

绝密★本科目考试启用前

2020 年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数学

本试卷共 5 页，150 分，考试时长 120 分钟。考试务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ， $B = \{x \mid 0 < x < 3\}$ ，则 $A \cap B =$ ()。

- A. $\{-1, 0, 1\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-1, 1, 2\}$ D. $\{1, 2\}$

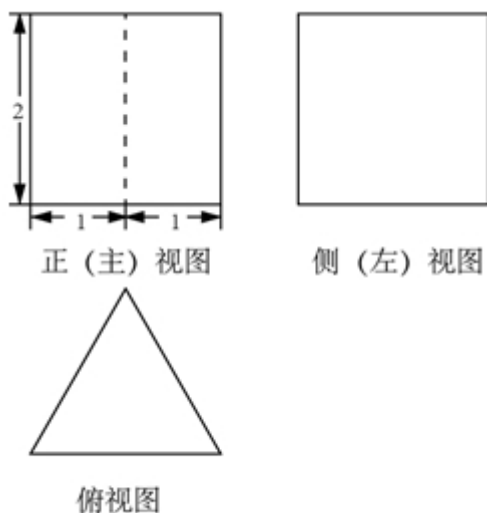
2. 在复平面内，复数 z 对应的点的坐标是 $(1, 2)$ ，则 $i \cdot z =$ ()。

- A. $1 + 2i$ B. $-2 + i$ C. $1 - 2i$ D. $-2 - i$

3. 在 $(\sqrt{x} - 2)^5$ 的展开式中， x^2 的系数为 ()。

- A. -5 B. 5 C. -10 D. 10

4. 某三棱柱的底面为正三角形，其三视图如图所示，该三棱柱的表面积为 ()。



- A. $6 + \sqrt{3}$ B. $6 + 2\sqrt{3}$ C. $12 + \sqrt{3}$ D. $12 + 2\sqrt{3}$

5. 已知半径为 1 的圆经过点 $(3, 4)$ ，则其圆心到原点的距离的最小值为 ().

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

6. 已知函数 $f(x) = 2^x - x - 1$ ，则不等式 $f(x) > 0$ 的解集是 ().

- A. $(-1, 1)$ B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
C. $(0, 1)$ D. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

7. 设抛物线的顶点为 O ，焦点为 F ，准线为 l . P 是抛物线上异于 O 的一点，过 P 作 $PQ \perp l$ 于 Q ，则线段 FQ 的垂直平分线 ().

- A. 经过点 O B. 经过点 P
C. 平行于直线 OP D. 垂直于直线 OP

8. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = -9$ ， $a_3 = -1$. 记 $T_n = a_1 a_2 \dots a_n (n = 1, 2, \dots)$ ，则数列 $\{T_n\}$ ().

- A. 有最大项，有最小项 B. 有最大项，无最小项
C. 无最大项，有最小项 D. 无最大项，无最小项

9. 已知 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ，则“存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得 $\alpha = k\pi + (-1)^k \beta$ ”是“ $\sin \alpha = \sin \beta$ ”的 ().

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

10. 2020 年 3 月 14 日是全球首个国际圆周率日 (π Day). 历史上，求圆周率 π 的方法有多种，与中国传统数学中的“割圆术”相似. 数学家阿尔·卡西的方法是：当正整数 n 充分大时，计算单位圆的内接正 $6n$ 边形的周长和外切正 $6n$ 边形（各边均与圆相切的正 $6n$ 边形）的周长，将它们的算术平均数作为 2π 的近似值. 按照阿尔·卡西的方法， π 的近似值的表达式是 ().

- A. $3n \left(\sin \frac{30^\circ}{n} + \tan \frac{30^\circ}{n} \right)$ B. $6n \left(\sin \frac{30^\circ}{n} + \tan \frac{30^\circ}{n} \right)$
C. $3n \left(\sin \frac{60^\circ}{n} + \tan \frac{60^\circ}{n} \right)$ D. $6n \left(\sin \frac{60^\circ}{n} + \tan \frac{60^\circ}{n} \right)$

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 函数 $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln x$ 的定义域是_____.

12. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ ，则 C 的右焦点的坐标为_____； C 的焦点到其渐近线的距离是_____.

_____.

13. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2, 点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, 则 $|\overrightarrow{PD}| =$ _____;

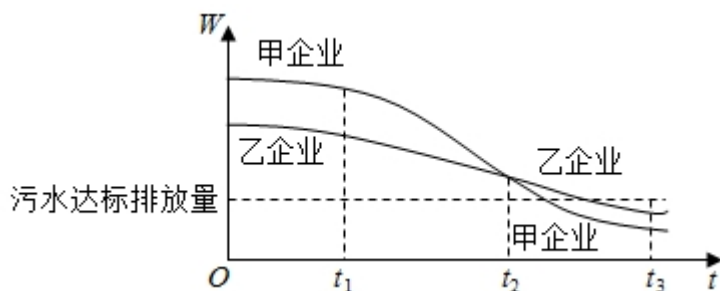
$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD} =$ _____.

14. 若函数 $f(x) = \sin(x + \varphi) + \cos x$ 的最大值为 2, 则常数 φ 的一个取值为 _____.

15. 为满足人民对美好生活的向往, 环保部门要求相关企业加强污水治理, 排放未达标的企业要限期整改、

设企业的污水排放量 W 与时间 t 的关系为 $W = f(t)$, 用 $-\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 的大小评价在 $[a, b]$ 这段时间内企业

污水治理能力的强弱, 已知整改期内, 甲、乙两企业的污水排放量与时间的关系如下图所示.



给出下列四个结论:

①在 $[t_1, t_2]$ 这段时间内, 甲企业的污水治理能力比乙企业强;

②在 t_2 时刻, 甲企业的污水治理能力比乙企业强;

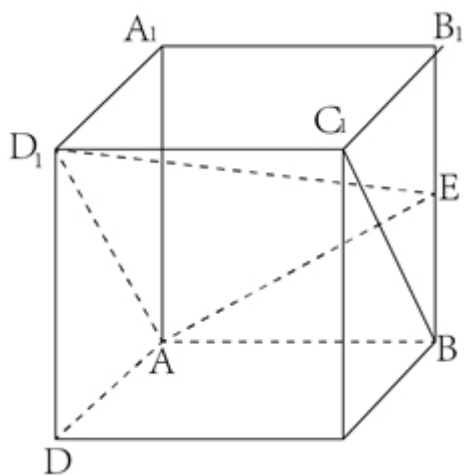
③在 t_3 时刻, 甲、乙两企业的污水排放都已达标;

④甲企业在 $[0, t_1], [t_1, t_2], [t_2, t_3]$ 这三段时间中, 在 $[0, t_1]$ 的污水治理能力最强.

其中所有正确结论的序号是 _____.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分, 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为 BB_1 的中点.



(I) 求证: $BC_1 \parallel$ 平面 AD_1E ;

(II) 求直线 AA_1 与平面 AD_1E 所成角的正弦值.

17. 在 $\triangle ABC$ 中, $a+b=11$, 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知, 求:

(I) a 的值:

(II) $\sin C$ 和 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①: $c=7, \cos A=-\frac{1}{7}$;

条件②: $\cos A = \frac{1}{8}, \cos B = \frac{9}{16}$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分。

18.某校为举办甲、乙两项不同活动，分别设计了相应的活动方案：方案一、方案二. 为了解该校学生对活动方案是否支持，对学生进行简单随机抽样，获得数据如下表：

	男生		女生	
	支持	不支持	支持	不支持
方案一	200 人	400 人	300 人	100 人
方案二	350 人	250 人	150 人	250 人

假设所有学生对活动方案是否支持相互独立.

(I) 分别估计该校男生支持方案一的概率、该校女生支持方案一的概率;

(II) 从该校全体男生中随机抽取 2 人, 全体女生中随机抽取 1 人, 估计这 3 人中恰有 2 人支持方案一的

概率;

(III) 将该校学生支持方案的概率估计值记为 p_0 , 假设该校年级有 500 名男生和 300 名女生, 除一年级外其他年级学生支持方案二的概率估计值记为 p_1 , 试比较 p_0 与 p_1 的大小. (结论不要求证明)

19. 已知函数 $f(x) = 12 - x^2$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 的斜率等于 -2 的切线方程;

(II) 设曲线 $y = f(x)$ 在点 $(t, f(t))$ 处的切线与坐标轴围成的三角形的面积为 $S(t)$, 求 $S(t)$ 的最小值.

20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 过点 $A(-2, -1)$, 且 $a = 2b$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 过点 $B(-4, 0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于点 M, N , 直线 MA, NA 分别交直线 $x = -4$ 于点 P, Q . 求 $\frac{|PB|}{|BQ|}$ 的值.

21. 已知 $\{a_n\}$ 是无穷数列. 给出两个性质:

① 对于 $\{a_n\}$ 中任意两项 $a_i, a_j (i > j)$, 在 $\{a_n\}$ 中都存在一项 a_m , 使 $\frac{a_i^2}{a_j} = a_m$;

② 对于 $\{a_n\}$ 中任意项 $a_n (n \geq 3)$, 在 $\{a_n\}$ 中都存在两项 $a_k, a_l (k > l)$. 使得 $a_n = \frac{a_k^2}{a_l}$.

(I) 若 $a_n = n (n = 1, 2, \dots)$, 判断数列 $\{a_n\}$ 是否满足性质①, 说明理由;

(II) 若 $a_n = 2^{n-1} (n = 1, 2, \dots)$, 判断数列 $\{a_n\}$ 是否同时满足性质①和性质②, 说明理由;

(III) 若 $\{a_n\}$ 是递增数列, 且同时满足性质①和性质②, 证明: $\{a_n\}$ 为等比数列.