

2020 年北京大学强基计划笔试试题

- 正实数 x, y, z, w 满足 $x \geq y \geq w$ 和 $x + y \leq 2(z + w)$, 则 $\frac{w}{x} + \frac{z}{y}$ 的最小值为____。
 A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{7}{8}$ C. 1 D. 以上三个答案都不对
- 在 $(2019 \times 2020)^{2021}$ 的全体正因因数中选出若干个, 使得其中任意两个的乘积都不是平方数, 则最多可选因数个数为____。
 A. 16 B. 31 C. 32 D. 以上三个答案都不对
- 整数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 4$, 且对任意 $n \geq 2$ 有 $a_n^2 - a_{n+1}a_{n-1} = 2^{n-1}$, 则 a_{2020} 的个位数字是____。
 A. 8 B. 4 C. 2 D. 以上三个答案都不对
- 设 a, b, c, d 是方程 $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 0$ 的 4 个复根, 则 $\frac{a-1}{a+2} + \frac{b-1}{b+2} + \frac{c-1}{c+2} + \frac{d-1}{d+2}$ 的值为____。
 A. $-\frac{4}{3}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. 以上三个答案都不对
- 设等边三角形 ABC 的边长为 1, 过点 C 作以 AB 为直径的圆的切线交 AB 的延长线于点 D , $AD > BD$, 则三角形 BCD 的面积为____。
 A. $\frac{6\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{16}$ B. $\frac{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{16}$ C. $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{16}$ D. 以上三个答案都不对
- 设 x, y, z 均不为 $(k + \frac{1}{2})\pi$, 其中 k 为整数。已知 $\sin(y + z - x), \sin(x + z - y), \sin(x + y - z)$ 成等差数列, 则依然成等差数列的是
 A. $\sin x, \sin y, \sin z$ B. $\cos x, \cos y, \cos z$
 C. $\tan x, \tan y, \tan z$ D. 以上三个答案都不对
- 方程 $19x + 93y = 4xy$ 的整数解的个数为
 A. 4 B. 8 C. 16 D. 以上三个答案都不对
- 从圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上的点向椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 引切线, 两个切点间的线段称为切点弦, 则椭圆 C 内不与任何切点弦相交的区域的面积为____。
 A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. 以上三个答案都不对
- 使得 $5x + 12\sqrt{xy} \leq a(x + y)$ 对所有正实数 x, y 都成立的实数 a 的最小值为____。
 A. 8 B. 9 C. 10 D. 以上三个答案都不对
- 设 P 为单位立方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的面对角线 AB_1 上的一点, 则 $PA_1 + PC_1$ 的最小值为____。
 A. $\sqrt{2} + \sqrt{2}$ B. $\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$ C. $2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ D. 以上三个答案都不对
- 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 9$, 且对任意 $n \geq 1$ 有 $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n - 20$, 其前 n 项和为 S_n , 则 S_n 的最大值等于____。
 A. 28 B. 35 C. 47 D. 以上三个答案都不对

12. 设直线 $y = 3x + m$ 与椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 交于 A, B 两点, O 为坐标原点. 则三角形 AOB 面积的最大值为_____。

A. 8 B. 10 C. 12 D. 以上三个答案都不对

13. 正整数 $n \geq 3$ 称为理想的, 若存在正整数 $1 \leq k \leq n-1$ 使得 $C_n^{k-1}, C_n^k, C_n^{k+1}$ 构成等差数列, 其中 $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 为组合数. 则不超过 2020 的理想数个数为_____。

A. 40 B. 41 C. 42 D. 以上三个答案都不对

14. 在三角形 ABC 中, $\angle A = 150^\circ$, $D_1, D_2, D_3, \dots, D_{2020}$ 依次为边 BC 上的点, 且 $BD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = \dots = D_{2019}D_{2020} = D_{2020}C$. 设 $\angle BAD_1 = \alpha_1, \angle D_1AD_2 = \alpha_2, \dots, \angle D_{2019}AD_{2020} = \alpha_{2020}, \angle D_{2020}AC = \alpha_{2021}$. 则 $\frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_3 \dots \sin \alpha_{2021}}{\sin \alpha_2 \sin \alpha_4 \dots \sin \alpha_{2020}}$ 的值为_____。

A. $\frac{1}{1010}$ B. $\frac{1}{2020}$ C. $\frac{1}{2021}$ D. 以上三个答案都不对

15. 函数 $\sqrt{3 + 2\sqrt{3} \cos \theta + \cos^2 \theta} + \sqrt{5 - 2\sqrt{3} \cos \theta + \cos^2 \theta} + 4 \sin \theta$ 的最大值为_____。

A. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ B. $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$ C. $\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ D. 以上三个答案都不对

16. 方程 $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = 1$ 的实根个数为_____。

A. 1 B. 2 C. 3 D. 以上三个答案都不对

17. 凸五边形 $ABCDE$ 的对角线 CE 分别与对角线 BD 和 AD 交于点 F 和 G , 已知 $BF:FD = 5:4, AG:GD = 1:1, CF:FG:GE = 2:2:3$, $S_{\triangle CFD}$ 和 $S_{\triangle ABE}$ 分别为三角形 CFD 和三角形 ABE 的面积. 则 $S_{\triangle CFD}:S_{\triangle ABE}$ 的值等于_____。

A. 8:15 B. 2:3 C. 11:23 D. 以上三个答案都不对

18. 设 p, q 均为不超过 100 的正整数, 则有有理根的多项式 $f(x) = x^5 + px + q$ 的个数为_____。

A. 99 B. 133 C. 150 D. 以上三个答案都不对

19. 满足对任意 $n \geq 1$ 有 $a_{n+1} = 2^n - 3a_n$ 且严格递增的数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 的个数为_____。

A. 0 B. 1 C. 无穷多个 D. 以上三个答案都不对

20. 设函数 $f(x, y, z) = \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$, 其中 x, y, z 均为正实数. 则有

A. f 既有最大值也有最小值 B. f 有最大值但无最小值
C. f 有最小值但无最大值 D. 以上三个答案都不对