绝密★本科目考试启用前

2020年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数学

本试卷共5页，150分，考试时长120分钟．考试务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题10小题，每小题4分，共40分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x\,|\,0<x<3\}$，则 $A\bigcap B=$（　　）.

A. $\{-1,0,1\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{-1,1,2\}$　　D. $\{1,2\}$

【答案】D

【解析】

【分析】

根据交集定义直接得结果.

【详解】$A\cap B=\{-1,0,1,2\}\cap(0,3)=\{1,2\}$，

故选：D.

【点睛】本题考查集合交集概念，考查基本分析求解能力，属基础题.

2.在复平面内，复数 z 对应的点的坐标是 $(1,2)$，则 $i\cdot z=$（　　）.

A. $1+2i$　　B. $-2+i$　　C. $1-2i$　　D. $-2-i$

【答案】B

【解析】

【分析】

先根据复数几何意义得 z，再根据复数乘法法则得结果.

【详解】由题意得 $z=1+2i$，$\therefore iz=i-2$.

故选：B.

【点睛】本题考查复数几何意义以及复数乘法法则，考查基本分析求解能力，属基础题.

3.在 $(\sqrt{x}-2)^5$ 的展开式中，x^2 的系数为（　　）.

A. -5　　B. 5　　C. -10　　D. 10

【答案】C

【解析】

【分析】

首先写出展开式的通项公式，然后结合通项公式确定 x^2 的系数即可.

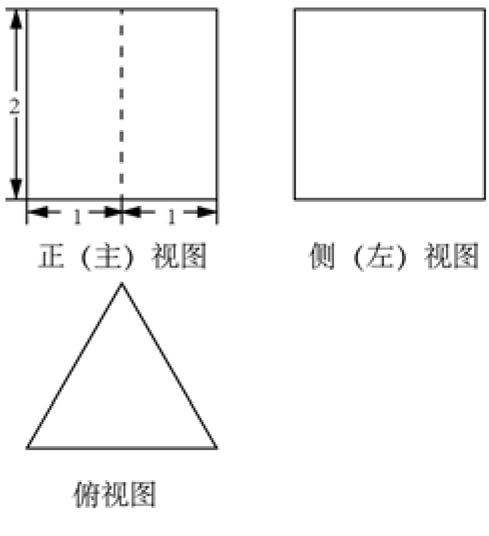
【详解】$\left(\sqrt{x}-2\right)^5$ 展开式的通项公式为：$T_{r+1}=C_5^r\left(\sqrt{x}\right)^{5-r}\left(-2\right)^r=\left(-2\right)^r C_5^r x^{\frac{5-r}{2}}$，

令 $\frac{5-r}{2}=2$ 可得：$r=1$，则 x^2 的系数为：$\left(-2\right)^1 C_5^1=\left(-2\right)\times 5=-10$.

故选：C.

【点睛】二项式定理的核心是通项公式，求解此类问题可以分两步完成：第一步根据所给出的条件(特定项)和通项公式，建立方程来确定指数(求解时要注意二项式系数中 n 和 r 的隐含条件，即 n，r 均为非负整数，且 $n\geq r$，如常数项指数为零、有理项指数为整数等)；第二步是根据所求的指数，再求所求解的项.

4.某三棱柱的底面为正三角形，其三视图如图所示，该三棱柱的表面积为（　　）.



A. $6+\sqrt{3}$　　B. $6+2\sqrt{3}$　　C. $12+\sqrt{3}$　　D. $12+2\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】

首先确定几何体的结构特征，然后求解其表面积即可.

【详解】由题意可得，三棱柱的上下底面为边长为 2 的等边三角形，侧面为三个边长为 2 的正方形，

则其表面积为：$S=3\times(2\times2)+2\times\left(\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin60^\circ\right)=12+2\sqrt{3}$.

故选：D.

【点睛】(1)以三视图为载体考查几何体的表面积，关键是能够对给出的三视图进行恰当的分析，从三视图中发现几何体中各元素间的位置关系及数量关系.

(2)多面体的表面积是各个面的面积之和；组合体的表面积应注意重合部分的处理.

(3)圆柱、圆锥、圆台的侧面是曲面，计算侧面积时需要将这个曲面展为平面图形计算，而表面积是侧面积与底面圆的面积之和.

5.已知半径为 1 的圆经过点$(3,4)$，则其圆心到原点的距离的最小值为（　　）.

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

【答案】A

【解析】

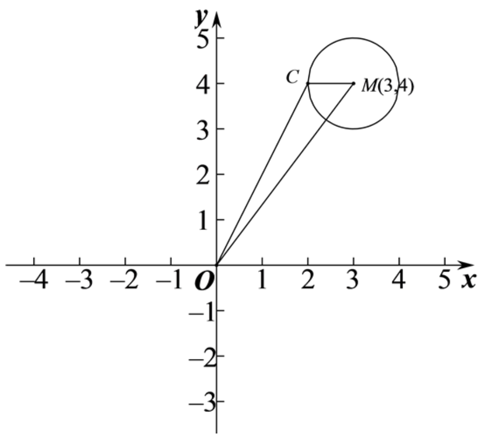
【分析】

求出圆心C的轨迹方程后，根据圆心M到原点O的距离减去半径 1 可得答案.

【详解】设圆心$C(x,y)$，则$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=1$，

化简得$(x-3)^2+(y-4)^2=1$，

所以圆心C的轨迹是以$M(3,4)$为圆心，1 为半径的圆，



所以$|OC|+1\geq|OM|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，所以$|OC|\geq5-1=4$，

当且仅当C在线段OM上时取得等号，

故选：A.

【点睛】本题考查了圆的标准方程，属于基础题.

6.已知函数 $f(x)=2^x-x-1$，则不等式 $f(x)>0$ 的解集是（　　）.

A. $(-1,1)$　　　　B. $(-\infty,-1)\bigcup(1,+\infty)$

C. $(0,1)$　　　　D. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

【答案】D

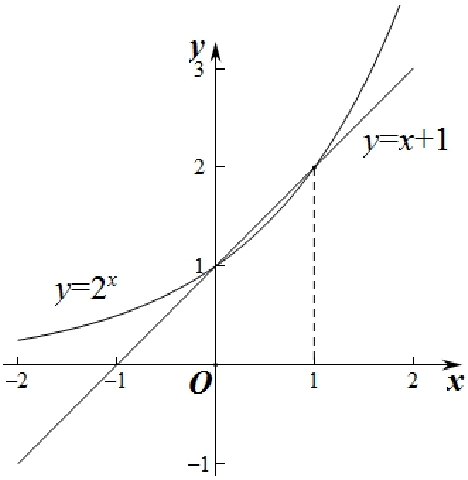
【解析】

【分析】

作出函数 $y=2^x$ 和 $y=x+1$ 的图象，观察图象可得结果.

【详解】因为 $f\left(x\right)=2^x-x-1$，所以 $f\left(x\right)>0$ 等价于 $2^x>x+1$，

在同一直角坐标系中作出 $y=2^x$ 和 $y=x+1$ 的图象如图：



两函数图象的交点坐标为 $(0,1),(1,2)$，

不等式 $2^x>x+1$ 的解为 $x<0$ 或 $x>1$.

所以不等式 $f\left(x\right)>0$ 的解集为：$\left(-\infty,0\right)\cup\left(1,+\infty\right)$.

故选：D.

【点睛】本题考查了图象法解不等式，属于基础题.

7.设抛物线的顶点为 O，焦点为 F，准线为 l. P 是抛物线上异于 O 的一点，过 P 作 $PQ\perp l$ 于 Q，则线段 FQ 的垂直平分线（　　）.

A. 经过点 O　　　　B. 经过点 P

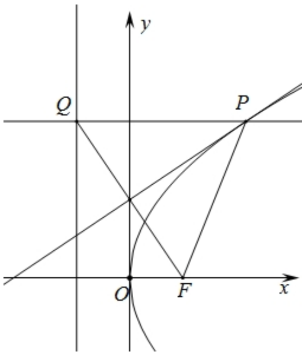
C. 平行于直线 OP　　　　D. 垂直于直线 OP

【答案】B

【解析】

【分析】

依据题意不妨作出焦点在 x 轴上的开口向右的抛物线，根据垂直平分线的定义和抛物线的定义可知，线段 FQ 的垂直平分线经过点 P，即求解.

【详解】如图所示：

.

因为线段 FQ 的垂直平分线上的点到 F,Q 的距离相等，又点 P 在抛物线上，根据定义可知，$|PQ|=|PF|$，

所以线段 FQ 的垂直平分线经过点 P.

故选：B.

【点睛】本题主要考查抛物线的定义的应用，属于基础题.

8.在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=-9$，$a_3=-1$. 记 $T_n=a_1a_2\ldots a_n(n=1,2,\ldots)$，则数列 $\{T_n\}$（　　）.

A. 有最大项，有最小项

B. 有最大项，无最小项

C. 无最大项，有最小项

D. 无最大项，无最小项

【答案】B

【解析】

【分析】

首先求得数列的通项公式，然后结合数列中各个项数的符号和大小即可确定数列中是否存在最大项和最小项.

【详解】由题意可知，等差数列的公差 $d=\dfrac{a_5-a_1}{5-1}=\dfrac{-1+9}{5-1}=2$，

则其通项公式为：$a_n=a_1+(n-1)d=-9+(n-1)\times 2=2n-11$，

注意到 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<0<a_6=1<a_7<\cdots$，

且由 $T_5<0$ 可知 $T_i<0(i\ge 6,i\in N)$，

由 $\dfrac{T_i}{T_{i-1}}=a_i>1(i\ge 7,i\in N)$ 可知数列 $\{T_n\}$ 不存在最小项，

由于 $a_1=-9, a_2=-7, a_3=-5, a_4=-3, a_5=-1, a_6=1$，

故数列 $\{T_n\}$ 中的正项只有有限项：$T_2=63$，$T_4=63\times15=945$.

故数列 $\{T_n\}$ 中存在最大项，且最大项为 T_4.

故选：B.

【点睛】本题主要考查等差数列的通项公式，等差数列中项的符号问题，分类讨论的数学思想等知识，属于中等题.

9.已知 $\alpha,\beta\in R$，则"存在 $k\in Z$ 使得 $\alpha=k\pi+(-1)^k\beta$"是"$\sin\alpha=\sin\beta$"的（　　）.

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】

【分析】

根据充分条件，必要条件的定义，以及诱导公式分类讨论即可判断.

【详解】(1)当存在 $k\in Z$ 使得 $\alpha=k\pi+(-1)^k\beta$ 时，

若 k 为偶数，则 $\sin\alpha=\sin(k\pi+\beta)=\sin\beta$；

若 k 为奇数，则 $\sin\alpha=\sin(k\pi-\beta)=\sin[(k-1)\pi+\pi-\beta]=\sin(\pi-\beta)=\sin\beta$；

(2)当 $\sin\alpha=\sin\beta$ 时，$\alpha=\beta+2m\pi$ 或 $\alpha+\beta=\pi+2m\pi$，$m\in Z$，即 $\alpha=k\pi+(-1)^k\beta(k=2m)$ 或

$\alpha=k\pi+(-1)^k\beta(k=2m+1)$，

亦即存在 $k\in Z$ 使得 $\alpha=k\pi+(-1)^k\beta$.

所以，"存在 $k\in Z$ 使得 $\alpha=k\pi+(-1)^k\beta$"是"$\sin\alpha=\sin\beta$"的充要条件.

故选：C.

【点睛】本题主要考查充分条件，必要条件的定义的应用，诱导公式的应用，涉及分类讨论思想的应用，属于基础题.

10.2020 年 3 月 14 日是全球首个国际圆周率日（π Day）. 历史上，求圆周率 π 的方法有多种，与中国传统数学中的"割圆术"相似．数学家阿尔·卡西的方法是：当正整数 n 充分大时，计算单位圆的内接正 $6n$ 边形的周长和外切正 $6n$ 边形（各边均与圆相切的正 $6n$ 边形）的周长，将它们的算术平均数作为 2π 的近似值．按照阿尔·卡西的方法，π 的近似值的表达式是（　　）.

A. $3n\left(\sin\frac{30^{\circ}}{n}+\tan\frac{30^{\circ}}{n}\right)$　　B. $6n\left(\sin\frac{30^{\circ}}{n}+\tan\frac{30^{\circ}}{n}\right)$

C. $3n\left(\sin\frac{60^{\circ}}{n}+\tan\frac{60^{\circ}}{n}\right)$　　D. $6n\left(\sin\frac{60^{\circ}}{n}+\tan\frac{60^{\circ}}{n}\right)$

【答案】A

【解析】

【分析】

计算出单位圆内接正$6n$边形和外切正$6n$边形的周长，利用它们的算术平均数作为2π的近似值可得出结果.

【详解】单位圆内接正$6n$边形的每条边所对应的圆周角为$\frac{360°}{n\times 6}=\frac{60°}{n}$，每条边长为$2\sin\frac{30°}{n}$，

所以，单位圆的内接正$6n$边形的周长为$12n\sin\frac{30°}{n}$，

单位圆的外切正$6n$边形的每条边长为$2\tan\frac{30°}{n}$，其周长为$12n\tan\frac{30°}{n}$，

$$\therefore 2\pi=\frac{12n\sin\frac{30°}{n}+12n\tan\frac{30°}{n}}{2}=6n\left(\sin\frac{30°}{n}+\tan\frac{30°}{n}\right),$$

则$\pi=3n\left(\sin\frac{30°}{n}+\tan\frac{30°}{n}\right)$.

故选：A.

【点睛】本题考查圆周率π的近似值的计算，根据题意计算出单位圆内接正$6n$边形和外切正$6n$边形的周长是解答的关键，考查计算能力，属于中等题.

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.函数$f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln x$的定义域是____________.

【答案】$(0,+\infty)$

【解析】

【分析】

根据分母不为零、真数大于零列不等式组，解得结果.

【详解】由题意得$\begin{cases}x>0\\x+1\neq 0\end{cases}$，$\therefore x>0$

故答案为：$(0,+\infty)$

【点睛】本题考查函数定义域，考查基本分析求解能力，属基础题.

12.已知双曲线$C:\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$，则$C$的右焦点的坐标为________；$C$的焦点到其渐近线的距离是

________.

【答案】 (1). $(3,0)$ (2). $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】

根据双曲线的标准方程可得出双曲线C的右焦点坐标，并求得双曲线的渐近线方程，利用点到直线的距离公式可求得双曲线的焦点到渐近线的距离.

【详解】在双曲线C中，$a=\sqrt{6}$，$b=\sqrt{3}$，则$c=\sqrt{a^2+b^2}=3$，则双曲线C的右焦点坐标为$(3,0)$，

双曲线C的渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$，即$x\pm\sqrt{2}y=0$，

所以，双曲线C的焦点到其渐近线的距离为$\frac{3}{\sqrt{1^2+2}}=\sqrt{3}$.

故答案为：$(3,0)$；$\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查根据双曲线的标准方程求双曲线的焦点坐标以及焦点到渐近线的距离，考查计算能力，属于基础题.

13.已知正方形$ABCD$的边长为2，点P满足$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，则$|\overrightarrow{PD}|=$________；

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=$________.

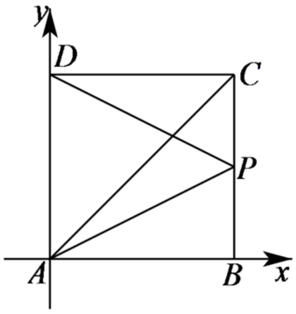
【答案】 (1). $\sqrt{5}$ (2). -1

【解析】

【分析】

以点A为坐标原点，AB、AD所在直线分别为x、y轴建立平面直角坐标系，求得点P的坐标，利用平面向量数量积的坐标运算可求得$\left|\overrightarrow{PD}\right|$以及$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$的值.

【详解】以点A为坐标原点，AB、AD所在直线分别为x、y轴建立如下图所示的平面直角坐标系，



则点 $A\left(0,0\right)$、$B\left(2,0\right)$、$C\left(2,2\right)$、$D\left(0,2\right)$，

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\left(2,0\right)+\frac{1}{2}\left(2,2\right)=\left(2,1\right)$，

则点 $P\left(2,1\right)$，$\therefore\overrightarrow{PD}=\left(-2,1\right)$，$\overrightarrow{PB}=\left(0,-1\right)$，

因此，$\left|\overrightarrow{PD}\right|=\sqrt{\left(-2\right)^2+1^2}=\sqrt{5}$，$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=0\times\left(-2\right)+1\times\left(-1\right)=-1$.

故答案为：$\sqrt{5}$；-1.

【点睛】本题考查平面向量的模和数量积的计算，建立平面直角坐标系，求出点 P 的坐标是解答的关键，考查计算能力，属于基础题.

14.若函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)+\cos x$ 的最大值为 2，则常数 φ 的一个取值为________.

【答案】$\frac{\pi}{2}$（$2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$ 均可）

【解析】

【分析】

根据两角和的正弦公式以及辅助角公式即可求得 $f\left(x\right)=\sqrt{\cos^2\varphi+\left(\sin\varphi+1\right)^2}\sin\left(x+\theta\right)$，可得 $\sqrt{\cos^2\varphi+\left(\sin\varphi+1\right)^2}=2$，即可解出.

【详解】因为 $f\left(x\right)=\cos\varphi\sin x+\left(\sin\varphi+1\right)\cos x=\sqrt{\cos^2\varphi+\left(\sin\varphi+1\right)^2}\sin\left(x+\theta\right)$，

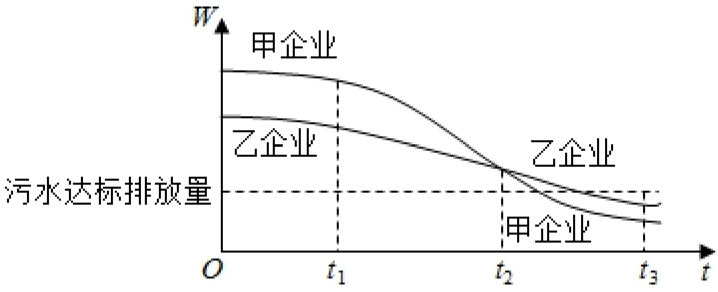
所以 $\sqrt{\cos^2\varphi+\left(\sin\varphi+1\right)^2}=2$，解得 $\sin\varphi=1$，故可取 $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

故答案为：$\frac{\pi}{2}$（$2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$ 均可）.

【点睛】本题主要考查两角和的正弦公式，辅助角公式的应用，以及平方关系的应用，考查学生的数学运算能力，属于基础题.

15.为满足人民对美好生活的向往，环保部门要求相关企业加强污水治理，排放未达标的企业要限期整改、

设企业的污水摔放量 W 与时间 t 的关系为$W=f(t)$，用$-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$的大小评价在$[a,b]$这段时间内企业污水治理能力的强弱，已知整改期内，甲、乙两企业的污水排放量与时间的关系如下图所示.



给出下列四个结论：

①在$[t_1,t_2]$这段时间内，甲企业的污水治理能力比乙企业强；

②在t_2时刻，甲企业的污水治理能力比乙企业强；

③在t_3时刻，甲、乙两企业的污水排放都已达标；

④甲企业在$[0,t_1],[t_1,t_2],[t_2,t_3]$这三段时间中，在$[0,t_1]$的污水治理能力最强.

其中所有正确结论的序号是____________________.

【答案】①②③

【解析】

【分析】

根据定义逐一判断，即可得到结果

【详解】$-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$表示区间端点连线斜率的负数，

在$[t_1,t_2]$这段时间内，甲的斜率比乙的小，所以甲的斜率的相反数比乙的大，因此甲企业的污水治理能力比乙企业强；①正确；

甲企业在$[0,t_1],[t_1,t_2],[t_2,t_3]$这三段时间中，甲企业在$[t_1,t_2]$这段时间内，甲的斜率最小，其相反数最大，即在$[t_1,t_2]$的污水治理能力最强．④错误；

在t_2时刻，甲切线的斜率比乙的小，所以甲切线的斜率的相反数比乙的大，甲企业的污水治理能力比乙企业强；②正确；

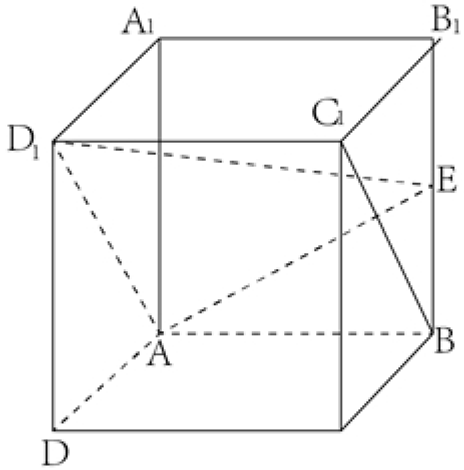
在t_3时刻，甲、乙两企业的污水排放量都在污水打标排放量以下，所以都已达标；③正确；

故答案为：①②③

【点睛】本题考查斜率应用、切线斜率应用、函数图象应用，考查基本分析识别能力，属中档题.

三、解答题共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 BB_1 的中点.



（Ⅰ）求证：$BC_1//$ 平面 AD_1E；

（Ⅱ）求直线 AA_1 与平面 AD_1E 所成角的正弦值.

【答案】（Ⅰ）证明见解析；（Ⅱ）$\dfrac{2}{3}$.

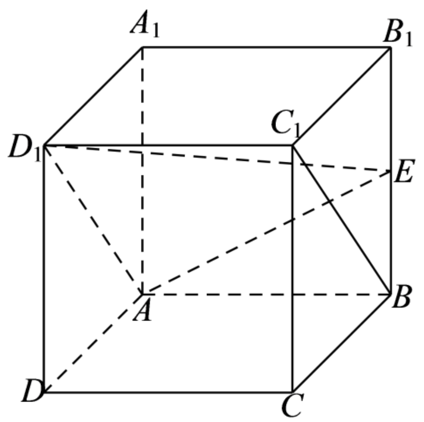
【解析】

【分析】

（Ⅰ）证明出四边形 ABC_1D_1 为平行四边形，可得出 $BC_1//AD_1$，然后利用线面平行的判定定理可证得结论;

（Ⅱ）以点 A 为坐标原点，AD、AB、AA_1 所在直线分别为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系 $A-xyz$，利用空间向量法可计算出直线 AA_1 与平面 AD_1E 所成角的正弦值.

【详解】（Ⅰ）如下图所示：

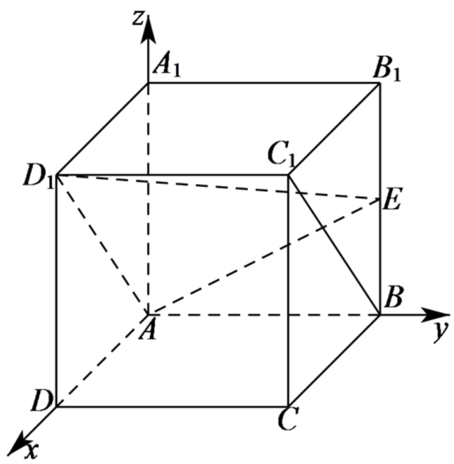


在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB//A_1B_1$ 且 $AB=A_1B_1$，$A_1B_1//C_1D_1$ 且 $A_1B_1=C_1D_1$，

$\therefore AB//C_1D_1$ 且 $AB=C_1D_1$，所以，四边形 ABC_1D_1 为平行四边形，则 $BC_1//AD_1$，

$\because BC_1\not\subset$ 平面 AD_1E，$AD_1\subset$ 平面 AD_1E，$\therefore BC_1//$ 平面 AD_1E；

（Ⅱ）以点 A 为坐标原点，AD、AB、AA_1 所在直线分别为 x、y、z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，



设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，则 $A(0,0,0)$、$A_1(0,0,2)$、$D_1(2,0,2)$、$E(0,2,1)$，

$\overrightarrow{AD_1}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{AE}=(0,2,1)$，

设平面 AD_1E 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}2x+2z=0\\ 2y+z=0\end{cases}$，

令 $z=-2$，则 $x=2$，$y=1$，则 $\vec{n}=(2,1,-2)$.

$$\cos<\vec{n},\overrightarrow{AA_1}>=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{AA_1}|}=-\frac{4}{3\times 2}=-\frac{2}{3}.$$

因此，直线 AA_1 与平面 AD_1E 所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$.

【点睛】本题考查线面平行的证明，同时也考查了利用空间向量法计算直线与平面所成角的正弦值，考查计算能力，属于基础题.

17.在 $\triangle ABC$ 中，$a+b=11$，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求：

（Ⅰ）a 的值：

（Ⅱ）$\sin C$ 和 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①：$c=7,\cos A=-\frac{1}{7}$；

条件②：$\cos A=\frac{1}{8},\cos B=\frac{9}{16}$．

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分．

【答案】选择条件①（Ⅰ）8（Ⅱ）$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$S=6\sqrt{3}$；

选择条件②（Ⅰ）6（Ⅱ）$\sin C=\frac{\sqrt{7}}{4}$，$S=\frac{15\sqrt{7}}{4}$．

【解析】

【分析】

选择条件①（Ⅰ）根据余弦定理直接求解，（Ⅱ）先根据三角函数同角关系求得$\sin A$,再根据正弦定理求$\sin C$,最后根据三角形面积公式求结果；

选择条件②（Ⅰ）先根据三角函数同角关系求得$\sin A,\sin B$，再根据正弦定理求结果，（Ⅱ）根据两角和正弦公式求$\sin C$，再根据三角形面积公式求结果.

【详解】选择条件①（Ⅰ）$\because c=7,\cos A=-\frac{1}{7}$，$a+b=11$

$\because a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\therefore a^2=(11-a)^2+7^2-2(11-a)\cdot 7\cdot(-\frac{1}{7})$

$\therefore a=8$

（Ⅱ）$\because \cos A=-\frac{1}{7}$，$A\in(0,\pi)\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$

由正弦定理得：$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\therefore \frac{8}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}=\frac{7}{\sin C}\therefore \sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$S=\frac{1}{2}ba\sin C=\frac{1}{2}(11-8)\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$

选择条件②（Ⅰ）$\because \cos A=\frac{1}{8},\cos B=\frac{9}{16}$，$A,B\in(0,\pi)$

$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{3\sqrt{7}}{8},\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{5\sqrt{7}}{16}$

由正弦定理得：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\therefore \frac{a}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}=\frac{11-a}{\frac{5\sqrt{7}}{16}}\therefore a=6$

（Ⅱ）$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\frac{3\sqrt{7}}{8}\times\frac{9}{16}+\frac{5\sqrt{7}}{16}\times\frac{1}{8}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$S=\frac{1}{2}ba\sin C=\frac{1}{2}(11-6)\times 6\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$

【点睛】本题考查正弦定理、余弦定理，三角形面积公式，考查基本分析求解能力，属中档题.

18.某校为举办甲、乙两项不同活动，分别设计了相应的活动方案：方案一、方案二．为了解该校学生对活动方案是否支持，对学生进行简单随机抽样，获得数据如下表：

	男生		女生	
	支持	不支持	支持	不支持
方案一	200 人	400 人	300 人	100 人
方案二	350 人	250 人	150 人	250 人

假设所有学生对活动方案是否支持相互独立.

（Ⅰ）分别估计该校男生支持方案一的概率、该校女生支持方案一的概率；

（Ⅱ）从该校全体男生中随机抽取 2 人，全体女生中随机抽取 1 人，估计这 3 人中恰有 2 人支持方案一的概率；

（Ⅲ）将该校学生支持方案的概率估计值记为 p_0，假设该校年级有 500 名男生和 300 名女生，除一年级外其他年级学生支持方案二的概率估计值记为 p_1，试比较 p_0 与 p_1 的大小.（结论不要求证明）

【答案】（Ⅰ）该校男生支持方案一的概率为 $\frac{1}{3}$，该校女生支持方案一的概率为 $\frac{3}{4}$；

（Ⅱ）$\frac{13}{36}$,（Ⅲ）$p_1<p_0$

【解析】

【分析】

（Ⅰ）根据频率估计概率，即得结果；

（Ⅱ）先分类，再根据独立事件概率乘法公式以及分类计数加法公式求结果；

（Ⅲ）先求 p_0，再根据频率估计概率 p_1，即得大小.

【详解】（Ⅰ）该校男生支持方案一的概率为 $\frac{200}{200+400}=\frac{1}{3}$，

该校女生支持方案一的概率为$\frac{300}{300+100}=\frac{3}{4}$；

（Ⅱ）3 人中恰有 2 人支持方案一分两种情况，(1）仅有两个男生支持方案一，(2）仅有一个男生支持方案一，一个女生支持方案一，

所以 3 人中恰有 2 人支持方案一概率为：$(\frac{1}{3})^2(1-\frac{3}{4})+C_2^1(\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3})\frac{3}{4}=\frac{13}{36}$；

（Ⅲ）$p_1<p_0$

【点睛】本题考查利用频率估计概率、独立事件概率乘法公式，考查基本分析求解能力，属基础题.

19.已知函数$f(x)=12-x^2$.

（Ⅰ）求曲线$y=f(x)$的斜率等于-2的切线方程；

（Ⅱ）设曲线$y=f(x)$在点$(t,f(t))$处的切线与坐标轴围成的三角形的面积为$S(t)$，求$S(t)$的最小值.

【答案】（Ⅰ）$2x+y-13=0$，（Ⅱ）32.

【解析】

【分析】

（Ⅰ）根据导数的几何意义可得切点的坐标，然后由点斜式可得结果；

（Ⅱ）根据导数的几何意义求出切线方程，再得到切线在坐标轴上的截距，进一步得到三角形的面积，最后利用导数可求得最值.

【详解】（Ⅰ）因为$f\left(x\right)=12-x^2$，所以$f'\left(x\right)=-2x$，

设切点为$\left(x_0,12-x_0\right)$，则$-2x_0=-2$，即$x_0=1$，所以切点为$\left(1,11\right)$，

由点斜式可得切线方程为：$y-11=-2\left(x-1\right)$，即$2x+y-13=0$.

（Ⅱ）显然$t\neq 0$，

因为$y=f\left(x\right)$在点$\left(t,12-t^2\right)$处的切线方程为：$y-\left(12-t^2\right)=-2t\left(x-t\right)$，

令$x=0$，得$y=t^2+12$，令$y=0$，得$x=\frac{t^2+12}{2t}$，

所以$S\left(t\right)=\frac{1}{2}\times\left(t^2+12\right)\cdot\frac{t^2+12}{2|t|}$，

不妨设$t>0$ ($t<0$时，结果一样)，

则$S\left(t\right)=\frac{t^4+24t^2+144}{4t}=\frac{1}{4}(t^3+24t+\frac{144}{t})$，

所以 $S'(t)=\frac{1}{4}(3t^2+24-\frac{144}{t^2})=\frac{3(t^4+8t^2-48)}{4t^2}$

$=\frac{3(t^2-4)(t^2+12)}{4t^2}=\frac{3(t-2)(t+2)(t^2+12)}{4t^2}$，

由 $S'(t)>0$，得 $t>2$，由 $S'(t)<0$，得 $0<t<2$，

所以 $S(t)$ 在 $(0,2)$ 上递减，在 $(2,+\infty)$ 上递增，

所以 $t=2$ 时，$S(t)$ 取得极小值，

也是最小值为 $S(2)=\frac{16\times16}{8}=32$.

【点睛】本题考查了利用导数的几何意义求切线方程，考查了利用导数求函数的最值，属于中档题.

20.已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $A(-2,-1)$，且 $a=2b$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程：

（Ⅱ）过点 $B(-4,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于点 M,N ,直线 MA,NA 分别交直线 $x=-4$ 于点 P,Q. 求 $\frac{|PB|}{|BQ|}$ 的值.

【答案】（Ⅰ）$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$；（Ⅱ）1.

【解析】

【分析】

(Ⅰ)由题意得到关于 a,b 的方程组，求解方程组即可确定椭圆方程；

(Ⅱ)首先联立直线与椭圆的方程，然后由直线 MA,NA 的方程确定点 P,Q 的纵坐标，将线段长度的比值转化为纵坐标比值的问题，进一步结合韦达定理可证得 $y_P+y_Q=0$，从而可得两线段长度的比值.

【详解】(1)设椭圆方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，由题意可得：

$\begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\\ a=2b\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a^2=8\\ b^2=2\end{cases}$，

故椭圆方程为：$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)设$M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$，直线MN的方程为：$y=k\left(x+4\right)$，

与椭圆方程$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$联立可得：$x^2+4k^2\left(x+4\right)^2=8$，

即：$\left(4k^2+1\right)x^2+32k^2x+\left(64k^2-8\right)=0$，

则：$x_1+x_2=\frac{-32k^2}{4k^2+1},x_1x_2=\frac{64k^2-8}{4k^2+1}$.

直线MA的方程为：$y+1=\frac{y_1+1}{x_1+2}\left(x+2\right)$，

令$x=-4$可得：$y_P=-2\times\frac{y_1+1}{x_1+2}-1=-2\times\frac{k\left(x_1+4\right)+1}{x_1+2}-\frac{x_1+2}{x_1+2}=\frac{-\left(2k+1\right)\left(x_1+4\right)}{x_1+2}$，

同理可得：$y_Q=\frac{-\left(2k+1\right)\left(x_2+4\right)}{x_2+2}$.

很明显$y_Py_Q<0$，且：$\frac{|PB|}{|PQ|}=\left|\frac{y_P}{y_Q}\right|$，注意到：

$y_P+y_Q=-\left(2k+1\right)\left(\frac{x_1+4}{x_1+2}+\frac{x_2+4}{x_2+2}\right)=-\left(2k+1\right)\times\frac{\left(x_1+4\right)\left(x_2+2\right)+\left(x_2+4\right)\left(x_1+2\right)}{\left(x_1+2\right)\left(x_2+2\right)}$，

而：$\left(x_1+4\right)\left(x_2+2\right)+\left(x_2+4\right)\left(x_1+2\right)=2\left[x_1x_2+3\left(x_1+x_2\right)+8\right]$

$=2\left[\frac{64k^2-8}{4k^2+1}+3\times\left(\frac{-32k^2}{4k^2+1}\right)+8\right]$

$=2\times\frac{\left(64k^2-8\right)+3\times\left(-32k^2\right)+8\left(4k^2+1\right)}{4k^2+1}=0$，

故$y_P+y_Q=0,y_P=-y_Q$.

从而$\frac{|PB|}{|PQ|}=\left|\frac{y_P}{y_Q}\right|=1$.

【点睛】解决直线与椭圆的综合问题时，要注意：

(1)注意观察应用题设中的每一个条件，明确确定直线、椭圆的条件；

(2)强化有关直线与椭圆联立得出一元二次方程后的运算能力，重视根与系数之间的关系、弦长、斜率、三角形的面积等问题.

21.已知$\left\{a_n\right\}$是无穷数列．给出两个性质：

①对于$\{a_n\}$中任意两项$a_i,a_j(i>j)$，在$\{a_n\}$中都存在一项a_m，使$\dfrac{a_i^2}{a_j}=a_m$；

②对于$\{a_n\}$中任意项$a_n(n\ldots 3)$，在$\{a_n\}$中都存在两项$a_k,a_l(k>l)$．使得$a_n=\dfrac{a_k^2}{a_l}$．

(Ⅰ)若$a_n=n(n=1,2,\cdots)$，判断数列$\{a_n\}$是否满足性质①，说明理由；

(Ⅱ)若$a_n=2^{n-1}(n=1,2,\cdots)$，判断数列$\{a_n\}$是否同时满足性质①和性质②，说明理由；

(Ⅲ)若$\{a_n\}$是递增数列，且同时满足性质①和性质②，证明：$\{a_n\}$为等比数列.

【答案】(Ⅰ)详见解析；(Ⅱ)详解解析；(Ⅲ)证明详见解析.

【解析】

【分析】

(Ⅰ)根据定义验证，即可判断；

(Ⅱ)根据定义逐一验证，即可判断；

(Ⅲ)解法一：首先，证明数列中的项数同号，然后证明$a_3=\dfrac{a_2^2}{a_1}$，最后，用数学归纳法证明数列为等比数列即可.

解法二：首先假设数列中的项数均为正数，然后证得a_1,a_2,a_3成等比数列，之后证得a_1,a_2,a_3,a_4成等比数列，同理即可证得数列为等比数列，从而命题得证.

【详解】(Ⅰ)Q$a_2=2,a_3=3,\dfrac{a_3^{\ 2}}{a_2}=\dfrac{9}{2}\notin Z\ \therefore\{a_n\}$不具有性质①；

(Ⅱ)Q$\forall i,j\in N^*,i>j,\dfrac{a_i^{\ 2}}{a_j}=2^{(2i-j)-1},2i-j\in N^*\ \therefore\dfrac{a_i^{\ 2}}{a_j}=a_{2i-j}\ \therefore\{a_n\}$具有性质①；

Q$\forall n\in N^*,n\geq 3,\exists k=n-1,l=n-2,\dfrac{a_k^{\ 2}}{a_l}=2^{(2k-l)-1}=2^{n-1}=a_n,\therefore\{a_n\}$具有性质②；

(Ⅲ)【解法一】

首先，证明数列中的项数同号，不妨设恒为正数：

显然$a_n\neq 0\left(n\notin N^*\right)$，假设数列中存在负项，设$N_0=\max\{n\,|\,a_n<0\}$，

第一种情况：若$N_0=1$，即$a_0<0<a_1<a_2<a_3<\cdots$，

由①可知：存在m_1，满足$a_{m_1}=\dfrac{a_2^2}{a_1}<0$，存在$m_2$，满足$a_{m_2}=\dfrac{a_3^2}{a_1}<0$，

由 $N_0=1$ 可知 $\frac{a_2^2}{a_1}=\frac{a_3^2}{a_1}$，从而 $a_2=a_3$，与数列的单调性矛盾，假设不成立.

第二种情况：若 $N_0\ge 2$，由①知存在实数 m，满足 $a_m=\frac{a_{N_0}^2}{a_1}<0$，由 N_0 的定义可知：$m\le N_0$，

另一方面，$a_m=\frac{a_{N_0}^2}{a_1}>\frac{a_{N_0}^2}{a_{N_0}}=a_{N_0}$，由数列的单调性可知：$m>N_0$，

这与 N_0 的定义矛盾，假设不成立.

同理可证得数列中的项数恒为负数.

综上可得，数列中的项数同号.

其次，证明 $a_3=\frac{a_2^2}{a_1}$：

利用性质②：取 $n=3$，此时 $a_3=\frac{a_k^2}{a_l}\left(k>l\right)$，

由数列的单调性可知 $a_k>a_l>0$，

而 $a_3=a_k\cdot\frac{a_k}{a_l}>a_k$，故 $k<3$，

此时必有 $k=2,l=1$，即 $a_3=\frac{a_2^2}{a_1}$，

最后，用数学归纳法证明数列为等比数列：

假设数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 $k\left(k\ge 3\right)$ 项成等比数列，不妨设 $a_s=a_1q^{s-1}\left(1\le s\le k\right)$，

其中 $a_1>0,q>1$，（$a_1<0,0<q<1$ 的情况类似）

由①可得：存在整数 m，满足 $a_m=\frac{a_k^2}{a_{k-1}}=a_1q^k>a_k$，且 $a_m=a_1q^k\ge a_{k+1}$　　　（*）

由②得：存在 $s>t$，满足：$a_{k+1}=\frac{a_s^2}{a_t}=a_s\cdot\frac{a_s}{a_t}>a_s$，由数列的单调性可知：$t<s\le k+1$，

由 $a_s=a_1q^{s-1}\left(1\le s\le k\right)$ 可得：$a_{k+1}=\frac{a_s^2}{a_t}=a_1q^{2s-t-1}>a_k=a_1q^{k-1}$　　　（**）

由（**）和（*）式可得：$a_1q^k\ge a_1q^{2s-t-1}>a_1q^{k-1}$，

结合数列的单调性有：$k\ge 2s-t-1>k-1$，

注意到s,t,k均为整数，故$k=2s-t-1$，

代入（**）式，从而$a_{k+1}=a_1q^k$.

总上可得，数列$\{a_n\}$的通项公式为：$a_n=a_1q^{n-1}$.

即数列$\{a_n\}$为等比数列.

【解法二】假设数列中的项数均为正数：

首先利用性质②：取$n=3$，此时$a_3=\frac{a_k^2}{a_l}(k>l)$，

由数列的单调性可知$a_k>a_l>0$，

而$a_3=a_k\cdot\frac{a_k}{a_l}>a_k$，故$k<3$，

此时必有$k=2,l=1$，即$a_3=\frac{a_2^2}{a_1}$，

即a_1,a_2,a_3成等比数列，不妨设$a_2=a_1q,a_3=a_1q^2\ (q>1)$，

然后利用性质①：取$i=3,j=2$，则$a_m=\frac{a_3^2}{a_2}=\frac{a_1^2q^4}{a_1q}=a_1q^3$，

即数列中必然存在一项的值为a_1q^3，下面我们来证明$a_4=a_1q^3$，

否则，由数列的单调性可知$a_4<a_1q^3$，

在性质②中，取$n=4$，则$a_4=\frac{a_k^2}{a_l}=a_k\frac{a_k}{a_l}>a_k$，从而$k<4$，

与前面类似的可知则存在$\{k,l\}\subseteq\{1,2,3\}(k>l)$，满足$a_4=\frac{a_k^2}{a_l}$，

若$k=3,l=2$，则：$a_4=\frac{a_k^2}{a_l}=a_1q^3$，与假设矛盾；

若$k=3,l=1$，则：$a_4=\frac{a_k^2}{a_l}=a_1q^4>a_1q^3$，与假设矛盾；

若$k=2,l=1$，则：$a_4=\frac{a_k^2}{a_l}=a_1q^2=a_3$，与数列的单调性矛盾；

即不存在满足题意的正整数k,l，可见$a_4<a_1q^3$不成立，从而$a_4=a_1q^3$，

同理可得：$a_5=a_1q^4,a_6=a_1q^5,\cdots$，从而数列$\left\{a_n\right\}$为等比数列，

同理，当数列中的项数均为负数时亦可证得数列为等比数列.

由推理过程易知数列中的项要么恒正要么恒负，不会同时出现正数和负数.

从而题中的结论得证，数列$\left\{a_n\right\}$为等比数列.

【点睛】本题主要考查数列的综合运用，等比数列的证明，数列性质的应用，数学归纳法与推理方法、不等式的性质的综合运用等知识，意在考查学生的转化能力和推理能力.