

2020 年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷）

数学 I

注意事项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

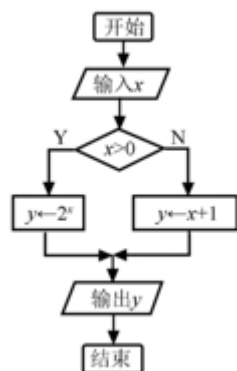
1. 本试卷共 4 页，均为非选择题(第 1 题~第 20 题，共 20 题)。本卷满分为 160 分，考试时间为 120 分钟。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员从答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答试题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

参考公式：

柱体的体积 $V = Sh$ ，其中 S 是柱体的底面积， h 是柱体的高。

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分。请把答案填写在答题卡相应位置上。

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 2, 3\}$ ，则 $A \cap B =$ _____.
2. 已知 i 是虚数单位，则复数 $z = (1 + i)(2 - i)$ 的实部是_____.
3. 已知一组数据 $4, 2a, 3 - a, 5, 6$ 的平均数为 4，则 a 的值是_____.
4. 将一颗质地均匀的正方体骰子先后抛掷 2 次，观察向上的点数，则点数和为 5 的概率是_____.
5. 如图是一个算法流程图，若输出 y 的值为 -2 ，则输入 x 的值是_____.

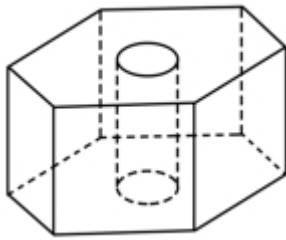


6. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{5} = 1 (a > 0)$ 的一条渐近线方程为 $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$, 则该双曲线的离心率是_____.

7. 已知 $y=f(x)$ 是奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, 则 $f(-8)$ 的值是_____.

8. 已知 $\sin^2(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \frac{2}{3}$, 则 $\sin 2\alpha$ 的值是_____.

9. 如图, 六角螺帽毛坯是由一个正六棱柱挖去一个圆柱所构成的. 已知螺帽的底面正六边形边长为 2 cm, 高为 2 cm, 内孔半径为 0.5 cm, 则此六角螺帽毛坯的体积是_____cm³.

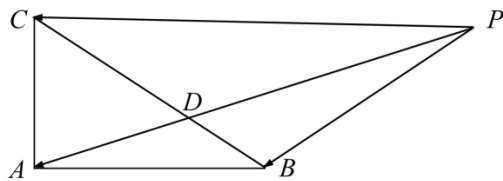


10. 将函数 $y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 则平移后的图象中与 y 轴最近的对称轴的方程是_____.

11. 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, $\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列. 已知数列 $\{a_n + b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 - n + 2^n - 1 (n \in \mathbb{N}^+)$, 则 $d+q$ 的值是_____.

12. 已知 $5x^2y^2 + y^4 = 1 (x, y \in \mathbb{R})$, 则 $x^2 + y^2$ 的最小值是_____.

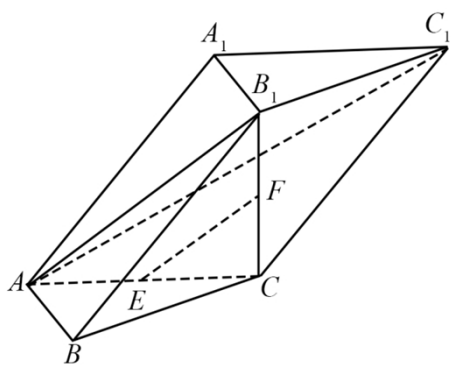
13. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 4$, $AC = 3$, $\angle BAC = 90^\circ$, D 在边 BC 上, 延长 AD 到 P , 使得 $AP = 9$, 若 $\overrightarrow{PA} = m\overrightarrow{PB} + (\frac{3}{2} - m)\overrightarrow{PC}$ (m 为常数), 则 CD 的长度是_____.



14. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 $P(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, A, B 是圆 $C: x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 36$ 上的两个动点, 满足 $PA = PB$, 则 $\triangle PAB$ 面积的最大值是_____.

二、解答题: 本大题共 6 小题, 共计 90 分, 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

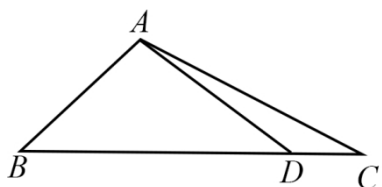
15. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp AC$, $B_1C \perp$ 平面 ABC , E, F 分别是 AC, B_1C 的中点.



(1) 求证: $EF \parallel$ 平面 AB_1C_1 ;

(2) 求证: 平面 $AB_1C \perp$ 平面 ABB_1 .

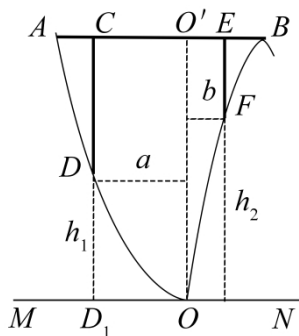
16. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a=3, c=\sqrt{2}, B=45^\circ$.



(1) 求 $\sin C$ 的值;

(2) 在边 BC 上取一点 D , 使得 $\cos \angle ADC = -\frac{4}{5}$, 求 $\tan \angle DAC$ 的值.

17. 某地准备在山谷中建一座桥梁, 桥址位置的竖直截面图如图所示. 谷底 O 在水平线 MN 上, 桥 AB 与 MN 平行, OO' 为铅垂线 (O' 在 AB 上). 经测量, 左侧曲线 AO 上任一点 D 到 MN 的距离 h_1 (米) 与 D 到 OO' 的距离 a (米) 之间满足关系式 $h_1 = \frac{1}{40}a^2$; 右侧曲线 BO 上任一点 F 到 MN 的距离 h_2 (米) 与 F 到 OO' 的距离 b (米) 之间满足关系式 $h_2 = -\frac{1}{800}b^3 + 6b$. 已知点 B 到 OO' 的距离为 40 米.

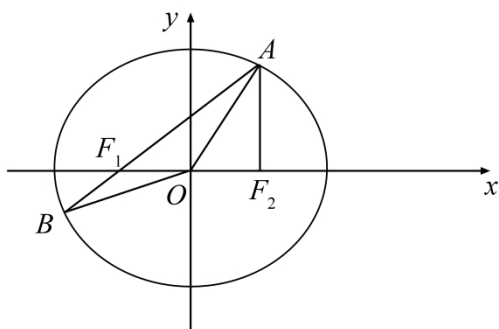


(1) 求桥 AB 的长度;

(2) 计划在谷底两侧建造平行于 OO' 的桥墩 CD 和 EF , 且 CE 为 80 米, 其中 C, E 在 AB 上 (不包括端点).

桥墩 EF 每米造价 k (万元)、桥墩 CD 每米造价 $\frac{3}{2}k$ (万元)($k>0$).问 $O'E$ 为多少米时, 桥墩 CD 与 EF 的总造价最低?

18.在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 A 在椭圆 E 上且在第一象限内, $AF_2 \perp F_1F_2$, 直线 AF_1 与椭圆 E 相交于另一点 B .



- (1) 求 $\triangle AF_1F_2$ 的周长;
 - (2) 在 x 轴上任取一点 P , 直线 AP 与椭圆 E 的右准线相交于点 Q , 求 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{QP}$ 的最小值;
 - (3) 设点 M 在椭圆 E 上, 记 $\triangle OAB$ 与 $\triangle MAB$ 的面积分别为 S_1, S_2 , 若 $S_2 = 3S_1$, 求点 M 的坐标.
- 19.已知关于 x 的函数 $y = f(x), y = g(x)$ 与 $h(x) = kx + b$ ($k, b \in \mathbf{R}$) 在区间 D 上恒有 $f(x) \geq h(x) \geq g(x)$.
- (1) 若 $f(x) = x^2 + 2x, g(x) = -x^2 + 2x, D = (-\infty, +\infty)$, 求 $h(x)$ 的表达式;
 - (2) 若 $f(x) = x^2 - x + 1, g(x) = k \ln x, h(x) = kx - k, D = (0, +\infty)$, 求 k 的取值范围;
 - (3) 若 $f(x) = x^4 - 2x^2, g(x) = 4x^2 - 8, h(x) = 4(t^2 - t)x - 3t^4 + 2t^2$ ($0 < |t| \leq \sqrt{2}$), $D = [m, n] \subseteq [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, 求证: $n - m \leq \sqrt{7}$.

- 20.已知数列 $\{a_n\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 的首项 $a_1 = 1$, 前 n 项和为 S_n . 设 λ 与 k 是常数, 若对一切正整数 n , 均有 $S_{n+1}^{\frac{1}{k}} - S_n^{\frac{1}{k}} = \lambda a_{n+1}^{\frac{1}{k}}$ 成立, 则称此数列为“ $\lambda-k$ ”数列.
- (1) 若等差数列 $\{a_n\}$ 是“ $\lambda-1$ ”数列, 求 λ 的值;
 - (2) 若数列 $\{a_n\}$ 是“ $\frac{\sqrt{3}}{3}-2$ ”数列, 且 $a_n > 0$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 - (3) 对于给定的 λ , 是否存在三个不同的数列 $\{a_n\}$ 为“ $\lambda-3$ ”数列, 且 $a_n \geq 0$? 若存在, 求 λ 的取值范围; 若不存在, 说明理由,

数学 II (附加题)

【选做题】本题包括 A、B、C 三小题, 请选定其中两小题, 并在相应的答题区域内作答. 若

多做，则按作答的前两小题评分。解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

A. [选修 4-2：矩阵与变换]

21. 平面上点 $A(2, -1)$ 在矩阵 $M = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{bmatrix}$ 对应的变换作用下得到点 $B(3, -4)$.

(1) 求实数 a, b 的值;

(2) 求矩阵 M 的逆矩阵 M^{-1} .

B. [选修 4-4：坐标系与参数方程]

22. 在极坐标系中，已知点 $A(\rho_1, \frac{\pi}{3})$ 在直线 $l: \rho \cos \theta = 2$ 上，点 $B(\rho_2, \frac{\pi}{6})$ 在圆 $C: \rho = 4 \sin \theta$ 上（其中 $\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ ）.

(1) 求 ρ_1, ρ_2 的值

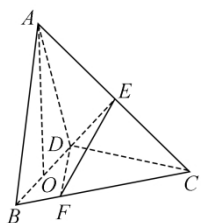
(2) 求出直线 l 与圆 C 的公共点的极坐标.

C. [选修 4-5：不等式选讲]

23. 设 $x \in \mathbf{R}$ ，解不等式 $2|x+1| + |x| \leq 4$.

【必做题】第 24 题、第 25 题，每题 10 分，共计 20 分。请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

24. 在三棱锥 $A-BCD$ 中，已知 $CB=CD=\sqrt{5}, BD=2$ ， O 为 BD 的中点， $AO \perp$ 平面 BCD ， $AO=2$ ， E 为 AC 的中点.



(1) 求直线 AB 与 DE 所成角的余弦值;

(2) 若点 F 在 BC 上，满足 $BF = \frac{1}{4}BC$ ，设二面角 $F-DE-C$ 的大小为 θ ，求 $\sin \theta$ 的值.

25. 甲口袋中装有 2 个黑球和 1 个白球，乙口袋中装有 3 个白球。现从甲、乙两口袋中各任取一个球交换放入另一口袋，重复 n 次这样的操作，记甲口袋中黑球个数为 X_n ，恰有 2 个黑球的概率为 p_n ，恰有 1 个黑球的概率为 q_n .

(1) 求 $p_1 \cdot q_1$ 和 $p_2 \cdot q_2$;

(2) 求 $2p_n+q_n$ 与 $2p_{n-1}+q_{n-1}$ 的递推关系式和 X_n 的数学期望 $E(X_n)$ (用 n 表示) .