sin\theta\cos\theta=2,\therefore \sin 2\theta=1$，

$\because \theta\in[0,2\pi),\therefore \theta=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$，

当$\theta=\frac{\pi}{4}$时$\rho=2\sqrt{2}$；

当$\theta=\frac{5\pi}{4}$时$\rho=-2\sqrt{2}<0$，舍；即所求交点坐标为当$(2\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$,

【点睛】本题考查极坐标方程及其交点，考查基本分析求解能力，属基础题.

C．[选修 4-5：不等式选讲]

23.设$x\in\mathbf{R}$，解不等式$2|x+1|+|x|\le 4$.

【答案】$\left[-2,\frac{2}{3}\right]$

【解析】

【分析】

根据绝对值定义化为三个方程组，解得结果

【详解】$\because\begin{cases}x<-1\\-2x-2-x\le 4\end{cases}$或$\begin{cases}-1\le x\le 0\\2x+2-x\le 4\end{cases}$或$\begin{cases}x>0\\2x+2+x\le 4\end{cases}$

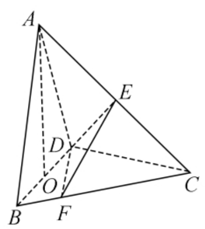
$\therefore -2\le x<-1$或$-1\leqslant x\leqslant 0$或$0<x\le\frac{2}{3}$

所以解集为$\left[-2,\frac{2}{3}\right]$

【点睛】本题考查分类讨论解含绝对值不等式，考查基本分析求解能力，属基础题.

【必做题】第 24 题、第 25 题，每题 10 分，共计 20 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

24.在三棱锥 *A—BCD* 中，已知 *CB*=*CD*=$\sqrt{5}$,*BD*=2，*O* 为 *BD* 的中点，*AO*⊥平面 *BCD*，*AO*=2，*E* 为 *AC* 的中点．



（1）求直线 AB 与 DE 所成角的余弦值；

（2）若点 F 在 BC 上，满足 $BF=\dfrac{1}{4}BC$，设二面角 $F—DE—C$ 的大小为 θ，求 $\sin\theta$ 的值．

【答案】（1）$\dfrac{\sqrt{15}}{15}$ （2）$\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$

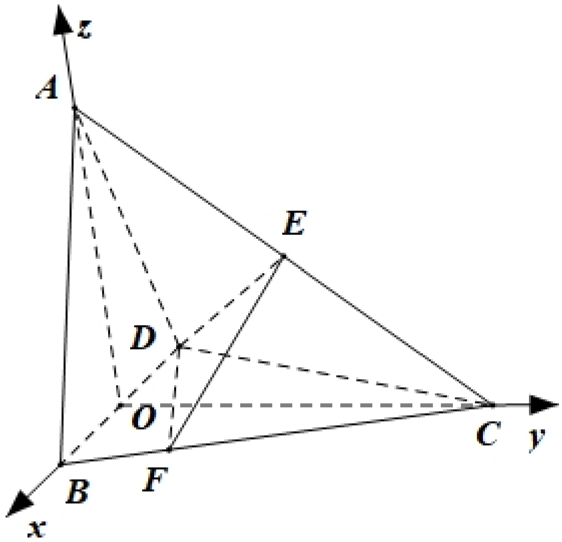
【解析】

【分析】

（1）建立空间直角坐标系，利用向量数量积求直线向量夹角，即得结果；

（2）先求两个平面法向量，根据向量数量积求法向量夹角，最后根据二面角与向量夹角关系得结果.

【详解】



（1）连 CO $\because BC=CD, BO=OD \therefore CO\perp BD$

以 OB,OC,OA 为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，则 $A(0,0,2),B(1,0,0),C(0,2,0),D(-1,0,0)\therefore E(0,1,1)$

$\therefore \overrightarrow{AB}=(1,0,-2),\overrightarrow{DE}=(1,1,1)\therefore \cos<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}>=\dfrac{-1}{\sqrt{5}\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{15}}{15}$

从而直线 AB 与 DE 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{15}$

（2）设平面 DEC 一个法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$,

$\because \overrightarrow{DC}=(1,2,0),\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{DC}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{DE}=0\end{cases}\therefore\begin{cases}x+2y=0\\ x+y+z=0\end{cases}$

令 $y=1\therefore x=-2,z=1\therefore \overrightarrow{n_1}=(-2,1,1)$

设平面 DEF 一个法向量为

关注公众号：数学货

$\vec{n_2}=(x_1,y_1,z_1)$, $\because \overline{DF}=\overline{DB}+\overline{BF}=\overline{DB}+\frac{1}{4}\overline{BC}=(\frac{7}{4},\frac{1}{2},0)$, $\begin{cases}\overline{n_2}\cdot\overline{DF}=0\\ \overline{n_2}\cdot\overline{DE}=0\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}\frac{7}{4}x_1+\frac{1}{2}y_1=0\\ x_1+y_1+z_1=0\end{cases}$

令 $y_1=-7\therefore x_1=2,z_1=5\therefore \vec{n_2}=(2,-7,5)$

$\therefore \cos<\vec{n_1},\vec{n_2}>=\frac{-6}{\sqrt{6}\sqrt{78}}=-\frac{1}{\sqrt{13}}$

因此 $\sin\theta=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{39}}{13}$

【点睛】本题考查利用向量求线线角与二面角，考查基本分析求解能力，属中档题.

25.甲口袋中装有 2 个黑球和 1 个白球，乙口袋中装有 3 个白球．现从甲、乙两口袋中各任取一个球交换放入另一口袋，重复 n 次这样的操作，记甲口袋中黑球个数为 X_n，恰有 2 个黑球的概率为 p_n，恰有 1 个黑球的概率为 q_n.

（1）求 $p_1\cdot q_1$ 和 $p_2\cdot q_2$；

（2）求 $2p_n+q_n$ 与 $2p_{n-1}+q_{n-1}$ 的递推关系式和 X_n 的数学期望 $E(X_n)$(用 n 表示）.

【答案】（1） $p_1=\frac{1}{3},q_1=\frac{2}{3}$； $p_2=\frac{7}{27},q_2=\frac{16}{27}$；（2） $2p_n+q_n=\frac{1}{3}\left(2p_{n-1}+q_{n-1}\right)+\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】

（1）直接根据操作，根据古典概型概率公式可得结果；

（2）根据操作，依次求 p_n， q_n，即得递推关系，构造等比数列求得 $2p_n+q_n$，最后根据数学期望公式求结果.

【详解】（1） $p_1=\frac{1\times3}{3\times3}=\frac{1}{3},q_1=\frac{2\times3}{3\times3}=\frac{2}{3}$，

$p_2=p_1\times\frac{1\times3}{3\times3}+q_1\times\frac{1\times2}{3\times3}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{9}=\frac{7}{27}$，

$q_2=p_1\times\frac{2\times3}{3\times3}+q_1\times\frac{1\times1+2\times2}{3\times3}+0=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{5}{9}=\frac{16}{27}$.

（2） $p_n=p_{n-1}\times\frac{1\times3}{3\times3}+q_{n-1}\times\frac{1\times2}{3\times3}=\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{2}{9}q_{n-1}$，

$q_n=p_{n-1}\times\frac{2\times3}{3\times3}+q_{n-1}\times\frac{1\times1+2\times2}{3\times3}+(1-p_{n-1}-q_{n-1})\times\frac{3\times2}{3\times3}=-\frac{1}{9}q_{n-1}+\frac{2}{3}$，

因此 $2p_n+q_n=\frac{2}{3}p_{n-1}+\frac{1}{3}q_{n-1}+\frac{2}{3}$，

从而 $2p_n+q_n=\frac{1}{3}(2p_{n-1}+q_{n-1})+\frac{2}{3},\therefore 2p_n+q_n-1=\frac{1}{3}(2p_{n-1}+q_{n-1}-1)$，

即 $2p_n+q_n-1=(2p_1+q_1-1)\frac{1}{3^{n-1}}$，$\therefore 2p_n+q_n=1+\frac{1}{3^n}$.

又 X_n 的分布列为

X_n	0	1	2
P	$1-p_n-q_n$	q_n	p_n

故 $E(X_n)=2p_n+q_n=1+\frac{1}{3^n}$.

【点睛】本题考查古典概型概率、概率中递推关系、构造法求数列通项、数学期望公式，考查综合分析求解能力，属难题.