

高考总复习单元同步滚动测试卷

文科数学参考答案

(一)

1. C 【解析】 $\because$ 集合 $A = \{x | x > 1\}$,

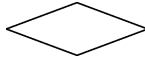
A 中, 0 是一个元素, 元素与集合之间是属于或者不属于关系, 故 A 错误;

B 中, $0 > 1$ 不成立, $\therefore \{0\} \subseteq A$ 不对, 故 B 错误;

C 中, 空集是任何集合的子集, 故 C 正确;

D 中, 集合与集合之间是真子集或者子集以及相等关系, 故 D 错误.

故选 C.

2. B 【解析】因为  表示判断框,

所以一定有条件结构.

故选 B.

3. C 【解析】命题 $p: " \forall x > 1, x^2 - 1 > 0 "$,

则 $\neg p$ 为: $\exists x_0 > 1, x_0^2 - 1 \leq 0$,

故选 C.

4. C 【解析】由已知得 $\complement_U A = \{1, 6, 7\}$, 所以 $B \cap (\complement_U A) = \{6, 7\}$, 故选 C.

5. D 【解析】根据逆否命题的定义可得命题的逆否命题为: $x, y \in \mathbf{R}$, 若 $x \neq 0$ 或 $y \neq 0$, 则 $x^2 + y^2 \neq 0$.

故选 D.

6. B 【解析】①是假命题, 原命题为真时, 它的否命题不一定为假, 如当 $a \geq 0$ 时, $|a| = a$, 它的否命题是当 $a < 0$ 时, $|a| \neq a$, 都是真命题;

②是真命题, 如对顶角相等是真命题, 它的逆命题不是真命题;

③是真命题, 命题的逆命题与它的否命题是互为逆否命题, 它们的真假性相同;

④是假命题, 命题的逆否命题为真时, 它的否命题不定为真.

故选 B.

7. C 【解析】 $\because$ 不等式 $x^2 \leq 1$,

$\therefore -1 \leq x \leq 1$,

$0 < x \leq 1$ 是不等式 $x^2 \leq 1$ 成立的一个充分不必要条件.

故选 C.

8. C 【解析】 $M = \{1, 2, 3\}$, 所以 M 的非空子集为 $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$, 共 7 个, 故选 C.

9. C 【解析】程序 A 的输出结果是 2, 程序 B 的输出结果是 1, 程序 C 的输出结果是 3, 程序 D 的输出结果是 0, 故选 C.

10. D 【解析】由 Venn 图可知阴影部分对应的集合为 $A \cap (\complement_U B)$,

$\because B = \{x | x^2 \geq 4\} = \{x | x \geq 2 \text{ 或 } x \leq -2\}$,

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$,

$\therefore \complement_U B = \{x | -2 < x < 2\}$,

即 $A \cap (\complement_U B) = \{-1, 0, 1\}$.

故选 D.

11. A 【解析】当 $a = 2$ 时, $A = \{1, 4, -2\}$, " $A \cap B = \{4\}$ ". 当 " $A \cap B = \{4\}$ " 时, a 可以为 -2 , 故不能推出 " $a = 2$ ". 由此可知 " $a = 2$ " 是 " $A \cap B = \{4\}$ " 的充分不必要条件, 故选 A.

12. C 【解析】初始值 $k = 1, S = 0$, 第 1 次进入循环体: $S = 1 + 2^0, k = 2$; 当第 2 次进入循环体时: $S = 1 + 2^0 + 2 + 2^1, k = 3$; 给定正整数 n , 当 $k = n$ 时, 最后一次进入循环体, 则有: $S = 1 + 2^0 + 2 + 2^1 + \dots + n + 2^{n-1}, k = n + 1$; 退出循环体, 输出 $S = (1 + 2 + 3 + \dots + n) + (2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1})$, 故选 C.

13. 45 【解析】 $101\ 101_{(2)} = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 = 45$.

14. 3 【解析】根据题意可知, 起始量为 $k = 0$, 第一次得到: $k = 1, x = 39$; 第二次: $k = 2, x = 77$; 第三次: $k = 3, x = 153$, 此时符合条件, 则终止循环得到的 k 的值为 3, 故答案为 3.

15. -1 【解析】由于集合 A 是集合 B 的子集, 令 m^2

$=1$ 时, $m=1$ 或 $m=-1$. 当 $m=1$ 时集合 B 中有两个 1, 不符合题意, 故舍去. 当 $m=-1$ 时, $A=\{1, 3\}$, $B=\{1, 3, -3\}$, 符合题意. 令 $m^2=2m-1$, 解得 $m=1$, 根据上面的分析, 不符合题意. 综上所述, 实数 $m=-1$.

16. $(-3, +\infty)$ 【解析】解法 1: 由已知得 $\neg p: \forall x \in [1, 2], x^2 + 2ax + 2 - a \leq 0$ 成立.

所以设 $f(x) = x^2 + 2ax + 2 - a$,

$$\text{则 } \begin{cases} f(1) \leq 0, \\ f(2) \leq 0, \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} 1 + 2a + 2 - a \leq 0, \\ 4 + 4a + 2 - a \leq 0. \end{cases}$$

解得 $a \leq -3$,

因为 $\neg p$ 为假, 所以 $a > -3$,

即 a 的取值范围是 $(-3, +\infty)$.

解法 2: 设 $f(x) = x^2 + 2ax + 2 - a = (x+a)^2 - a^2 - a + 2$,

只需 $f(x)_{\max} > 0$ 即可.

$\because f(x)$ 的对称轴为 $x = -a$,

当 $-a < \frac{3}{2}$, 即 $a > -\frac{3}{2}$ 时, $f(x)_{\max} = f(2) = 4 + 4a + 2 - a = 6 + 3a > 0$,

$$\therefore a > -\frac{3}{2};$$

当 $-a \geq \frac{3}{2}$, 即 $a \leq -\frac{3}{2}$ 时, $f(x)_{\max} = f(1) = 1 + 2a + 2 - a = a + 3 > 0$,

$$\therefore -3 < a \leq -\frac{3}{2}.$$

综上, $a > -3$.

17. 【解析】(1) 集合 $A = \{x | 2 \leq x < 4\}$,
 $B = \{x | 2x - 7 \geq 8 - 3x\} = \{x | x \geq 3\}$,
 $\therefore A \cap B = \{x | 2 \leq x < 4\} \cap \{x | x \geq 3\} = \{x | 3 \leq x < 4\}$;

$$\because \complement_{\mathbf{R}} B = \{x | x < 3\},$$

$$\therefore A \cup (\complement_{\mathbf{R}} B) = \{x | x < 4\}.$$

(2) 集合 $A = \{x | 2 \leq x < 4\}$, $C = \{x | x < a\}$.

$\because A \cap C = A$, 可得 $A \subseteq C$,

$$\therefore a \geq 4.$$

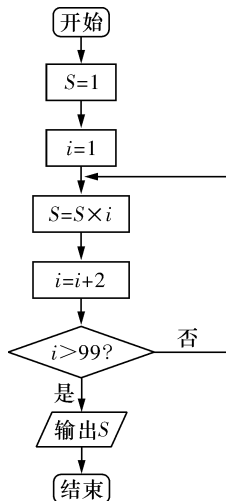
故 a 的取值范围是 $[4, +\infty)$.

18. 【解析】(1) 补充如下:

$$\textcircled{1} i = i + 2,$$

$$\textcircled{2} i > 99 (\text{或 } i > 100, i \geq 100, i \geq 101).$$

(2) 流程图如图.



19. 【解析】由 $3^a \leq 9$, 得 $a \leq 2$, 即 $p: a \leq 2$.

$\because x^2 + 3(3-a)x + 9 \geq 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 得 $\Delta = 9(3-a)^2 - 4 \times 9 \leq 0$, 解得 $1 \leq a \leq 5$,

即 $q: 1 \leq a \leq 5$.

$\because "p \wedge q"$ 为真命题, $\therefore \begin{cases} a \leq 2, \\ 1 \leq a \leq 5 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq a \leq 2$, 即条件 $r: 1 \leq a \leq 2$,

$\therefore$ 条件 $t: m \leq a \leq m + \frac{1}{2}$,

$\because$ 若 r 是 t 的必要不充分条件,

则 $\{a | m \leq a \leq m + \frac{1}{2}\}$ 是 $\{a | 1 \leq a \leq 2\}$ 的真子集,

$\therefore \begin{cases} m \geq 1, \\ m + \frac{1}{2} \leq 2, \end{cases}$ 解得 $1 \leq m \leq \frac{3}{2}$.

$$\therefore \begin{cases} m \geq 1, \\ m + \frac{1}{2} \leq 2, \end{cases} \text{ 解得 } 1 \leq m \leq \frac{3}{2}.$$

$$\because m \in \mathbf{N}^*,$$

$$\therefore m = 1.$$

20. 【解析】(1) $B = \{-2, 3\}$,

$$\because A \cup B = \{-2, 1, 3\}, A \cap B = \{3\},$$

$$\therefore A = \{3, 1\}.$$

(2) $\because \emptyset \subsetneq A \subsetneq B$,

$$\therefore A = \{-2\}, \text{ 或 } A = \{3\}.$$

$\textcircled{1}$ 若 $A = \{-2\}$, 则 $\begin{cases} -2 \times (-2) = q, \\ -2 - 2 = p, \end{cases}$

$\therefore p + q = 0$, 不满足 $p + q > 0$,

$$\therefore A \neq \{-2\};$$

$$\textcircled{2} \text{ 若 } A = \{3\}, \text{ 则 } \begin{cases} 3+3=p, \\ 3 \times 3=q, \end{cases}$$

$$\text{满足 } p+q>0,$$

$$\therefore p=6, q=9.$$

21. 【解析】关于 x 的不等式 $x^2 + (a-1)x + a^2 \leq 0$ 的解集为 $\emptyset$, 等价于 $x^2 + (a-1)x + a^2 > 0$ 恒成立, 所以 p 为真命题时, $\Delta = (a-1)^2 - 4a^2 < 0$, 解得 $a > \frac{1}{3}$ 或 $a < -1$. ①

$$q \text{ 为真命题时, } 2a^2 - a > 1, \text{ 解得 } a > 1 \text{ 或 } a < -\frac{1}{2}. \textcircled{2}$$

(1) 若 p, q 中至少有一个是真命题, 则实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$.

(2) “ $p \vee q$ ”是真命题, 且“ $p \wedge q$ ”是假命题, 有两种情况:

$$p \text{ 为真命题, } q \text{ 为假命题时, } \frac{1}{3} < a \leq 1;$$

$$p \text{ 为假命题, } q \text{ 为真命题时, } -1 \leq a < -\frac{1}{2}.$$

故“ $p \vee q$ ”是真命题, 且“ $p \wedge q$ ”是假命题时, a 的取值范围为 $(\frac{1}{3}, 1] \cup [-1, -\frac{1}{2})$.

22. 【解析】(1) 由于 $x=0$ 与 $x=12$ 时, 三点 A, B, P 不能构成三角形, 故这个函数的定义域为 $(0, 12)$.

$$\text{当 } 0 < x \leq 4 \text{ 时, } S = f(x) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x = 2x;$$

$$\text{当 } 4 < x \leq 8 \text{ 时, } S = f(x) = 8;$$

$$\text{当 } 8 < x < 12 \text{ 时, } S = f(x) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (12-x) = 2(12-x) = 24-2x.$$

$$\therefore \text{这个函数的解析式为 } f(x) = \begin{cases} 2x, x \in (0, 4], \\ 8, x \in (4, 8], \\ 24-2x, x \in (8, 12), \end{cases}$$

$\therefore$ 框图中①、②、③处应填充的式子分别为: $y = 2x, y = 8, y = 24 - 2x$.

(2) 若输出的面积 y 的值为 6, 则

$$\text{当 } 0 < x \leq 4 \text{ 时, } 2x = 6, \therefore x = 3;$$

$$\text{当 } 8 < x < 12 \text{ 时, } S = 24 - 2x = 6, \therefore x = 9.$$

综上, 当 $x=3$ 时, 此时点 P 的在正方形的边 BC 上; 当 $x=9$ 时, 此时点 P 的在正方形的边 DA 上.

(二)

$$1. D \quad \text{【解析】} A = \{x | (x+2)(x-4) < 0\} = \{x | -2 < x < 4\},$$

$$B = \{x | x > -1\},$$

$$\therefore A \cap B = \{x | -1 < x < 4\}.$$

故选 D.

$$2. C \quad \text{【解析】由于 } x^2 \geq 0, x^2 + 2 \geq 2, \text{ 所以 } 0 < \frac{1}{x^2 + 2} \leq$$

$$\frac{1}{2}, \text{ 故选 C.}$$

$$3. B \quad \text{【解析】由 } (x^2 + x + 1) \sqrt{x+3} \geq 0 \Rightarrow x \geq -3, \text{ 令 } A = [-3, +\infty), B = [-2, +\infty), \text{ 显然 } B \text{ 是 } A \text{ 真子集, 所以 } p \text{ 是 } q \text{ 的必要而不充分条件.}$$

$$4. B \quad \text{【解析】因为函数 } f(x) \text{ 为幂函数, 设 } f(x) = x^a. \text{ 由函数 } f(x) \text{ 的图象经过点 } A(4, 2),$$

$$\text{所以 } 4^a = 2, \text{ 得 } a = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } f(x) = \sqrt{x},$$

$$\text{故 } f(8) = \sqrt{8}, m = 2\sqrt{2},$$

故选 B.

$$5. C \quad \text{【解析】因为命题 } p: \forall x \in [0, +\infty), f(x) \leq 1, \text{ 那么利用全称命题和特称命题的关系可知 } p \text{ 是真命题, } \neg p: \exists x_0 \in [0, +\infty), f(x_0) > 1, \text{ 选 C.}$$

$$6. B \quad \text{【解析】} a = \log_2 0.2 < 0, b = 2^{0.2} > 1, 0 < c = 0.2^{0.3} < 1,$$

$$\text{所以 } a < c < b, \text{ 选 B.}$$

$$7. D \quad \text{【解析】} \because y = -x^2 - 2ax = -(x+a)^2 + a^2,$$

$$\therefore \text{函数的对称轴 } x = -a,$$

$$\text{又 } \because 0 \leq x \leq 1 \text{ 且函数的最大值是 } a^2,$$

$$\therefore 0 \leq -a \leq 1, \text{ 即 } -1 \leq a \leq 0.$$

故选 D.

$$8. D \quad \text{【解析】由题意, } \begin{cases} a > 1, \\ 2-a > 0, \\ a^4 \leq -(2-a) - a + 6, \end{cases} \quad \text{化简得}$$

$$\begin{cases} a > 1, \\ a < 2, \text{ 解得 } 1 < a \leq \sqrt{2}, \text{ 故选 D.} \\ a^4 \leq 4, \end{cases}$$

$$9. C \quad \text{【解析】根据算法流程图可知第一次运行, } S =$$

$$\log_2 \frac{2}{3}, n=2;$$

$$\text{第二次运行, } S = \log_2 \frac{2}{3} + \log_2 \frac{3}{4} = -1, n=3;$$

$$\text{依次类推: } S = \log_2 \frac{2}{3} + \log_2 \frac{3}{4} + \cdots + \log_2 \frac{n+1}{n+2} =$$

$$\log_2 \frac{2}{n+2} = -5,$$

解得: $n=62$, 此时 $n=63$.

故选 C.

10. B 【解析】由题意得: $kx^2 + 4kx + 5 > 0$ 在 $\mathbf{R}$ 恒成立,

$k=0$ 时, 成立,

$$k \neq 0 \text{ 时, } \begin{cases} k > 0, \\ \Delta = 16k^2 - 20k < 0, \end{cases}$$

$$\text{解得: } 0 < k < \frac{5}{4},$$

$$\text{综上, } k \in \left[0, \frac{5}{4}\right),$$

故选 B.

11. B 【解析】因为函数 $f(x) = |x| + \frac{1}{x}$, 对于 $x > 0$,

$x < 0$, 分情况讨论得到其解析式, 然后作图可知选 B.

12. A 【解析】 $\because f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期为 3 的偶函数,

$$\therefore f(5) = f(5-6) = f(-1) = f(1),$$

$$\because f(1) < 1, f(5) = \frac{2a-3}{a+1},$$

$$\therefore \frac{2a-3}{a+1} < 1, \text{ 即 } \frac{a-4}{a+1} < 0,$$

解得 $-1 < a < 4$. 故选 A.

13. (2, 4) 【解析】当 $x=2$ 时, $f(2) = a^{2-2} + 3 = a^0 + 3 = 4$,

$\therefore$ 函数 $f(x) = a^{x-2} + 3$ 的图象一定经过定点 (2, 4).

故答案为 (2, 4).

14. 4 【解析】 $x = \log_6 12 - \log_6 3 = \log_6 4$,

$$\therefore 6^x = 4,$$

故答案为 4.

15. 2 【解析】 $\because$ 幂函数 $f(x) = (m^2 - m - 1)x^{m^2 + m - 3}$,

$$\therefore m^2 - m - 1 = 1,$$

解得 $m=2$, 或 $m=-1$;

又 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x)$ 为增函数,

$\therefore$ 当 $m=2$ 时, $m^2 + m - 3 = 3$, 幂函数为 $y = x^3$, 满足题意;

当 $m=-1$ 时, $m^2 + m - 3 = -3$, 幂函数为 $y = x^{-3}$, 不满足题意.

综上, $m=2$, 幂函数 $y = x^3$.

16. (2, 3) 【解析】由题可得: $f(-x) = \frac{1}{2^{-x}} - 2^{-x} =$

$$2^x - \frac{1}{2^x} = -f(x),$$

所以函数 $f(x) = \frac{1}{2^x} - 2^x$ 是奇函数,

又 $\frac{1}{2^x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 2^x 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

所以函数 $f(x) = \frac{1}{2^x} - 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,

所以不等式 $f(x^2 - 5x) + f(6) > 0$ 可化为:

$$f(x^2 - 5x) > -f(6) = f(-6).$$

由函数 $f(x) = \frac{1}{2^x} - 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减得:

$$x^2 - 5x < -6,$$

$$\text{解得: } 2 < x < 3.$$

所以实数 x 的取值范围是 (2, 3).

17. 【解析】(1) $4^{-\frac{1}{2}} - (\pi + 1)^0 + \left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} - 1 + \frac{16}{9}$

$$= \frac{23}{18}.$$

$$(2) \lg \frac{1}{2} - \lg \frac{5}{8} + \lg \frac{25}{2} - (\log_8 9) \cdot (\log_{27} 8)$$

$$= -\lg 2 - \lg 5 + 3\lg 2 + 2\lg 5 - \lg 2 - \left(\frac{2}{3} \log_2 3\right)$$

$$\cdot (\log_3 2)$$

$$= \lg 2 + \lg 5 - \frac{2}{3} \lg 3 \cdot \lg 2$$

$$= 1 - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{3}.$$

18. 【解析】(1) 设 $x_1 > x_2 > 0$, 则 $x_1 - x_2 > 0, x_1 x_2 > 0$,

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x_1}\right) - \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x_2}\right)$$

$$= -\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} > 0$$

$$\therefore f(x_1) > f(x_2),$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 是在 $(0, +\infty)$ 上的单调增函数.

$$(2) \therefore f(x) \text{ 在 } \left[\frac{1}{2}, 2\right] \text{ 上的值域是 } \left[\frac{1}{2}, 2\right],$$

又由(1)得 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上是单调增函数,

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, f(2) = 2,$$

$$\text{即 } \frac{1}{a} - 2 = \frac{1}{2}, \frac{1}{a} - \frac{1}{2} = 2, \text{ 解得 } a = \frac{2}{5}.$$

19. 【解析】(1) 命题 p 是真命题, 则有 $\begin{cases} a > 0, \\ \Delta < 0, \end{cases}$

$$\text{即 } \begin{cases} a > 0, \\ 1 - 4a \times \frac{1}{16} a < 0, \end{cases} \text{ 解得 } a > 2,$$

故 a 的取值范围为 $a > 2$.

(2) 命题 q 是真命题, 不等式 $3^x - 9^x < a$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 均成立, 设 $y = 3^x - 9^x$, 令 $t = 3^x > 0$, 则 $y = t -$

$$t^2, t > 0, \text{ 当 } t = \frac{1}{2} \text{ 时, } y_{\max} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore a > \frac{1}{4}.$$

命题“ $p \vee q$ ”为真命题, “ $p \wedge q$ ”为假命题, 则 p, q 一真一假.

① 若 p 真 q 假, $a > 2$, 且 $a \leq \frac{1}{4}$, 则得 a 不存在;

② 若 p 假 q 真, 则得 $\frac{1}{4} < a \leq 2$.

综上, 实数 a 的取值范围是 $\frac{1}{4} < a \leq 2$.

20. 【解析】(1) 因为当 $x > 0$ 时, $-x < 0$,

$$\text{所以 } f(-x) = \log_2(1+x),$$

$$\text{又因为函数 } f(x) \text{ 为偶函数, 所以 } f(x) = f(-x) = \log_2(1+x),$$

所以 $x > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的表达式为 $f(x) = \log_2(1+x)$.

(2) 当 $x \leq 0$ 时, $|x-1|+1=1-x+1=2-x$,

若 $f(x) = \log_2(1-x) = \log_2(|x-1|+1)$, 则 $1-x=2-x$, 显然不成立;

当 $x > 0$ 时, 若 $f(x) = \log_2(1+x) = \log_2(|x-1|+1)$,

则 $1+x=|x-1|+1$, 即 $x=|x-1|$,

平方后有 $x^2 = x^2 - 2x + 1$, 解得 $x = \frac{1}{2}$, 适合

题意.

综上所述, $M = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

21. 【解析】(1) 根据题意, 由于 $x^2 + x - 1 \geq 1$,

可知不等式的解集为: $x \leq -2$ 或 $x \geq 1$.

$$(2) (a+2)x^2 + 4x + a - 1 > 0,$$

$a = -2$ 不合;

$a \neq -2$ 时, $a+2 > 0$ 且 $\Delta < 0$,

$$\text{即 } \begin{cases} a+2 > 0, \\ 16 - 4(a+2)(a-1) < 0, \end{cases}$$

解得 $a > 2$.

$$(3) ax^2 + x - a - 1 > 0, \text{ 即 } (x-1)(ax+a+1) > 0,$$

因为 $a < 0$, 所以 $(x-1)\left(x + \frac{a+1}{a}\right) < 0$,

$$\text{因为 } 1 - \left(\frac{-a+1}{a}\right) = \frac{2a+1}{a},$$

所以当 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时, $1 < -\frac{a+1}{a}$,

$$\text{解集为 } \left\{x \mid 1 < x < -\frac{a+1}{a}\right\};$$

当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, $(x-1)^2 < 0$, 解集为 $\emptyset$;

当 $a < -\frac{1}{2}$ 时, $1 > -\frac{a+1}{a}$, 解集为 $\left\{x \mid -\frac{a+1}{a} < x < 1\right\}$.

22. 【解析】(1) $f(x) = (2\log_4 x - 2)\left(\log_4 x - \frac{1}{2}\right)$,

$$\text{令 } t = \log_4 x, x \in [2, 4] \text{ 时, } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

$$\text{此时, } y = (2t - 2)\left(t - \frac{1}{2}\right) = 2t^2 - 3t + 1 =$$

$$2\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8},$$

$$\therefore t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \therefore y \in \left[-\frac{1}{8}, 0\right],$$

所以函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{8}, 0\right]$.

(2) $f(x) \geq m \log_4 x$ 对于任意 $x \in [4, 16]$ 恒成立,

即 $2t^2 - 3t + 1 \geq mt$ 对于任意 $t \in [1, 2]$ 恒成立,

$\therefore m \leq 2t + \frac{1}{t} - 3$ 对于任意 $t \in [1, 2]$ 恒成立.

易知 $g(t) = 2t + \frac{1}{t} - 3$ 在 $t \in [1, 2]$ 上单调递增,

$\therefore g(t)_{\min} = g(1) = 0, \therefore m \leq 0$.

(三)

1. D 【解析】 $\because$ 集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$,

$B = \{x | (x+1)(x-3) = 0\} = \{-1, 3\}$,

$\therefore A \cup B = \{-1, 1, 2, 3, 4\}$.

故选 D.

2. B 【解析】因为 $y = e^x$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数, $y = x - 4$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 故 $f(x) = e^x + x - 4$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数. 又 $f(1) = e - 3 < 0, f(2) = e^2 - 2 > 4 - 2 = 2 > 0$, 由零点存在定理可知 $f(x) = e^x + x - 4$ 在 $(1, 2)$ 内存在零点, 故选 B.

3. C 【解析】该厂为了不亏本, 日印图书至少为 x 本, 则利润函数 $f(x) = 10x - (5x + 3\ 000) \geq 0$, 解得 $x \geq 600$.

$\therefore$ 该厂为了不亏本, 日印图书至少为 600 本.

故选 C.

4. A 【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ 的图象与 x 轴的一个交点为 $(1, 0), (3, 0)$

$\therefore$ 方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的两根为 1, 3,

所以函数 $f(x)$ 解析式为 $f(x) = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$.

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 2]$ 上是单调减少的, 在 $[2, +\infty)$ 上是单调增加的.

故选 A.

5. B 【解析】当 $x > 0$ 时, 令 $-1 + \ln x = 0$, 得 $x = e$, 符合; 当 $x < 0$ 时, 令 $3x + 4 = 0$, 得 $x = -\frac{4}{3}$, 符合. 所以 $y = f(x)$ 的零点有 2 个, 选 B.

6. D 【解析】 $\because a > b > 1, 0 < c < 1$,

$\therefore 0 > \log_a c > \log_b c$, A 正确;

$\because y = c^x$ 是减函数, $\therefore c^a < c^b$, B 正确;

$\because y = x^c$ 为增函数, $\therefore a^c > b^c$, C 正确;

$\because y = \log_c x$ 是减函数, $\therefore \log_a c < \log_b c < 0$, D 错误.

故选 D.

7. C 【解析】要使 $y = \log_a(2-ax)$ 在 $[0, 1]$ 上为 x

的减函数, 需使 $\begin{cases} a > 1, \\ a > 0, \\ 2-a > 0, \end{cases}$ 解得 $1 < a < 2$, 故选 C.

8. B 【解析】逆否命题, 条件、结论均否定, 并交换, 所以命题“若 $x^2 - 3x - 4 = 0$, 则 $x = 4$ ”的逆否命题是“若 $x \neq 4$, 则 $x^2 - 3x - 4 \neq 0$ ”, 故 A 正确; 命题“若 $m > 0$, 则方程 $x^2 + x - m = 0$ 有实根”的逆命题为“若方程 $x^2 + x - m = 0$ 有实根, 则 $m > 0$ ”, 由 $\Delta = 1 + 4m \geq 0$, 解得 $m \geq -\frac{1}{4}$, 是假命题, 故 B 错误; $x = 4$ 时, $x^2 - 3x - 4 = 0$, 是充分条件, 故 C 正确; 命题“若 $m^2 + n^2 = 0$, 则 $m = 0$ 且 $n = 0$ ”的否命题是“若 $m^2 + n^2 \neq 0$, 则 $m \neq 0$ 或 $n \neq 0$ ”, 故 D 正确. 故选 B.

9. C 【解析】函数 $f(x) = \frac{x^3 - x}{2^{|x|}} = -f(-x)$, 为奇函

数, 故图象关于原点对称, 故排除 D;

通过函数解析式得到函数有 $-1, 0, 1$ 三个零点, 故排除 A;

当 $x = 2$ 时, 函数值 $f(x) > 0$ 为正数, 故排除 B, 选 C.

10. C 【解析】输入 $x, i = 1, x = 2x - 1, i = 2$, 判断否; $x = 2(2x - 1) - 1 = 4x - 3, i = 3$, 判断否; $x = 2(4x - 3) - 1 = 8x - 7, i = 4$, 判断否; $x = 2(8x - 7) - 1 = 16x - 15, i = 5$, 判断是, 输出 $x = 16x - 15$, 即 $16x - 15 = 0, x = \frac{15}{16}$. 故选 C.

11. C 【解析】由题意, 得 $g(-x) = f(-x-1)$,

又 $\because f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

$\therefore g(-x) = -g(x), f(-x) = f(x)$,

$\therefore f(x-1) = -f(x+1)$, 即 $f(x-1) + f(x+1) = 0$

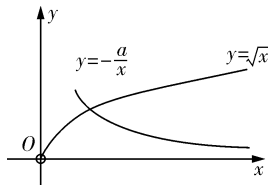
$\therefore f(2\ 018) + f(2\ 020) = f(2\ 019-1) + f(2\ 019+1) = 0$.

12. C 【解析】 $f(x) = \sqrt{x} + \frac{a}{x} = 0$, 得: $\sqrt{x} = -\frac{a}{x}$,

设函数 $y = \sqrt{x}, y = -\frac{a}{x}$,

当 $a < 0$ 时, 如下图, 函数 $y = \sqrt{x}, y = -\frac{a}{x}$ 有交点,

所以 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上存在零点, 充分性成立.



当 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上存在零点时,

如果 $a=0$, 函数 $y=\sqrt{x}$, $y=-\frac{a}{x}=0$ 在 $(0, +\infty)$ 上无交点;

如果 $a>0$, 函数 $y=\sqrt{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上图象在第一象限, $y=-\frac{a}{x}$ 的图象在第四象限, 无交点,

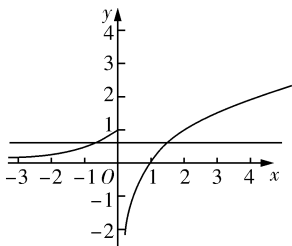
所以 $a<0$, 必要性成立.

所以是充分必要条件, 选 C.

13. $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$

【解析】由题意得 $\begin{cases} x+1>0, \\ x-1\neq 0, \end{cases} \therefore \begin{cases} x>-1, \\ x\neq 1, \end{cases}$ 故函数的定义域为 $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

14. $(0, 1]$ 【解析】当 $x\leq 0$ 时, $0<2^x\leq 1$; 当 $x>0$ 时, $\log_2 x \in \mathbf{R}$. 画出 $f(x)$ 的图象如下:



所以, 由图象可知要使方程 $f(x)-a=0$ 有两个实根,

即函数 $y=f(x)$ 与直线 $y=a$ 有两个交点, 所以 $0<a\leq 1$,

故答案为 $(0, 1]$.

15. $(-\infty, \ln 6]$ 【解析】因为 $f(a)=g(b)$, 所以 $-a^2+6a-5=e^b-2$, 即 $e^b=-a^2+6a-3\leq 6$, 解得 $b\leq \ln 6$.

16. 4 【解析】由题意, 函数 $g(x)=x^2+(4-m)x+m$ 是 $(0, 2]$ 上的“弱增函数”, 则 $g(x)=x^2+(4-m)x+m$ 在 $(0, 2]$ 上是增函

数, 则 $\frac{m-4}{2}\leq 0$, 即 $m\leq 4$,

且 $\frac{g(x)}{x} = \frac{x^2+(4-m)x+m}{x} = x + \frac{m}{x} + (4-m)$ 在 $(0, 2]$ 上是减函数,

则①当 $m\leq 0$ 时, 函数 $\frac{g(x)}{x} = x + \frac{m}{x} + (4-m)$ 在 $(0, 2]$ 上是增函数, 不合题意;

②当 $m>0$ 时, 函数 $\frac{g(x)}{x} = x + \frac{m}{x} + (4-m)$ 是 $(0, 2]$ 上是减函数, 则 $\sqrt{m}\geq 2$,

解得 $m\geq 4$.

综上所述, 实数 m 的取值是 $m=4$.

$$\begin{aligned} 17. \text{【解析】} (1) & \left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} + (1.5)^{-2} \\ &= \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{2\times\frac{1}{2}} - \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \frac{3}{2} - \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}} \div (x^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{y}) \\ &= 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}} \cdot (x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}}) \\ &= 2xy^{\frac{1}{6}}. \end{aligned}$$

18. 【解析】(1) 函数 $f(x)$ 是实数集 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

所以 $f(-1)=-f(1)$.

因为当 $x>0$ 时, $f(x)=\log_2 x+x-3$, 所以 $f(1)=\log_2 1+1-3=-2$.

所以 $f(-1)=-f(1)=2$.

当 $x=0$ 时, $f(0)=f(-0)=-f(0)$, 解得 $f(0)=0$,

当 $x<0$ 时, $-x>0$, 所以 $f(-x)=\log_2(-x)+(-x)-3=\log_2(-x)-x-3$.

所以 $-f(x)=\log_2(-x)-x-3$, 从而 $f(x)=-\log_2(-x)+x+3$.

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} -\log_2(-x)+x+3, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ \log_2 x+x-3, & x>0. \end{cases}$$

(2) 因为 $f(2)=\log_2 2+2-3=0$, 所以方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上有解 $x=2$.

易知 $f(x)=\log_2 x+x-3$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

由零点存在性定理可知, 方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上有唯一解.

19. 【解析】(1) 当 $0 \leq x \leq 30, x \in \mathbf{N}$ 时, $y = 400x + 1\,000x = 1\,400x$;

当 $30 < x \leq 60, x \in \mathbf{N}$ 时,

$$y = 400x + [1\,000 - 20(x - 30)] \cdot x \\ = -20x^2 + 2\,000x,$$

$$\text{故 } y = \begin{cases} 1\,400x, & 0 \leq x \leq 30, x \in \mathbf{N}, \\ -20x^2 + 2\,000x, & 30 < x \leq 60, x \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

(2) 当 $0 \leq x \leq 30, x \in \mathbf{N}$ 时,

$$y \leq 1\,400 \times 30 = 42\,000 \text{ 元, 此时 } x = 30;$$

当 $30 < x \leq 60, x \in \mathbf{N}$ 时,

$$y \leq -20 \times 50^2 + 2\,000 \times 50 = 50\,000 \text{ 元, 此时 } x = 50.$$

综上所述, 公司此次培训的总费用最多需要 50 000 元.

20. 【解析】(1) 由题意可得 $f(2) = m + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$,

$$\text{即有 } m = -\frac{1}{2}, \text{ 即 } f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{1}{2},$$

由 $f(x) = 0$, 可得 $x = 1$,

由题意可得 $h(1) = a - 2 = 0$, 即 $a = 2$.

(2) 函数 $f(x)$ 在 $[-2, 0]$ 上递减, 可得 $f(x)$ 的最大值为 $f(-2) = 4 + m = \frac{7}{2}$,

若函数 $f(x)$ 在 $[-2, 0]$ 上的最大值等于 $h(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的最小值,

由 $h(x)$ 的对称轴为 $x = \frac{1}{a}$,

当 $a > 0$ 时, 由 $\frac{1}{a} < 1$ 可得 $a > 1$, 即有 $h(x)$ 在 $[1, 2]$ 上递增,

可得 $h(x)$ 的最小值为 $h(1) = a - 2$,

$$\text{由 } a - 2 = \frac{7}{2}, \text{ 解得 } a = \frac{11}{2};$$

当 $a < 0$ 时, $h(x)$ 在 $[1, 2]$ 上递减, 即有 $h(x)$ 的最小值为 $h(2) = 4a - 4$,

$$\text{由 } 4a - 4 = \frac{7}{2}, \text{ 解得 } a = \frac{15}{8}, \text{ 又 } a < 0, \text{ 不符题意.}$$

综上可得 $a = \frac{11}{2}$.

21. 【解析】(1) 由题意得 p 和 q 均是真命题,

由不等式 $2^x + 1 < a$ 的解集为 $\emptyset$, 得 $a \leq 1$,

由函数 $y = \lg(ax^2 - x + a)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$ 得 $x \in \mathbf{R}$ 时 $ax^2 - x + a > 0$ 恒成立,

$$\text{故 } \begin{cases} a > 0, \\ \Delta_1 = 1 - 4a^2 < 0 \end{cases} \Rightarrow a > \frac{1}{2},$$

由题意得命题 p 和命题 q 均正确,

综上, a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$.

(2) 由命题 m 得 $\Delta_2 = b^2 - 4a \geq 0$, 解得 $a \leq \frac{1}{4}b^2$,

由 $\neg p$ 是 $\neg m$ 的充分不必要条件得 m 是 p 的充分不必要条件,

$$\therefore \left(-\infty, \frac{1}{4}b^2\right] \subset (-\infty, 1],$$

$$\therefore \frac{1}{4}b^2 < 1,$$

$$\therefore b \in (-2, 2).$$

22. 【解析】(1) $\because f(-1) = 0, \therefore a - m + m - 1 = 0$,

$$\therefore a = 1$$

$$\therefore f(x) = x^2 + mx + m - 1$$

$$\Delta = m^2 - 4(m - 1) = (m - 2)^2,$$

当 $m = 2$ 时, $\Delta = 0$, 函数 $f(x)$ 有一个零点;

当 $m \neq 2$ 时, $\Delta > 0$, 函数 $f(x)$ 有两个零点.

(2) 已知 $a \neq 0$,

则 $\Delta = m^2 - 4a(m - 1) > 0$ 对于 $m \in \mathbf{R}$ 恒成立,

即 $m^2 - 4am + 4a > 0$ 恒成立;

所以 $\Delta' = 16a^2 - 16a < 0$,

解得 $0 < a < 1$.

$$(3) \text{ 设 } g(x) = f(x) - \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)],$$

$$\text{则 } g(x_1) = f(x_1) - \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$$

$$= \frac{1}{2}[f(x_1) - f(x_2)],$$

$$g(x_2) = f(x_2) - \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$$

$$= \frac{1}{2}[f(x_2) - f(x_1)],$$

$$\therefore f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\therefore g(x_1) \cdot g(x_2) = -\frac{1}{4}[f(x_1) - f(x_2)]^2 < 0$$

$\therefore g(x)=0$ 在区间 (x_1, x_2) 上有实数根,

即方程 $f(x)=\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ 在区间 (x_1, x_2) 上有实数根.

(四)

1. C 【解析】①的定义域不是 M ; ④不是函数.

2. C 【解析】 $A=\{x|y=x\sqrt{x}\}=\{x|x\geq 0\}$, $B=\{y|y=-x^2\}=\{y|y\leq 0\}$,
故 $\complement_U B=\{y|y>0\}$, $A\cap(\complement_U B)=\{x|x>0\}$.

3. B 【解析】 $\therefore f(x)=\begin{cases} \log_2 x, & x>0, \\ 3^x, & x\leq 0, \end{cases}$
 $\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_2 \frac{1}{2}=-1$, $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(-1)=$
 $3^{-1}=\frac{1}{3}$.

故选 B.

4. A 【解析】令 $t=\ln x$, $x=e^t$, 故 $f(t)=3e^t+4$, 即
 $f(x)=3e^x+4$.

5. C 【解析】 $a=\log_9 72<\log_9 81=2$, $b=\log_2 2^\pi=\pi$, $c=2^{\log_2 e}=e$, 所以 $b>c>a$, 故选 C.

6. D 【解析】对于 A, 当 $x=1$ 时不成立;

对于 B, 当 $x\in(1, +\infty)$ 时, $\lg x>0$, 而 $-x<0$, 不成立;

对于 C, 当 $a=1$ 时不成立;

对于 D, $\exists a=2\in(0, +\infty)$, $x^2+a=x^2+2>1$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立, 正确.

故选 D.

7. D 【解析】设定价在进价的基础上增加 x 元, 日销售利润为 y 元, 则

$$y=x[480-40(x-1)]-200,$$

由于 $x>0$, 且 $520-40x>0$, 所以 $0<x<13$;

即 $y=-40x^2+520x-200$, $0<x<13$.

所以当 $x=\frac{520}{80}=6.5$ 时, y 取最大值.

$\therefore$ 销售单价应定为 $5+6.5=11.5$ 元, 故选 D.

8. A 【解析】 $\therefore f(x)=\ln x-\frac{2}{x}$, 则函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

又 $f(1)=\ln 1-2=-2<0$, $f(2)=\ln 2-1<0$,

$$f(3)=\ln 3-\frac{2}{3}>0,$$

$$\therefore f(2)f(3)<0,$$

$\therefore$ 函数 $f(x)=\ln x-\frac{2}{x}$ 在区间 $(2, 3)$ 内存在唯一的零点

$\therefore x_0$ 是函数 $f(x)=\ln x-\frac{2}{x}$ 的零点,

$$\therefore 2<x_0<3,$$

$$\therefore [x_0]=2,$$

故选 A.

9. C 【解析】输入的 ϵ 为 0.01 , $x=1$,

$$s=0+1, x=\frac{1}{2}<0.01? \text{ 不满足条件};$$

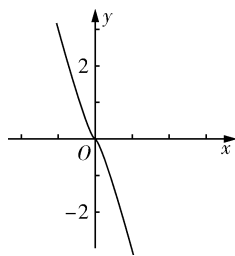
$$s=0+1+\frac{1}{2}, x=\frac{1}{4}<0.01? \text{ 不满足条件};$$

$\dots$;

$$s=0+1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^6}, x=\frac{1}{128}=0.0078125<0.01? \text{ 满足条件},$$

$$\text{输出 } s=1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^6}=2\left(1-\frac{1}{2^7}\right)=2-\frac{1}{2^6}, \text{ 故选 C.}$$

10. A 【解析】函数 $f(x)$ 的图象如图所示, 则由图象得函数 $f(x)$ 为奇函数且在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减, 由 $f(a)-f(-a)\leq 2f(1)$, 得 $2f(a)\leq 2f(1)$, 即 $f(a)\leq f(1)$, 则 $a\geq 1$. 故选 A.



11. B 【解析】由题得 $f(x+4)=f[(x+2)+2]=f(-x-2)=-f(x+2)=-f(-x)=f(x)$,
所以函数 $f(x)$ 的周期为 4,

因为 $f(1)=4$,

$$\therefore f(2)=f(-0)=f(0)=0,$$

$$f(3)=f(-1)=-f(1)=-4,$$

$$f(4)=f(0)=0,$$

$$\text{所以 } f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0,$$

因为 $2\ 020=4\times 505$,

所以 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\ 020)=0$.

故答案为 B.

12. A 【解析】因为函数 $f(x)=1-\sqrt{x+1}$ 在 $[0,+\infty)$ 上的值域为 $(-\infty,0]$,

存在 $x_2\in\mathbf{R}$,使得 $f(x_1)=g(x_2)$,

根据对数函数的性质可知: $h(x)=ax^2-3x+1$ 至少要取遍 $(0,1]$ 中的每一个数.

又 $h(0)=1$,根据二次函数的图象和性质,

实数 a 需要满足 $a\leq 0$ 或 $\begin{cases} a>0, \\ \Delta=9-4a\geq 0, \end{cases}$

解得 $a\leq \frac{9}{4}$.

故选 A.

13. $(-\infty, \frac{3}{4}]$ 【解析】由 $8-16^x\geq 0$,所以 $2^{4x}\leq 2^3$,

即 $4x\leq 3$,定义域是 $(-\infty, \frac{3}{4}]$.

14. $[0,+\infty)$ 【解析】当 $x\leq 1$ 时, $2^{1-x}\leq 2$ 的可变形为 $1-x\leq 1$,所以 $x\geq 0$,所以 $0\leq x\leq 1$;

当 $x>1$ 时, $1-\log_2 x\leq 2$ 的可变形为 $x\geq \frac{1}{2}$,

所以 $x>1$.

综上可知满足 $f(x)\leq 2$ 的 x 的取值范围是 $[0,+\infty)$.

15. 24 【解析】 $192=e^b$, $48=e^{22k+b}$, $\therefore e^{22k}=\frac{1}{4}$,

$\therefore y=e^{33k+b}=192\times\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=24$.

16. ①②③

【解析】对于①,由于 $f(-x)=\frac{-x}{1+|-x|}=-\frac{x}{1+|x|}=-f(x)$,所以①正确.

对于②,由于 $|f(x)|=\frac{|x|}{1+|x|}<1$,

所以 $-1<f(x)<1$,

因此函数 $f(x)$ 的值域为 $(-1,1)$,故②正确.

对于③,当 $x>0$ 时, $f(x)=\frac{x}{1+x}=\frac{x+1-1}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}$,所以函数 $f(x)$ 单调递增,且 $f(x)>0$;

当 $x<0$ 时, $f(x)=\frac{x}{1-x}=-\frac{x}{x-1}=-\frac{x-1+1}{x-1}$

$=-1-\frac{1}{x-1}$,所以函数 $f(x)$ 单调递增,且 $f(x)<0$.

又函数 $f(x)$ 为奇函数, $f(0)=0$.

所以函数 $f(x)$ 在定义域内单调递增.

因此若 $x_1\neq x_2$,则一定有 $f(x_1)\neq f(x_2)$.故③正确.

对于④,由 $g(x)=f(x)-x=0$,得 $f(x)=x$,

即 $\frac{x}{1+|x|}=x$,解得 $x=0$,所以函数 $g(x)$ 只有一个零点.

综上①②③正确.

17. 【解析】(1)原式 $=\lg 2\cdot \lg (25\times 2)+\lg 5\cdot \lg (4\times 5)-2\lg 5\cdot \lg 2$

$=\lg 2(2\lg 5+\lg 2)+\lg 5(2\lg 2+\lg 5)-2\lg 5\cdot \lg 2$

$=2\lg 2\lg 5+(\lg 2)^2+2\lg 2\lg 5+(\lg 5)^2-2\lg 5\lg 2$

$=(\lg 2+\lg 5)^2=(\lg 10)^2=1$.

(2) $\log_{25} 12=\frac{\log_5 12}{\log_5 25}=\frac{\log_5 3+\log_5 4}{\log_5 5^2}=\frac{a+b}{2}$.

18. 【解析】(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

由 $f(-x)=f(x)$ 得 $\frac{1}{x^2}-ax=\frac{1}{x^2}+ax$.

所以 $ax=0$.

因为 $ax=0$ 对于定义域中任意的 x 都成立,

所以 $a=0$.

(2)函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

证明:在 $(0,+\infty)$ 上任取 x_1, x_2 ,且 $x_1<x_2$,

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2}$

$=\frac{(x_1+x_2)(x_2-x_1)}{x_1^2x_2^2}$,

由 $0<x_1<x_2$,得 $x_1+x_2>0$, $x_2-x_1>0$, $x_1^2x_2^2>0$,

于是 $f(x_1)-f(x_2)>0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$.

所以函数 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是减函数.

19. 【解析】(1) $\because$ 函数 $y = \frac{1}{x} - x$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减,

$$\therefore \left(\frac{1}{x} - x\right)_{\max} = 0,$$

当命题 q 为真命题时, $4a^2 - 1 \geq 0$,

$$\therefore a \geq \frac{1}{2} \text{ 或 } a \leq -\frac{1}{2}.$$

(2) 当命题 p 为真命题时, $\Delta = 4a^2 - 4 \geq 0$,

$$a \geq 1 \text{ 或 } a \leq -1.$$

由命题 $p \vee q$ 为真, 且 $p \wedge q$ 为假, 得命题 p, q 一真一假

$$\text{当 } p \text{ 真 } q \text{ 假时, 则 } \begin{cases} a \geq \frac{1}{2} \text{ 或 } a \leq -\frac{1}{2}, \\ -1 < a < 1, \end{cases} \text{ 得 } -1 < a$$

$$\leq -\frac{1}{2} \text{ 或 } \frac{1}{2} \leq a < 1.$$

$$\text{当 } p \text{ 假 } q \text{ 真时, 则 } \begin{cases} -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}, \\ a \geq 1 \text{ 或 } a \leq -1, \end{cases} \text{ 得 } a \in \emptyset,$$

$$\therefore \text{实数 } a \text{ 的取值范围是 } \left(-1, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right).$$

20. 【解析】(1) 设该产品每吨的价格上涨 $x\%$ 时, 销售总金额为 y 万元.

$$\text{由题意得: } y = 10 \times 1\,000 \times (1 + x\%) \times (1 - mx\%),$$

$$\text{即 } y = -mx^2 + 100(1-m)x + 10\,000 (0 < x \leq 80),$$

$$\text{当 } m = \frac{1}{2} \text{ 时, } y = -\frac{1}{2}(x-50)^2 + 11\,250,$$

$$\text{当 } x = 50 \text{ 时, } y_{\max} = 11\,250 \text{ 万元.}$$

故该产品每吨的价格上涨 50% 时, 销售总金额最大.

$$(2) \text{ 由 (1) 得: } y = -mx^2 + 100(1-m)x + 10\,000 (0 < x \leq 80),$$

如果涨价能使销售总金额比原销售总金额多, 则有当 $0 < x \leq 80\%$ 时, $y > 10\,000$,

$$\text{即 } -mx^2 + 100(1-m)x + 10\,000 > 10\,000 (0 < x \leq 80),$$

$$\text{即 } -mx + 100(1-m) > 0 \text{ 当 } 0 < x \leq 80 \text{ 时恒成立.}$$

$$\because m > 0, \therefore \frac{100(1-m)}{m} > x_{\max}, \text{ 即 } \frac{100(1-m)}{m} > 80,$$

$$\text{解得 } 0 < m < \frac{5}{9}, \therefore m \text{ 的取值范围是 } 0 < m < \frac{5}{9}.$$

21. 【解析】(1) $f(x) = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1 \leq 1$,

$$\text{令 } t = f(x) = -(x-1)^2 + 1 \leq 1$$

$$\text{则 } y = \left(\frac{1}{2}\right)^t \text{ 为 } (-\infty, 1] \text{ 上的减函数,}$$

$$\text{因此, 则当 } x = 1 \text{ 时, } y_{\min} = \frac{1}{2}.$$

(2) 法一:

$$\textcircled{1} \text{ 当 } 0 < m < n \leq 1 \text{ 时, } \frac{1}{m} > 1,$$

而当 $x \geq 0$ 时, $f(x)$ 的最大值为 1, 故此时不可能使 $g(x) = f(x)$, 且 $g(x)$ 的值域为 $\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right]$.

$$\textcircled{2} \text{ 当 } 0 < m < 1 < n \text{ 时,}$$

$$\text{则 } g(x) \text{ 最大值为 } g(1) = f(1) = 1, \text{ 即 } \frac{1}{m} = 1,$$

得 $m = 1$ 与 $0 < m < 1 < n$ 矛盾,

故此时不可能.

$$\textcircled{3} \text{ 当 } 1 \leq m < n \text{ 时,}$$

$$\because x \geq 1 \text{ 时, } f(x) \text{ 为减函数, 则 } g(x) = f(x) = 2x - x^2,$$

$$\text{于是 } \frac{1}{n} = g(n) = 2n - n^2, \text{ 即 } (n-1)(n^2 - n - 1) = 0,$$

$$\frac{1}{m} = g(m) = 2m - m^2, \text{ 即 } (m-1)(m^2 - m - 1) = 0$$

$$\because 1 \leq m < n, \therefore m = 1, n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

$$\text{综上所述, } m = 1, n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

法二:

$$g(x) = f(x) = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1 \leq 1,$$

$$\therefore \frac{1}{m} \leq 1, \text{ 即 } m \geq 1, \text{ 即 } 1 \leq m < n, f(x) \text{ 为 } [m, n] \text{ 上}$$

的减函数,

$$\text{于是 } \frac{1}{n} = g(n) = 2n - n^2,$$

$$\text{即 } (n-1)(n^2 - n - 1) = 0,$$

$$\frac{1}{m} = g(m) = 2m - m^2,$$

$$\text{即 } (m-1)(m^2-m-1)=0$$

$$\because 1 \leq m < n, \therefore m=1, n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

22. 【解析】(1) 函数 $f(x)$ 为奇函数, 理由如下:

$$\text{令 } x=y=0, \text{ 则 } f(0)+f(0)=f(0),$$

$$\text{得 } f(0)=0,$$

$$\text{令 } y=-x, \text{ 则 } f(x)+f(-x)=f(0)=0,$$

$$\text{所以 } f(-x)=-f(x),$$

所以函数 $f(x)$ 是 $(-1, 1)$ 上的奇函数.

$$(2) \text{ 设 } 0 < x_1 < x_2 < 1,$$

$$f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)+f(-x_2)$$

$$=f\left(\frac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}\right)$$

$$\text{因为 } x_1-x_2 < 0, 0 < x_1x_2 < 1, 1-x_1x_2 > 0,$$

$$\text{所以 } \frac{x_1-x_2}{1-x_1x_2} < 0, f\left(\frac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}\right) > 0,$$

$$\text{所以 } f(x_1)-f(x_2) > 0,$$

$$\text{所以 } f(x_1) > f(x_2)$$

因此 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减.

$$(3) f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{11}\right)-f\left(\frac{1}{19}\right)$$

$$=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(-\frac{1}{11}\right)+f\left(-\frac{1}{19}\right)$$

$$=f\left(\frac{3}{7}\right)+f\left(-\frac{1}{19}\right)$$

$$=f\left(\frac{5}{13}\right)$$

$$\text{因为 } f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{1}{5}\right)=f\left(\frac{5}{13}\right)=1,$$

$$\text{所以 } f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{11}\right)-f\left(\frac{1}{19}\right)=1.$$

(五)

1. D 【解析】因为 $A=\{x|x^2 < 5x\}=\{x|0 < x < 5\}$,

所以是集合 $A=\{x|x^2 < 5x\}$ 的真子集的是 $(1, 5)$.

故选 D.

2. A 【解析】 $\because s=t^2+\frac{1}{t}$,

$$\therefore s'=2t-\frac{1}{t^2},$$

$$\text{当 } t=1 \text{ 时, } v=s'=1.$$

故选 A.

3. C 【解析】函数 $f(x)=xe^x$ 的导数为 $f'(x)=(x+1)e^x$, 由导数的几何意义, 可得在点 $A(0, f(0))$ 处的切线斜率为 $k=f'(0)=(0+1) \cdot e^0=1$. 故选 C.

4. B 【解析】当 $a>0, b>0$ 时, 由 $x>a, y>b$ 可以推出 $x+y>a+b$, 且 $xy>ab$.

但反过来, 由 $a>0, b>0, x+y>a+b, xy>ab$ 不一定推出 $x>a, y>b$.

$$\text{比如, } x=1, y=\frac{1}{3}, a=\frac{1}{3}, b=\frac{3}{5} \text{ 满足 } 1+\frac{1}{3}>\frac{1}{3}+\frac{3}{5}, \text{ 且 } 1 \cdot \frac{1}{3}>\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}.$$

$$\text{但 } x=1>\frac{1}{3}=a, y=\frac{1}{3}<\frac{3}{5}=b.$$

因此, $a, b \in \mathbf{R}^+, x+y>a+b$ 且 $xy>ab$ 是 $x>a$ 且 $y>b$ 的必要不充分条件.

故答案为 B.

5. B 【解析】因为 $f(x)=x \ln x$,

$$\therefore f'(x)=1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1,$$

$$\text{故 } f'(x_0)=2 \text{ 可化为 } \ln x_0 + 1 = 2,$$

故 $x_0=e$, 故选 B.

6. D 【解析】依据原函数图象可看出①当 $x < 0$ 时, 函数 $y=f(x)$ 递增, 所以此时 $f'(x) > 0, y=f'(x)$ 的图象在 x 轴上方; ②当 $x > 0$ 时, 函数 $y=f(x)$ 递减, 所以 $f'(x) < 0, y=f'(x)$ 的图象在 x 轴下方, 故选 D.

7. B 【解析】 $f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$, 故函数在 $[-3, -2], [2, 3]$ 区间上为增函数, 在区间 $[-2, 2]$ 上为减函数. $f(-3)=-27+36=9$, $f(-2)=-8+24=16$, $f(2)=8-24=-16$, $f(3)=-27-36=-63$, 故最小值为 $f(2)=-16$. 故选 B.

8. A 【解析】设 $y=f(x)=e^x+1$, 则 $f'(x)=e^x$,

$$\therefore f'(1)=e, f(1)=1+e,$$

在点 $(1, 1+e)$ 处的切线方程为: $y-1-e=e(x-1)$, 即 $y=ex+1$,

与坐标轴的交点为: $(0, 1), \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$,

$$S=\frac{1}{2} \times \frac{1}{e} \times 1 = \frac{1}{2e},$$

故选 A.

9. B 【解析】如图所示,设圆柱的

半径为 r , 高为 x , 体积为 V , 由

题意可得 $\frac{r}{1} = \frac{2-x}{2}$, 所以 $x = 2$

$-2r$, 所以圆柱的体积 $V =$

$\pi r^2(2-2r) = 2\pi(r^2-r^3) (0 < r$

$< 1)$, 设 $V(r) = 2\pi(r^2-r^3) (0 < r < 1)$, 则 $V'(r) =$

$2\pi(2r-3r^2)$, 由 $2\pi(2r-3r^2) = 0$ 得 $r = \frac{2}{3}$, $V(r)$ 在

$(0, \frac{2}{3})$ 上递增, $V(r)$ 在 $(\frac{2}{3}, 1)$ 上递减, 所以圆柱

的最大体积 $V_{\max} = 2\pi\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3\right] = \frac{8\pi}{27}$, 故

选 B.

10. A 【解析】因为函数 $f(x) = (x^2 - m)e^x$, 所以

$f'(x) = e^x(x^2 - m + 2x)$, 由函数 $f(x)$ 的图象在 x

$= 1$ 处切线的斜率为 $3e$, 所以 $f'(1) = e(1 - m +$

$2) = e(3 - m) = 3e$, 所以 $m = 0$, 即 $f'(x) = e^x(x^2$

$+ 2x) = 0$ 的根 $-2, 0$, 因为 $e^x > 0$, 所以函数 $f(x)$

在 $(-\infty, -2)$ 上递增, 在 $(-2, 0)$ 上递减, 在 $(0,$

$+\infty)$ 上递增, 所以函数 $f(x)$ 的极大值 $f(-2) =$

$4e^{-2}$. 故选 A.

11. B 【解析】 $f'(x) = \cos x + 2f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$,

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} + 2f'\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{解得 } f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},$$

所以 $f(x) = \sin x - x$.

因为 $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$,

所以 $f(x)$ 为减函数.

因为 $b = \log_3 2 > \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2} = a$,

所以 $f(a) > f(b)$, 故选 B.

12. A 【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = (2x-1)e^x + ax^2 - 3a$

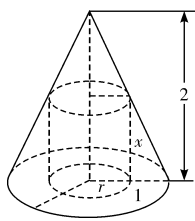
$(x > 0)$ 为增函数,

$\therefore f'(x) = (2x+1)e^x + 2ax \geq 0$,

化为 $2a \geq -\left(2 + \frac{1}{x}\right)e^x$,

令 $g(x) = -\left(2 + \frac{1}{x}\right)e^x$,

则 $g'(x) = -\frac{(2x-1)(x+1)e^x}{x^2}$,



可得: $x = \frac{1}{2}$ 时, 函数 $g(x)$ 取得极大值即最大值,

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = -4\sqrt{e}.$$

$$\therefore a \geq -2\sqrt{e}.$$

$\therefore a$ 的取值范围是 $[-2\sqrt{e}, +\infty)$.

故选 A.

13. 4 【解析】 $\because y' = 2x - 1, \therefore y'|_{x=-2} = -5$,

又 $P(-2, 6+c)$, 抛物线在点 P 的切线恰好过坐标原点,

$$\therefore \frac{6+c}{-2} = -5. \therefore c = 4.$$

故答案为 4.

14. 3 【解析】输入 $a = 7, b = 3, n = 1$,

进入循环, $a = a + \frac{a}{2} = \frac{21}{2}, b = 2b = 6$, 不满足 $a \leq b$,

执行循环, $n = n + 1 = 2, a = a + \frac{a}{2} = \frac{63}{4}, b = 2b =$

12 , 不满足 $a \leq b$,

执行循环, $n = n + 1 = 3, a = a + \frac{a}{2} = \frac{189}{8}, b = 2b =$

24 , 满足 $a \leq b$, 输出 $n = 3$, 故答案为 3.

15. $\left[0, \frac{4}{27}\right)$ 【解析】 $f'(x) = x(3x-2)$,

令 $f'(x) > 0$, 解得: $x > \frac{2}{3}$ 或 $x < 0$,

令 $f'(x) < 0$, 解得: $0 < x < \frac{2}{3}$,

故 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{2}{3}\right)$ 上递减, 在 $\left(\frac{2}{3}, 1\right]$ 上递增,

若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上恰好有两个零点,

$$\text{则 } \begin{cases} f(0) \geq 0, \\ f\left(\frac{2}{3}\right) < 0, \text{ 解得: } 0 \leq a < \frac{4}{27}, \\ f(1) \geq 0, \end{cases}$$

故答案为 $\left[0, \frac{4}{27}\right)$.

16. $e-1$ 【解析】移项, 得到 $k \leq \frac{e^x - \ln x - 1}{x}$, 构造函数

数 $h(x) = \frac{e^x - \ln x - 1}{x}$, 计算导函数得到 $h'(x) =$

$\frac{e^x(x-1) + \ln x}{x^2}$, 发现当 $x \in (0, 1)$ 时, $h(x)$ 递减,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h(x)$ 递增, 故当 $x = 1$ 时, $h(x)$ 取

到最小值为 $e-1$, 故 k 的最大值为 $e-1$.

17. 【解析】(1) 原式 $= \frac{1}{2} \log_3 3 + \lg(25 \times 4) - 2 = \frac{1}{2} + 2 - 2 = \frac{1}{2}$.

(2) 原式 $= \left(\frac{3}{2}\right)^{2 \times \frac{1}{2}} - 1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)} + \frac{4}{9} = \frac{3}{2} - 1 - \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{1}{2}$.

18. 【解析】(1) 要使函数 $f(x)$ 有意义, 必有

$$\begin{cases} 2-x > 0, \\ 4+x > 0, \end{cases} \text{ 得 } -4 < x < 2.$$

$\therefore f(x)$ 的定义域为 $\{x | -4 < x < 2\}$.

(2) $\because f(x) = \log_a [(2-x)(4+x)]$,

$\therefore f(x) = \log_a (-x^2 - 2x + 8) = \log_a [-(x+1)^2 + 9]$,

$\therefore f(x)_{\min} = \log_a 9 = -2$, 即 $a^{-2} = 9$,

解得 $a = \frac{1}{3}$ 或 $a = -\frac{1}{3}$.

又 $\because a > 0$ 且 $a \neq 1$,

$\therefore a = \frac{1}{3}$.

19. 【解析】(1) $\because f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + 4x$,

$\therefore f'(x) = x^2 - 2ax + 4$, 则 $f'(1) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$,

可得 $a = 2$.

(2) 由函数 $y = f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增,

则 $f'(x) = x^2 - 2ax + 4 \geq 0$ 对一切的 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 恒成立.

即 $a \leq \frac{1}{2} \left(x + \frac{4}{x}\right)$ 恒成立,

令 $g(x) = \frac{x^2 + 4}{2x} = \frac{1}{2} \left(x + \frac{4}{x}\right)$,

函数 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递减, 当 $x = \frac{1}{2}$ 时,

$g(x) = \frac{17}{4}$,

所以 a 的取值范围是 $a \leq \frac{17}{4}$.

20. 【解析】(1) 显然函数 $f(x) = \ln x - a^2 x^2 + ax$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{x} - 2a^2 x + a$$

$$= \frac{-2a^2 x^2 + ax + 1}{x}$$

$$= \frac{-(2ax+1)(ax-1)}{x}.$$

$\because a \geq 1, x > 1, \therefore 2ax+1 > 0, ax-1 > 0$,

$\therefore f'(x) < 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是减函数.

(2) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = \ln x - x^2 + x$, 其定义域是 $(0, +\infty)$,

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = -\frac{2x^2 - x - 1}{x}.$$

令 $f'(x) = 0$, 即 $-\frac{2x^2 - x - 1}{x} = 0$, 解得 $x = -\frac{1}{2}$

或 $x = 1$.

$\because x > 0, \therefore x = -\frac{1}{2}$ 舍去.

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增, 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore$ 当 $x = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最大值, 其值为 $f(1) = \ln 1 - 1^2 + 1 = 0$,

当 $x \neq 1$ 时, $f(x) < f(1)$, 即 $f(x) < 0$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 只有一个零点.

21. 【解析】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{2}{x} - a$,

① $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

所以 $f(x)$ 无极大值.

② $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{2}{a}$.

$x \in \left(0, \frac{2}{a}\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为增函数,

$x \in \left(\frac{2}{a}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 为减函数,

故 $f(x)$ 的极大值为 $f\left(\frac{2}{a}\right) = 2\ln \frac{2}{a} - 2$, 无极大值.

综上, $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 无极大值; $a > 0$ 时, $f(x)$ 的极大

值为 $f\left(\frac{2}{a}\right)=2\ln \frac{2}{a}-2$, 无极小值.

(2) 解法一: 依题意, $2\ln x-ax+\frac{a}{x}\leq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立,

令 $g(x)=2\ln x-ax+\frac{a}{x}$, 即 $g(x)\leq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立,

$$g'(x)=\frac{-ax^2+2x-a}{x^2},$$

① $a\leq 0$ 时, $g'(x)>0$, $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上为增函数,

$x\in(1, +\infty)$ 时, $g(x)>g(1)=0$, 不合题意, 舍去;

② $a\geq 1$ 时, 令 $g'(x)=0$, 则 $ax^2-2x+a=0$, $\Delta=4(1-a^2)\leq 0$,

所以 $x\in[1, +\infty)$ 时, $g'(x)<0$, $g(x)$ 为减函数, 所以 $g(x)\leq g(1)=0$, 适合题意;

③ $0<a<1$ 时, $\Delta>0$, 方程 $ax^2-2x+a=0$ 有两个不等实根 $\frac{1\pm\sqrt{1-a^2}}{a}$,

$$\text{因为 } 0<\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}<1<\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a},$$

所以 $x\in\left[1, \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right]$ 时, $g'(x)\geq 0$, $g(x)$ 为增函数,

故 $g\left(\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right)>g(1)=0$, 不合题意, 舍去.

综上, a 的取值范围为 $[1, +\infty)$.

解法二: 依题意, $2\ln x-ax+\frac{a}{x}\leq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立,

令 $g(x)=ax-\frac{a}{x}-2\ln x$, 即 $g(x)\geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立,

$$g'(x)=a\left(\frac{1}{x^2}+1\right)-\frac{2}{x}=\frac{1}{x^2}(ax^2-2x+a),$$

① $a\geq 1$ 时, 因为 $g'(x)\geq \frac{1}{x^2}+1-\frac{2}{x}=\left(\frac{1}{x}-1\right)^2\geq 0$,

所以 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上为增函数,

故 $g(x)\geq g(1)=0$, 适合题意;

② $0<a<1$ 时, 令 $h(x)=ax^2-2x+a$,

$$h(x)=a\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+\left(a-\frac{1}{a}\right), x\in[1, +\infty),$$

因为 $h(1)=2a-2<0$, $[h(x)]_{\min}=h\left(\frac{1}{a}\right)=a-\frac{1}{a}<0$,

所以 $x\in\left[1, \frac{1}{a}\right]$ 时, $h(x)$ 为减函数且 $h(x)<0$,

所以 $g'(x)<0$, $g(x)$ 为减函数,

所以 $x\in\left(1, \frac{1}{a}\right)$ 时, $g(x)<g(1)=0$, 不合题意, 舍去;

③ $a<0$ 时, $h(x)$ 的对称轴为 $x=\frac{1}{a}$, 因为 $\frac{1}{a}<0$,

$$h(1)=2a-2<0,$$

所以 $x\in[1, +\infty)$ 时, $h(x)$ 为减函数且 $h(x)<0$,

所以 $g'(x)<0$, 故 $g(x)$ 为减函数,

所以 $x\in(1, +\infty)$ 时, $g(x)<g(1)=0$, 不合题意, 舍去.

综上, a 的取值范围为 $[1, +\infty)$.

22. 【解析】(1) $\because f(1)=a+b+c=-\frac{a}{2}$,

$$\therefore c=-\frac{3}{2}a-b,$$

$$\because 3a>2c=-3a-2b, \therefore 3a>-b,$$

$$\because 2c>2b, \therefore -3a>4b.$$

$$\text{若 } a>0, \text{ 则 } -3<\frac{b}{a}<-\frac{3}{4};$$

$$\text{若 } a=0, \text{ 则 } 0>-b, 0>b, \text{ 不成立};$$

$$\text{若 } a<0, \text{ 则 } -\frac{3}{4}<\frac{b}{a}<-3, \text{ 不成立}.$$

$$\text{综上可知: } a>0 \text{ 且 } -3<\frac{b}{a}<-\frac{3}{4}.$$

$$(2) f(0)=c, f(2)=4a+2b+c, f(1)=a+b+c=-\frac{a}{2},$$

$$\Delta=b^2-4ac=b^2+4ab+6a^2>0,$$

① 当 $c>0$ 时, $f(0)>0$, $f(1)<0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上至少有一个零点.

② 当 $c=0$ 时, $f(0)=0$, $f(1)<0$, $f(2)=4a+2b=a>0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上至少有一个零点.

③ 当 $c<0$ 时, $f(0)<0$,

$$b = -\frac{3}{2}a - c, f(2) = 4a - 3a - 2c + c = a - c > 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上至少有一个零点,

综上: 函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上至少有一个零点.

$$(3) c = -\frac{3}{2}a - b,$$

$$(|x_1 - x_2|)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2} =$$

$$\left(\frac{b}{a} + 2\right)^2 + 2,$$

$$\text{因为 } -3 < \frac{b}{a} < -\frac{3}{4},$$

$$\text{所以 } (|x_1 - x_2|)^2 \in \left[2, \frac{57}{16}\right),$$

$$\text{所以 } |x_1 - x_2| \in \left[\sqrt{2}, \frac{\sqrt{57}}{4}\right).$$

(六)

1. A 【解析】因为 $x = 2 \cdot 2n + 1$, 所以可得 $M \subseteq N$, 故选 A.

2. C 【解析】∵ 终边落在 y 轴正半轴的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$,

终边落在 x 轴负半轴的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$,

∴ 终边落在第二象限的角组成的集合可表示为 $\{\alpha | \frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$. 故选 C.

3. A 【解析】由 $\cos(2\pi - \alpha) = \frac{\sqrt{5}}{3}$, 可得 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$,

$$\text{又 } \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

故选 A.

4. D 【解析】四个选项中的函数的定义域均为 $\mathbf{R}$, 它关于原点对称.

对于 A, 因为 $f(-x) = -x \cdot |-x| = -f(x)$, $f(x)$ 为奇函数, 故 A 错;

对于 B, 因为 $f(-x) = \sin(-x) = -f(x)$, $f(x)$ 为奇函数, 故 B 错;

对于 C, 因为 $f(-x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|-x|} = f(x)$, $f(x)$ 为

偶函数, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, 它是减函

数, 故 C 错;

对于 D, 因为 $f(-x) = -\cos(-\pi x) = -\cos(\pi x) = f(x)$, $f(x)$ 为偶函数, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) = -\cos(\pi x)$ 在 $(0, 1)$ 是增函数, 故 D 正确.

综上, 选 D.

5. C 【解析】设扇形的半径为 r , 弧长为 l , 则 $l + 2r = 12$, $S = \frac{1}{2}lr = 8$,

$$\therefore \text{解得 } r = 2, l = 8 \text{ 或 } r = 4, l = 4, \therefore \alpha = \frac{l}{r} = 4 \text{ 或 } 1,$$

故选 C.

6. D 【解析】 $f(x) = \sqrt{x}$, $y = f(x) + 2 - x = \sqrt{x} + 2 - x = 0$, $\sqrt{x} = 2$, $x = 4$.

7. C 【解析】函数 $f(x) = \sin\left(2\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π ,

$$\text{所以 } \omega = 1, \text{ 函数 } f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right),$$

它的对称轴为: $2x - \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, x = \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$, 显然 C 正确.

故选 C.

8. B 【解析】因为 $y = \log_4 x$ 及 $y = \log_2 x$ 都是 $(0, +\infty)$ 上的增函数,

$$\text{故 } \log_4 5 > \log_4 4 = 1 > \sin 2, \log_2 3 > \log_2 2 = 1 > \sin 2,$$

$$\text{又 } \log_4 5 = \frac{1}{2} \log_2 5 = \log_2 \sqrt{5} < \log_2 3, \text{ 故 } c < a < b,$$

选 B.

9. B 【解析】模拟程序的运行, 可得: $m = 1$,

满足条件 $m \in (0, 100)$, 执行循环体, $n = 3$, 输出 n 的值为 3, $m = 3$;

满足条件 $m \in (0, 100)$, 执行循环体, $n = 7$, 输出 n 的值为 7, $m = 7$;

满足条件 $m \in (0, 100)$, 执行循环体, $n = 15$, 输出 n 的值为 15, $m = 15$;

满足条件 $m \in (0, 100)$, 执行循环体, $n = 31$, 输出 n 的值为 31, $m = 31$;

满足条件 $m \in (0, 100)$, 执行循环体, $n = 63$, 输出 n 的值为 63, $m = 63$;

满足条件 $m \in (0, 100)$, 执行循环体, $n=127$, 输出 n 的值为 127, $m=127$;

此时, 不满足条件 $m \in (0, 100)$, 退出循环, 结束.

可得输出数据的总个数为 6.

故选 B.

10. C 【解析】函数 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x =$

$$2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right),$$

对于 A: 函数 $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, 当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时,

$$2\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 2, \text{ 不能得到函数 } f(x) \text{ 的图象关}$$

于点 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称. $\therefore$ A 不对.

对于 B: $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, 可得 $\alpha + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$,

$f(\alpha) \in (\sqrt{3}, 2]$, 不存在 $f(\alpha) = 1$, $\therefore$ B 不对.

对于 C: 函数 $f(x+\alpha)$ 的对称轴方程为: $x+\alpha + \frac{\pi}{3}$

$$= \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ 可得 } x = k\pi + \frac{\pi}{6} - \alpha, \text{ 当 } k=0, \alpha = \frac{\pi}{6}$$

时, 可得图象关于 y 轴对称. $\therefore$ C 对.

对于 D: $f(x+\alpha) = f(x+3\alpha)$ 说明 2α 是函数 $f(x)$

的周期, 函数 $f(x)$ 的周期为 2π , 故 $\alpha = \pi$, $\therefore$ 不存在 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, 使 $f(x+\alpha) = f(x+3\alpha)$ 恒成立,

$\therefore$ D 不对.

$\therefore$ D 不对.

故选 C.

11. B 【解析】因为相邻两条对称轴的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 故

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}, T = \pi, \text{ 从而 } \omega = 2.$$

设将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后, 所得图象

对应的解析式为 $g(x)$,

则 $g(x) = \sin\left(2x + \varphi + \frac{2\pi}{3}\right)$, 因为 $g(x)$ 的图象关

于 y 轴对称, 故 $g(0) = \pm 1$,

$$\text{所以 } \sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) = \pm 1, \varphi + \frac{2\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{所以 } \varphi = k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{因为 } |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \varphi = -\frac{\pi}{6}.$$

$$\text{所以 } f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{令 } 2x - \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$$

得对称轴为直线 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$, 所以 C, D

错误;

$$\text{令 } 2x - \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 得 } x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}, \text{ 所以}$$

对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}, 0\right), k \in \mathbf{Z}$, 所以 A 错误, B

正确.

综上, 选 B.

12. A 【解析】 $\because$ 定义在 $[e, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足

$$f(x) + x \ln x f'(x) < 0,$$

$$\text{设 } g(x) = f(x) \ln x,$$

$$\text{则 } g'(x) = f'(x) \ln x + \frac{f(x)}{x} =$$

$$\frac{f(x) + x \ln x f'(x)}{x} < 0 \text{ 在 } [e, +\infty) \text{ 上恒成立,}$$

$\therefore g(x)$ 在 $[e, +\infty)$ 上单调递减,

$$\because f(2020) = 0$$

$$\therefore g(2020) = f(2020) \ln 2020 = 0,$$

要求 $f(x) > 0$, $\because \ln x > 0$, $\therefore$ 只需 $g(x) > 0$ 即可.

$$\therefore g(x) > 0 = g(2020),$$

$$\therefore x < 2020,$$

$$\therefore e \leq x < 2020,$$

故选 A.

13. $-\frac{1}{2}$ 【解析】 $\sin 32^\circ \cos 182^\circ + \cos 32^\circ \cos 88^\circ$

$$= -\sin 32^\circ \cos 2^\circ + \cos 32^\circ \sin 2^\circ$$

$$= -\sin(32^\circ - 2^\circ)$$

$$= -\sin 30^\circ$$

$$= -\frac{1}{2},$$

故答案为 $-\frac{1}{2}$.

14. -2 【解析】因为函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ x+1, & x \leq 0, \end{cases} g(x)$

$$= \log_2 x,$$

$$\text{所以 } g(2) = \log_2 2 = 1, f(g(2)) = f(1) = 1,$$

$$\text{由 } f(a) + f(g(2)) = 0, \text{ 得 } f(a) = -1.$$

当 $a > 0$ 时, 因为 $f(a) = a^2 \neq -1$, 所以此时不符合题意;

当 $a \leq 0$ 时, $f(a) = a + 1 = -1$, 解得 $a = -2$.

15. $-\frac{4}{3}$ 【解析】 $\because \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5}$,

$$\therefore (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{25},$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{12}{25},$$

$$\text{又 } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi,$$

$$\therefore \sin \theta - \cos \theta > 0,$$

$$\therefore (\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{49}{25},$$

$$\therefore \sin \theta - \cos \theta = \frac{7}{5},$$

$$\text{由 } \begin{cases} \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5}, \\ \sin \theta - \cos \theta = \frac{7}{5}, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} \sin \theta = \frac{4}{5}, \\ \cos \theta = -\frac{3}{5}. \end{cases}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{4}{3}.$$

16. $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ 【解析】由已知得 $y = f(x) = 1 - \cos^2 x$

$$+ 2 \cos x = -(\cos x - 1)^2 + 2,$$

$$\text{令 } t = \cos x, \text{ 得到: } y = -(t-1)^2 + 2,$$

$$\text{显然当 } t = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \text{ 时, } y = -\frac{1}{4},$$

$$\text{当 } t = 1 \text{ 时, } y = 2,$$

$$\text{又由 } x \in \left[-\frac{2\pi}{3}, a\right] \text{ 可知 } \cos x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right], \text{ 可使}$$

$$\text{函数的值域为 } \left[-\frac{1}{4}, 2\right],$$

$$\text{所以有 } a \geq 0, \text{ 且 } a \leq \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{从而可得 } a \text{ 的取值范围是 } 0 \leq a \leq \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{故答案为 } \left[0, \frac{2\pi}{3}\right].$$

17. 【解析】(1) $f(\alpha) = \frac{(-\sin \alpha) \cdot (-\cos \alpha)}{\cos \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$$= \tan \alpha.$$

$$(2) \because f(\alpha) = \tan \alpha = 2,$$

$$\therefore 2 \sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{2 \tan^2 \alpha - 3 \tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1}$$

$$= \frac{2 \times 4 - 3 \times 2}{4 + 1} = \frac{2}{5}.$$

18. 【解析】(1) $\because f(x) = 3 \tan\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)$

$$= -3 \tan\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\therefore \text{函数 } f(x) \text{ 的最小正周期为 } T = 4\pi.$$

$$\text{由 } k\pi - \frac{\pi}{2} < \frac{x}{4} - \frac{\pi}{6} < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{得 } 4k\pi - \frac{4\pi}{3} < x < 4k\pi + \frac{8\pi}{3}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore \text{函数 } y = 3 \tan\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \text{ 的单调增区间为}$$

$$\left(4k\pi - \frac{4\pi}{3}, 4k\pi + \frac{8\pi}{3}\right), k \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore \text{函数 } y = -3 \tan\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \text{ 的单调减区间为}$$

$$\left(4k\pi - \frac{4\pi}{3}, 4k\pi + \frac{8\pi}{3}\right), k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{即 } f(x) \text{ 的单调减区间为 } \left(4k\pi - \frac{4\pi}{3}, 4k\pi + \frac{8\pi}{3}\right), k$$

$$\in \mathbf{Z}.$$

$$(2) f(\pi) = 3 \tan\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) = 3 \tan\left(-\frac{\pi}{12}\right)$$

$$= -3 \tan \frac{\pi}{12},$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3 \tan\left(\frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{8}\right) = 3 \tan\left(-\frac{5\pi}{24}\right)$$

$$= -3 \tan \frac{5\pi}{24}.$$

$$\because 0 < \frac{\pi}{12} < \frac{5\pi}{24} < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \tan \frac{\pi}{12} < \tan \frac{5\pi}{24},$$

$$\therefore -3 \tan \frac{\pi}{12} > -3 \tan \frac{5\pi}{24}, \text{ 即 } f(\pi) > f\left(\frac{3\pi}{2}\right).$$

19. 【解析】(1) 由 $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$, 得 $f'(x) =$

$$3x^2 + 2ax + 1.$$

$$\because f(0) = 1, f'(0) = 1,$$

$$\therefore \text{曲线 } y = f(x) \text{ 在点 } (0, f(0)) \text{ 处的切线方程为 } y = x + 1.$$

(2) 当 $a=b=4$ 时, $f(x)=x^3+4x^2+4x+c$,

$$\therefore f'(x)=3x^2+8x+4.$$

令 $f'(x)=0$, 得 $3x^2+8x+4=0$,

$$\text{解得 } x=-2 \text{ 或 } x=-\frac{2}{3}.$$

当 x 变化时, $f(x)$ 与 $f'(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的情况如下:

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -\frac{2}{3})$	$-\frac{2}{3}$	$(-\frac{2}{3}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	c	$\searrow$	$c-\frac{32}{27}$	$\nearrow$

$\therefore$ 当 $c>0$ 且 $c-\frac{32}{27}<0$ 时, $f(-4)=c-16<0$,

$$f(0)=c>0,$$

存在 $x_1 \in (-4, -2)$, $x_2 \in (-2, -\frac{2}{3})$,

$$x_3 \in (-\frac{2}{3}, 0),$$

使得 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$.

由 $f(x)$ 的单调性知, 当且仅当 $c \in (0, \frac{32}{27})$ 时,

函数 $f(x)=x^3+4x^2+4x+c$ 有三个不同零点.

20. 【解析】(1) 依题意 $\tan \alpha=2$,

$$\cos(2\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1 - \tan^2 \alpha - 2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1-4-4}{1+4} = -\frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

$$(2) \because \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \sin(\beta + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{10}}{10}, -\frac{\pi}{2} < \beta < 0,$$

$$\therefore \beta + \frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}),$$

$$\therefore \cos(\beta + \frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\therefore \cos[\alpha - (\beta + \frac{\pi}{4})]$$

$$= \cos \alpha \cos(\beta + \frac{\pi}{4}) + \sin \alpha \sin(\beta + \frac{\pi}{4})$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} + \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}), \beta + \frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}),$$

$$\therefore \alpha - (\beta + \frac{\pi}{4}) \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}),$$

$$\therefore \alpha - (\beta + \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4},$$

$$\therefore \alpha - \beta = \frac{\pi}{2}.$$

21. 【解析】(1) $\because f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

$$\therefore f(x) + f(-x) = m - \frac{1}{5^x + 1} + m - \frac{1}{5^{-x} + 1} = 0,$$

$$\text{即 } 2m - \left(\frac{1}{5^x + 1} + \frac{5^x}{5^x + 1} \right) = 0 \Rightarrow 2m - 1 = 0,$$

$$\text{解得 } m = \frac{1}{2}.$$

(2) 设 $x_1 < x_2$ 且 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$,

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = m - \frac{1}{5^{x_1} + 1} - \left(m - \frac{1}{5^{x_2} + 1} \right)$$

$$= \frac{5^{x_1} - 5^{x_2}}{(5^{x_1} + 1)(5^{x_2} + 1)},$$

$$\because x_1 < x_2, \therefore 5^{x_1} + 1 > 0, 5^{x_2} + 1 > 0, 5^{x_1} - 5^{x_2} < 0,$$

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0, \text{ 即 } f(x_1) < f(x_2),$$

$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

$$(3) \text{ 由 } 0 < \frac{1}{5^x + 1} < 1,$$

所以 $m - 1 < f(x) < m$, $f(x)$ 的值域为 D , 且

$$\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right] \subseteq D,$$

$$\therefore D = (m - 1, m),$$

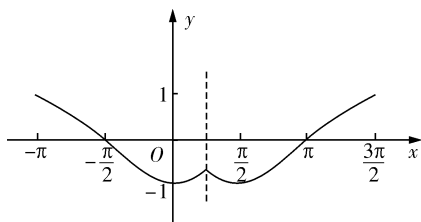
$$\therefore \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right] \subseteq (m - 1, m),$$

$$\therefore \begin{cases} m - 1 < \frac{1}{3}, \\ m > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\therefore m \in \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3} \right)$$

$\therefore m$ 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3} \right)$.

22. 【解析】(1) $y=f(x)$ 的图象如图所示.



(2) 任取 $x \in \left[-\pi, \frac{\pi}{4}\right]$,

则 $\frac{\pi}{2} - x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$,

因为函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称,

则 $f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$,

又当 $x \geq \frac{\pi}{4}$ 时, $f(x)=-\sin x$,

则 $f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x$,

$$\text{即 } f(x)=\begin{cases} -\cos x, & x \in \left[-\pi, \frac{\pi}{4}\right], \\ -\sin x, & x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

(3) 当 $a=-1$ 时, $f(x)=a$ 的两根为 $0, \frac{\pi}{2}$, 则 $M_a = \frac{\pi}{2}$;

当 $a \in \left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时, $f(x)=a$ 的四根满足 $x_1 < x_2 < \frac{\pi}{4} < x_3 < x_4$, 由对称性得 $x_1+x_2=0, x_3+x_4=\pi$, 则 $M_a=\pi$;

当 $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $f(x)=a$ 的三根满足 $x_1 < x_2 = \frac{\pi}{4} < x_3$, 由对称性得 $x_3+x_1=\frac{\pi}{2}$, 则 $M_a=\frac{3\pi}{4}$;

当 $a \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ 时, $f(x)=a$ 两根为 x_1, x_2 , 由对称性得 $M_a=\frac{\pi}{2}$.

综上, 当 $a \in \left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时, $M_a=\pi$;

当 $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $M_a=\frac{3\pi}{4}$;

当 $a \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right] \cup \{-1\}$ 时, $M_a=\frac{\pi}{2}$.

(七)

1. A 【解析】 $\sin 510^\circ = \sin(360^\circ + 150^\circ) = \sin 150^\circ = \frac{1}{2}$. 选 A.

2. D 【解析】由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 即 $\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, 解得 $a=\sqrt{6}$.

3. A 【解析】由题意得: 命题 p_1 为真命题, p_2 为真命题,

$\therefore (\neg p_1) \wedge (\neg p_2)$ 为假命题, 故选 A.

4. A 【解析】 $\because$ 三角形 ABC 中, $a=2, b=3, c=4$

$$\therefore \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{4+9-16}{2 \times 2 \times 3} = -\frac{1}{4} < 0,$$

则 C 是钝角.

故选 A.

5. B 【解析】由函数 $f(x)=(1-\cos 2x)\cos^2 x$

$$= 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$= \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\cos 4x}{2}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 4x,$$

所以函数 $f(x)$ 为偶函数, 且最小正周期为 $\frac{2\pi}{4}$

$\frac{\pi}{2}$, 故选 B.

6. B 【解析】由余弦定理得 $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\therefore \frac{1}{2} = \frac{4+c^2-28}{4c}$, $\therefore c=6$ 或 $c=-4$ (舍), 所以 $\triangle ABC$

的面积 $S = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$. 故选 B.

7. D 【解析】 $\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A + \sin B \sin C = 0$,

结合正弦定理得 $b^2 + c^2 - a^2 + bc = 0$,

由余弦定理得 $b^2 + c^2 - a^2 = 2bccos A$,

故 $2bccos A + bc = 0$,

即 $\cos A = -\frac{1}{2}$, $A = 120^\circ$, $\tan A = -\sqrt{3}$.

故选 D.

8. D 【解析】由 $\sin 2A = \sin B$ 可得: $\cos A = \frac{\sin B}{2\sin A}$,

由正弦定理得: $\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

所以 $\cos A = \frac{\sqrt{6}}{4}$,

由余弦定理得: $a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos A$,

即: $4^2 = c^2 + (2\sqrt{6})^2 - 2c \times (2\sqrt{6}) \times \frac{\sqrt{6}}{4}$,

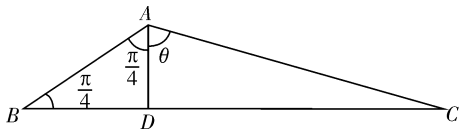
整理得: $c^2 - 6c + 8 = 0$,

解得: $c = 2$ 或 $c = 4$.

故选 D.

9. B 【解析】设 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 对应的边分别为 a, b, c , $AD \perp BC$ 于 D ,

令 $\angle DAC = \theta$, 如图所示,



因为 $\triangle ABC$ 中, $B = \frac{\pi}{4}$, BC 边上的高 $AD = h =$

$\frac{1}{3}BC = \frac{1}{3}a$,

所以 $BD = AD = \frac{1}{3}a$, $CD = \frac{2}{3}a$,

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, $\cos \theta = \frac{AD}{AC}$

$$= \frac{\frac{a}{3}}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}a\right)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

所以 $\cos A = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$

$$= \cos \frac{\pi}{4} \cos \theta - \sin \frac{\pi}{4} \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} =$$

$-\frac{\sqrt{10}}{10}$, 故选 B.

10. A 【解析】由 $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 可得:

$f(x) = f(x + \pi)$, 即 $T = \pi$,

$$\therefore \frac{2\pi}{\omega} = \pi, \therefore \omega = 2,$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = f\left(\frac{\pi}{6} - x\right),$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象关于 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称,

$$\therefore \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi\right) = \pm 1,$$

$$\therefore 2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{又 } |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = \frac{\pi}{6},$$

$$\therefore f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{令 } \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{解得: } \frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{令 } k = -1, \text{ 得 } -\frac{5\pi}{6} \leq x \leq -\frac{\pi}{3},$$

$\therefore f(x)$ 的单调减区间是 $\left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}\right]$, 故选 A.

11. A 【解析】由已知及正弦定理可得 $a^2 - b^2 = 4c^2$,

$$\text{由余弦定理推论可得 } -\frac{1}{4} = \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\therefore \frac{c^2 - 4c^2}{2bc} = -\frac{1}{4}, \therefore \frac{3c}{2b} = \frac{1}{4}, \therefore \frac{b}{c} = \frac{3}{2} \times 4 = 6,$$

故选 A.

12. A 【解析】由 $f(x) = x^3 - 3x$, 得 $f'(x) = 3x^2 -$

3 , 设切点为 $(a, a^3 - 3a)$ ($a \in \mathbb{R}$), 曲线 $f(x) = x^3$

$- 3x$ 在点 $(a, a^3 - 3a)$ 处的切线方程为 $y -$

$(a^3 - 3a) = (3a^2 - 3)(x - a)$, 因为该切线过点

$M(3, t)$, 所以 $t - (a^3 - 3a) = (3a^2 - 3)(3 - a)$,

即 $t = -2a^3 + 9a^2 - 9$ 有三个零点, 即直线 $y = t$ 和

函数 $g(x) = -2x^3 + 9x^2 - 9$ 的图象有三个公共

点, 因为 $g'(x) = -6x(x - 3)$, 则 $g(x)$ 在

$(-\infty, 0)$, $(3, +\infty)$ 单调递减, 在 $(0, 3)$ 上单调

递增, 且当 $x = 0$ 时, 函数 $g(x)$ 取得极小值为

$g(0) = -9$, 当 $x = 3$ 时, 函数 $g(x)$ 取得极大值

为 $g(3) = 18$, 则 $-9 < t < 18$. 故选 A.

13. 1 014₍₈₎ 【解析】 $524 \div 8 = 65 \cdots 4$

$$65 \div 8 = 8 \cdots 1$$

$$8 \div 8 = 1 \cdots 0$$

$\therefore$ 化成 8 进制是 1 014₍₈₎.

14. $-2\cos \alpha$ 【解析】 $\sin(-\alpha) - \sin(900^\circ - \alpha) =$

$$-\sin \alpha - \sin(5 \times 180^\circ - \alpha) = -2\sin \alpha,$$

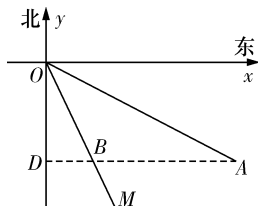
$$\tan(\alpha - 360^\circ) - \cos(180^\circ + \alpha) - \cos(-\alpha - 360^\circ) =$$

$$\tan \alpha + \cos \alpha - \cos \alpha = \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

$$\therefore \frac{\sin(-\alpha) - \sin(900^\circ - \alpha)}{\tan(\alpha - 360^\circ) - \cos(180^\circ + \alpha) - \cos(-\alpha - 360^\circ)}$$

$$= \frac{-2\sin \alpha}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = -2\cos \alpha.$$

15. $5\sqrt{6}$ 【解析】以 O 点为原点建立直角坐标系, 如图所示,



设南偏东 30° 方向为射线 OM , 船沿南偏东 75° 方向航行 15 海里后到达 A 点,

过点 A 作 x 轴平行线, 交 y 轴于点 D , 交 OM 于点 B ,

$$\text{则 } \angle DOA = 30^\circ + 45^\circ, \cos \angle DOA = \frac{OD}{OA},$$

$$\text{所以 } OD = OA \cos 75^\circ = \frac{15(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4},$$

$$\text{又 } \sin \angle DOA = \frac{AD}{OA},$$

$$\text{所以 } AD = OA \sin 75^\circ = \frac{15(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4},$$

$$\text{又 } \angle DOB = 30^\circ, \tan \angle DOB = \frac{BD}{OD},$$

$$\text{所以 } BD = OD \tan 30^\circ = \frac{15\sqrt{2} - 5\sqrt{6}}{4},$$

$$\text{所以 } AB = AD - BD = 5\sqrt{6} \text{ 海里}.$$

16. $\sqrt{3}$ 【解析】因为 $b(\sin A + \sin B) = 4\sin B \cdot S_{\triangle ABC} + b\sin C$,

$$\text{故 } ab\sin A + b^2\sin B = 4\sin B \cdot S_{\triangle ABC} + b\sin C,$$

$$\text{即 } a^2\sin B + b^2\sin B = 4\sin B \cdot S_{\triangle ABC} + c^2\sin B,$$

$$\text{即 } a^2 + b^2 - c^2 = 4S_{\triangle ABC},$$

$$\text{故 } ab\cos C = ab\sin C,$$

$$\text{故 } C = \frac{\pi}{4}, \text{ 则 } \triangle ABC \text{ 的外接圆半径为 } \frac{c}{2\sin C} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{3},$$

$$\text{故答案为 } \sqrt{3}.$$

17. 【解析】(1) 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 得 $a\sin B =$

$$b\sin A \neq 0,$$

$$\text{又 } 2a\sin B\cos A - b\sin A = 0,$$

$$\therefore 2\cos A = 1, \text{ 即 } \cos A = \frac{1}{2},$$

$$\therefore 0 < A < \pi, \therefore A = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) \therefore A = \frac{\pi}{3}, \therefore B = \frac{2\pi}{3} - C,$$

$$\therefore \sin\left(\frac{2\pi}{3} - C\right) + \sqrt{3}\sin\left(C - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos C + \frac{1}{2}\sin C + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C - \frac{1}{2}\cos C\right)$$

$$= 2\sin C,$$

$$\therefore 0 < C < \frac{2\pi}{3},$$

$$\therefore \text{当 } C = \frac{\pi}{2} \text{ 时, 取得最大值,}$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 是直角三角形}.$$

18. 【解析】(1) 当 $\theta = -\frac{\pi}{6}$ 时, $f(x) = x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - 1 =$

$$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}, x \in [-1, \sqrt{3}].$$

$$\therefore \text{当 } x = -1 \text{ 时, } f(x) \text{ 的最大值为 } \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

(2) 函数 $f(x) = (x + \tan \theta)^2 - (1 + \tan^2 \theta)$ 的图象的对称轴为 $x = -\tan \theta$,

$$\therefore y = f(x) \text{ 在 } [-1, \sqrt{3}] \text{ 上是单调函数,}$$

$$\therefore -\tan \theta \leq -1 \text{ 或 } -\tan \theta \geq \sqrt{3},$$

$$\text{即 } \tan \theta \geq 1 \text{ 或 } \tan \theta \leq -\sqrt{3}.$$

$$\text{因此, } \theta \text{ 角的取值范围是 } \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right).$$

19. 【解析】(1) 设 $AB = x$, 则由余弦定理有: $AC^2 =$

$$AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B$$

$$\text{即 } 3^2 = 2^2 + x^2 - 2x \cdot 2\cos 60^\circ, \text{ 解得 } x = \sqrt{6} + 1,$$

$$\text{所以 } AB = \sqrt{6} + 1.$$

$$(2) \text{ 因为 } ED = \frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ 所以 } AD = DC = \frac{ED}{\sin A}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2\sin A}.$$

在 $\triangle BCD$ 中, 由正弦定理可得:

$$\frac{BC}{\sin \angle BDC} = \frac{CD}{\sin B},$$

$$\text{因为 } \angle BDC = 2\angle A, \text{ 所以 } \frac{2}{\sin 2A} = \frac{\sqrt{6}}{2\sin A \sin 60^\circ}.$$

$$\text{所以 } \cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 所以 } A = \frac{\pi}{4}.$$

20. 【解析】(1) $f(x) = 4\cos^4 x + 4\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x \cos 2x$
 $= (2\cos^2 x)^2 + 4\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x \cos 2x$

$$\begin{aligned}
&= (\cos 2x + 1)^2 + 2(1 - \cos 2x) - \sqrt{3} \sin 2x \cos 2x \\
&= \cos^2 2x + 2\cos 2x + 1 + 2 - 2\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x \cos 2x \\
&= \frac{\cos 4x + 1}{2} + 3 - \frac{\sqrt{3} \sin 4x}{2} \\
&= \frac{\cos 4x}{2} - \frac{\sqrt{3} \sin 4x}{2} + \frac{7}{2} \\
&= \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{7}{2},
\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$.

$$(2) g(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{7}{2},$$

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right].$$

当 $2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$, 即 $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ 时, $f(x)$ 单调递增;

当 $2x - \frac{\pi}{3} \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$, 即 $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x)$ 单调递减;

所以 $f(x)$ 的增区间为 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, 减区间为 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$g(x)$ 在 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上最大值为 $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{9}{2}$, 最小值为 $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.

21. 【解析】(1) 由题得: 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 4, AB = 2$,

$$\angle BAC = \frac{2\pi}{3},$$

由余弦定理得

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos \frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{7},$$

$$\text{由正弦定理得: } 2R = \frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{4}{3} \sqrt{21},$$

$$\text{所以 } R = \frac{2}{3} \sqrt{21}.$$

(2) 由(1)得, $BC = 2\sqrt{7}$,

$$\text{由余弦定理得: } BC^2 = PB^2 + PC^2 - 2PB \cdot PC \cdot \cos \angle BPC,$$

$$\text{即 } 28 + PB \cdot PC = PB^2 + PC^2 \geq 2PB \cdot PC,$$

所以 $PB \cdot PC \leq 28$ (当且仅当 $PB = PC$ 时等号成立),

$$\text{而 } S_{\text{四边形}APBC} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BPC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot$$

$$\sin \angle BAC + \frac{1}{2} PB \cdot PC \cdot \sin \angle BPC,$$

故 $S_{\text{四边形}APBC} = 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} PB \cdot PC \leq 9\sqrt{3}$, 即四边形 $ABPC$ 的面积的最大值为 $9\sqrt{3}$.

22. 【解析】(1) 当 $b = 1$ 时, $f(x) = \frac{1}{2} ax^2 - (1 + a^2)x + a \ln x$,

$$f'(x) = ax - (1 + a^2) + \frac{a}{x} = \frac{(ax - 1)(x - a)}{x}.$$

1° 当 $a \leq 0$ 时, $x - a > 0, \frac{1}{x} > 0, ax - 1 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$,

此时函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, +\infty)$, 无单调递增区间.

2° 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{a}$ 或 a ,

① 当 $\frac{1}{a} = a$ ($a > 0$), 即 $a = 1$ 时, 此时 $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$ ($x > 0$),

此时函数 $f(x)$ 单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 无单调递减区间;

② 当 $0 < \frac{1}{a} < a$, 即 $a > 1$ 时,

此时在 $(0, \frac{1}{a})$ 和 $(a, +\infty)$ 上, $f'(x) > 0$,

在 $(\frac{1}{a}, a)$ 上, $f'(x) < 0$,

此时函数 $f(x)$ 单调递增区间为 $(0, \frac{1}{a})$ 和 $(a, +\infty)$,

单调递减区间为 $(\frac{1}{a}, a)$;

③ 当 $0 < a < \frac{1}{a}$, 即 $0 < a < 1$ 时, 此时函数 $f(x)$ 单调递增区间为 $(0, a)$ 和 $(\frac{1}{a}, +\infty)$,

单调递减区间为 $(a, \frac{1}{a})$.

(2) 证明: 当 $a = -1, b = 0$ 时, $f(x) + e^x > -\frac{1}{2}x^2 - x + 1$,

只需证明: $e^x - \ln x - 1 > 0$.

(法一) 设 $g(x) = e^x - \ln x - 1$ ($x > 0$),

问题转化为证明 $\forall x > 0, g(x) > 0$.

$$\text{则 } g'(x) = e^x - \frac{1}{x}, g''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0,$$

$\therefore g'(x) = e^x - \frac{1}{x}$ 为 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 且

$$g'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0, g'(1)=e-1>0,$$

$$\therefore \text{存在惟一的 } x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \text{使得 } g'(x_0)=0, e^{x_0} = \frac{1}{x_0},$$

$\therefore g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上递增.

$$\therefore g(x)_{\min}=g(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-1=\frac{1}{x_0}+x_0-1 \geq 2-1=1,$$

$\therefore g(x)_{\min}>0, \therefore$ 不等式得证.

(法二) 先证: $x-1 \geq \ln x (x>0)$

$$\text{令 } h(x)=x-1-\ln x (x>0),$$

$$\therefore h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}=0 \Rightarrow x=1,$$

$\therefore h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

$$\therefore h(x)_{\min}=h(1)=0,$$

$$\therefore h(x) \geq h(1) \Rightarrow x-1 \geq \ln x.$$

$$\therefore 1+\ln x \leq 1+x-1=x \Rightarrow \ln(1+x) \leq x,$$

$$\therefore e^{\ln(1+x)} \leq e^x,$$

$$\therefore e^x \geq x+1 > x \geq 1+\ln x, \therefore e^x > 1+\ln x,$$

故 $e^x - \ln x - 1 > 0$, 证毕.

(八)

1. D 【解析】 $\because M=\{y|y \geq 1\}, N=\{x|x \geq -1\}, \therefore M \cap N=\{y|y \geq 1\}$, 选 D.

2. D 【解析】 $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos \alpha=\frac{1}{3}$, 得 $\cos \alpha=-\frac{1}{3}$,

$$\text{则 } \sin(\pi+\alpha)=-\sin \alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{ 故选 D.}$$

3. B 【解析】① 令 $y=x-\sin x, \therefore y'=1-\cos x \geq 0$ 恒成立, 所以 $y=x-\sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 因为 $x=0$ 时 $y=0$, 所以 $x>0$ 时 $y=x-\sin x > 0$ 恒成立, 即 $x>\sin x$ 恒成立, 所以①正确;

② 全称命题的否定为特称命题, 可知②正确;

③ “命题 $q \vee p$ 为真”, 则 p, q 中至少有一个为真; “命题 $p \wedge q$ 为真”, 则 p, q 均为真. 所以 “命题 $p \vee q$ 为真” 是 “命题 $p \wedge q$ 为真” 的必要不充分条件. 所以③不正确.

正确的有 2 个, 故选 B.

4. C 【解析】三位七进制的数最大的为 666, 转化为

十进制的数为: $6 \times 7^2 + 6 \times 7^1 + 6 \times 7^0 = 342$, 因此选 C.

5. A 【解析】根据正弦定理, $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=3:2:3$, 设 $a=3k, b=2k, c=3k (k>0)$, 则有 $\cos C=\frac{9k^2+4k^2-9k^2}{2 \times 3k \times 2k}=\frac{1}{3}$. 故选 A.

6. C 【解析】由题意可得定点坐标为 $P(2, 3)$, 由三角函数的定义可得 $\tan \alpha=\frac{3}{2}$, 所以 $\sin^2 \alpha - \sin 2\alpha = \frac{\tan^2 \alpha - 2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = -\frac{3}{13}$, 故选 C.

7. B 【解析】由题意知, $a=1\,000 \times \frac{11}{9} = \frac{11\,000}{9}$,

$$b=\frac{11\,000}{9}-999=\frac{2\,009}{9},$$

即若按全是甜果来算钱超出 $\frac{2\,009}{9}$ 文, 一个苦果和

一个甜果的差价为 $c=\frac{41}{63}$,

$$\text{则 } p \text{ 为苦果数, } p=\frac{\frac{2\,009}{9}}{\frac{41}{63}}=343. \text{ 故选 B.}$$

8. D 【解析】因为函数 $y=f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 为奇函数,

所以 $y=f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 图象关于 $(0, 0)$ 对称, 向右平

移个单位 $\frac{1}{2}$ 得到 $y=f(x)$ 的图象关于 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 对称,

$$\text{所以 } f(-x)+f(1-x)=0,$$

$$\therefore g(x)+g(1-x)=f(x)+1+f(1-x)+1=f(x)+f(1-x)+2=2,$$

故选 D.

9. D 【解析】由函数 $y=e^{\sin x} (-\pi \leq x \leq \pi)$ 不是偶函数, 排除 A, C; 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $y=\sin x$ 为单调递增函数, 而函数 $y=e^x$ 也是增函数, 所以 $y=e^{\sin x} (-\pi \leq x \leq \pi)$ 在 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上为增函数, 故选 D.

10. B 【解析】由函数图象可知: $A=2$, 函数的最小正周期: $T=4 \times \left(\frac{7\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}\right)=2\pi$,

$$\text{则 } \omega=\frac{2\pi}{T}=1, \text{ 当 } x=\frac{2\pi}{3} \text{ 时, } \omega x+\varphi=1 \times \frac{2\pi}{3}+\varphi=$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{令 } k=0 \text{ 可得 } \varphi = -\frac{\pi}{6},$$

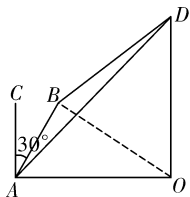
$$\text{所以函数的解析式为 } f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{由 } f(\alpha) = \frac{3}{2} \text{ 可得: } 2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4},$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) &= \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = 1 - 2 \times \frac{9}{16} \\ &= -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

11. A 【解析】如图所示, $DO \perp$ 平面 OAB , $AB=100$.



$$\angle BAC = 30^\circ, \angle DAO = 45^\circ, \angle OBD = 30^\circ.$$

设 $OD=h$.

在 $\text{Rt}\triangle OAD$ 中, 则 $OA=h$.

同理可得: $OB=\sqrt{3}h$.

$$\text{在 } \triangle OAB \text{ 中, } OB^2 = OA^2 + AB^2 - 2OA \cdot AB \cdot \cos 60^\circ.$$

$$\therefore (\sqrt{3}h)^2 = h^2 + 100^2 - 2 \times h \times 100 \times \frac{1}{2},$$

$$\text{化为: } h^2 + 50h - 5000 = 0,$$

解得 $h=50$.

因此水柱的高度是 50 m. 故选 A.

12. B 【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{5}{2x} - \frac{1}{ax^2} - a \\ &= \frac{-2a^2x^2 + 5ax - 2}{2ax^2} \\ &= \frac{(-2ax+1)(ax-2)}{2ax^2}, \end{aligned}$$

由于 $a \neq 0$, 令 $f(x)=0$,

$$\text{解得 } x_1 = \frac{1}{2a}, x_2 = \frac{2}{a}.$$

当 $a > 0$ 时, $0 < x_1 < x_2$ 且 $y = -2a^2x^2 + 5ax - 2$ 开口向下,

故函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2a}, \frac{2}{a}\right]$ 上递增,

$$\text{所以 } \frac{1}{2a} \leq 1 < 2 \leq \frac{2}{a},$$

$$\text{解得 } a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

当 $a < 0$ 时, $0 > x_1 > x_2$ 且 $y = -2a^2x^2 + 5ax - 2$ 开口向下,

故函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增, 也在 $[1, 2]$ 上递增, 符合题意.

综上所述, $a \in (-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 故选 B.

13. $\frac{\sqrt{15}}{7}$ 【解析】由题意结合同角三角函数基本关

$$\text{系有 } \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\text{则 } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{15}},$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{\frac{2}{\sqrt{15}}}{1 - \frac{1}{15}} = \frac{\sqrt{15}}{7}.$$

14. $\sqrt{13}$ 【解析】已知 $a=3, C=\frac{\pi}{3}$,

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 3b \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}, \text{ 解得 } b=4,$$

$$\text{由余弦定理 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 9 + 16 - 2 \times 3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 25 - 12 = 13,$$

$$\text{解得 } c = \sqrt{13}.$$

故答案为 $\sqrt{13}$.

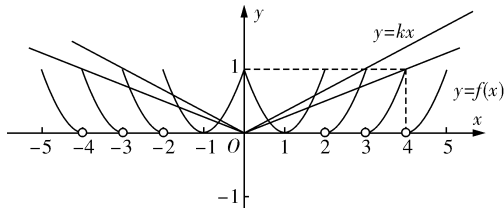
15. $y=3x$ 【解析】 $y' = 3(2x+1)e^x + 3(x^2+x)e^x = 3(x^2+3x+1)e^x$,

$$y'|_{x=0} = 3, \text{ 所以切线方程为 } y=3x.$$

$$16. \left[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right] \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$$

【解析】 $\because$ 当 $x > 2$ 时, $f(x) = f(x-1)$,

$\therefore f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是周期为 1 的函数, 作出 $y = f(x)$ 的函数图象如下:



∴方程 $f(x)=kx$ 恰有 3 个不同的实数根,

∴ $y=f(x)$ 与 $y=kx$ 有三个交点, 若 $k>0$,

$$\text{则 } \begin{cases} 3k \leq 1, \\ 4k > 1, \end{cases} \therefore \frac{1}{4} < k \leq \frac{1}{3},$$

若 $k < 0$, 由对称性可知 $-\frac{1}{3} \leq k < -\frac{1}{4}$.

$$\text{故答案为 } \left[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right].$$

17. 【解析】(1) 因为命题 $p: \forall x \in [-2, -1], x^2 - a \geq 0$.

$$\text{令 } f(x) = x^2 - a,$$

根据题意, 只要 $x \in [-2, -1]$ 时, $f(x)_{\min} \geq 0$,

也就是 $1 - a \geq 0$, 即 $a \leq 1$.

(2) 由(1)可知, 当命题 p 为真命题时, $a \leq 1$,

命题 q 为真命题时, $\Delta = 4a^2 - 4(2-a) \geq 0$, 解得 $a \leq -2$ 或 $a \geq 1$,

因为命题“ $p \vee q$ ”为真命题, 命题“ $p \wedge q$ ”为假命题, 所以命题 p 与 q 一真一假,

当命题 p 为真, 命题 q 为假时, $-2 < a < 1$,

当命题 p 为假, 命题 q 为真时, $a > 1$.

综上: $a > 1$ 或 $-2 < a < 1$.

18. 【解析】因为 α, β 都是锐角, $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\sin(2\alpha - \beta) = \frac{4}{5}$,

$$\text{所以 } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{ 且 } 0 < \alpha < \frac{\pi}{4},$$

$$-\frac{\pi}{2} < 2\alpha - \beta < \frac{\pi}{2}, \cos(2\alpha - \beta) = \frac{3}{5},$$

$$\text{所以 } \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{4\sqrt{2}}{9}, \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha -$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{7}{9}.$$

$$\begin{aligned} (1) \cos \beta &= \cos[2\alpha - (2\alpha - \beta)] \\ &= \cos 2\alpha \cos(2\alpha - \beta) + \sin 2\alpha \sin(2\alpha - \beta) \\ &= \frac{21 + 16\sqrt{2}}{45}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sin(\alpha - \beta) &= \sin[(2\alpha - \beta) - \alpha] \\ &= \sin(2\alpha - \beta) \cos \alpha - \cos(2\alpha - \beta) \sin \alpha \\ &= \frac{8\sqrt{2} - 3}{15}. \end{aligned}$$

19. 【解析】(1) 因为 $b = c(2\sin A + \cos A)$,

所以 $\sin B = 2\sin A \sin C + \sin C \cos A$,

故 $\sin(A+C) = 2\sin A \sin C + \sin C \cos A$,

所以 $\sin A \cos C = 2\sin A \sin C$,

因为 $\sin A \neq 0$, 所 $\cos C = 2\sin C$,

又 $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$, 且 $0 < C < \pi$,

$$\text{解得 } \sin C = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos C = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$(2) \text{ 由(1)得 } \cos C = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

所以 $\cos A = -\cos(B+C)$

$$= -\cos B \cos C + \sin B \sin C$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\text{由 } \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}},$$

$$\text{设 } b = \sqrt{5}k, c = \sqrt{2}k,$$

由余弦定理得: $2 = 5k^2 + 2k^2 - 2 \times \sqrt{5}k \times \sqrt{2}k \times$

$$\frac{3\sqrt{10}}{10} \Rightarrow k^2 = 2,$$

$$\text{所以 } b = \sqrt{10}, c = 2,$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2 \times$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

20. 【解析】(1) 根据图象知 $A = \sqrt{3}$,

$$\frac{3}{4}T = \frac{11\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4},$$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi, \therefore \omega = 2,$$

将点 $(\frac{\pi}{6}, \sqrt{3})$ 代入, 解得 $\varphi = \frac{\pi}{6}$,

$$\therefore f(x) = \sqrt{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{由 } 2x + \frac{\pi}{6} = k\pi (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{解得 } x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\therefore f(x) \text{ 的对称中心坐标为 } \left(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12}, 0\right) (k \in \mathbf{Z}).$$

$$(2) g(x) = \sqrt{3} \sin\left(2x - 2m + \frac{\pi}{6}\right),$$

∴ $g(x)$ 为偶函数,

$$\therefore -2m + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\therefore m = -\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{又} \because 0 < m < \frac{\pi}{2}, \therefore m = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore g(x) = \sqrt{3} \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{3} \cos 2x,$$

$$\therefore y = f(x)g(x) + \frac{3}{4}$$

$$= -3 \cos 2x \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{3}{4}$$

$$= -3 \cos 2x \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x\right) + \frac{3}{4}$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{4} \sin 4x - \frac{3}{2} \times \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{3}{4}$$

$$= -\frac{3}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 4x + \frac{1}{2} \cos 4x\right)$$

$$= -\frac{3}{2} \sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\therefore x \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right],$$

$$\therefore 4x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right],$$

$$\therefore \sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right],$$

$$\therefore y_{\max} = \frac{3}{4}, \text{ 此时 } x = -\frac{\pi}{12}; y_{\min} = -\frac{3}{2}, \text{ 此时 } x$$

$$= \frac{\pi}{12}.$$

21. 【解析】(1) $f(1) = \frac{3}{4},$

$$2^{1+\cos \alpha} - 2^{-1+\cos \alpha} = \frac{3}{4},$$

$$2^{\cos \alpha} = \frac{1}{2}, \cos \alpha = -1,$$

α 的取值的集合: $\{\alpha | \alpha = 2k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z}\}.$

(2) 由(1)知, $f(x) = 2^{x-1} - 2^{-x-1}$, 在 $x \in \mathbf{R}$ 上为增函数, 且为奇函数,

$$\therefore f(m \cos \theta) + f(1-m) > 0,$$

$$\therefore f(m \cos \theta) > f(m-1),$$

$$m(\cos \theta - 1) > -1,$$

$$\text{当 } \theta = 0 \text{ 时, } \cos \theta = 1, m \in \mathbf{R}.$$

$$\text{当 } 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ 时, } 0 \leq \cos \theta < 1.$$

$$\therefore m < \frac{1}{1 - \cos \theta}.$$

$$\text{又 } \frac{1}{1 - \cos \theta} \geq 1, \therefore m < 1.$$

综上所述可知 $m < 1$.

22. 【解析】(1) 由 $f(x) > 0$ 得: $\sin x - ax > 0,$

$$\therefore 0 < x < 1, \therefore a < \frac{\sin x}{x}.$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{\sin x}{x}, \text{ 则 } g'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}.$$

$$\text{再令 } m(x) = x \cos x - \sin x, \text{ 则 } m'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x < 0,$$

所以 $m(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

所以 $m(x) < m(0) = 0,$

所以 $g'(x) < 0, g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

所以 $g(x) > g(1) = \sin 1$, 所以 $a \leq \sin 1$.

(2) 因为 $h(x) = x \ln x - x - \cos x,$

$$\text{所以 } h'(x) = \ln x + \sin x,$$

当 $x \in [1, e]$ 时, $\ln x \geq 0, \sin x > 0,$

所以 $h'(x) > 0;$

当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $\ln x > 1, \sin x \geq -1,$

所以 $h'(x) > 0;$

$$\text{当 } x \in (0, 1) \text{ 时, 令 } y = \ln x + \sin x, \text{ 则 } y' = \frac{1}{x} +$$

$$\cos x > 0,$$

所以 $y = \ln x + \sin x$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

$$\text{再由 } \ln 2 > \sin \frac{1}{2}, \ln \frac{4}{\pi} < \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 知:}$$

$$h'\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{1}{2} + \sin \frac{1}{2} < 0,$$

$$h'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ln \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} > 0,$$

$$\text{故存在 } x_0 \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}\right) \text{ 使得 } h'(x_0) = 0,$$

且当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h'(x) < 0,$

当 $x \in (x_0, 1)$ 时, $h'(x) > 0.$

综上所述, 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h'(x) < 0, h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0, h(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $h(x)$ 存在唯一极值点 $x = x_0$.

(九)

1. B 【解析】 $\therefore \frac{5}{(1-2i)i} = \frac{5}{2+i} = \frac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)} = 2 -$

$i, \therefore$ 复数 $\frac{5}{(1-2i)i}$ 在复平面内对应的点的坐标为 $(2, -1).$

故选 B.

2. C 【解析】因为 $a \perp b$, 所以 $a \cdot b = 0$. 又 $a \cdot b = 3 - m$, 故 $m = 3$, 选 C.

3. C 【解析】对于①, $y = \sin|x|$, 易知 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $y = 1$, $x = \frac{3\pi}{2}$ 时, $y = -1$, π 不是函数的周期;

对于②, $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, 最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$, 满足题意;

对于③, $y = \left|\cos x + \frac{1}{2}\right|$, 易知 $x = 0$ 时, $y = \frac{3}{2}$, $x = \pi$ 时, $y = \frac{1}{2}$, π 不是函数的周期;

对于④, $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, 易知最小正周期为 π , 满足题意. 故选 C.

4. B 【解析】由 $(a-b) \perp b$ 知 $a \cdot b - b^2 = 0$,

又 $|a| = 2|b|$,

所以 $2|b|^2 \cos \theta - |b|^2 = 0$, $\cos \theta = \frac{1}{2}$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{3}$,

故选 B.

5. A 【解析】 $\because z = \frac{a+i}{1-i} = \frac{(a+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$

$$= \frac{a-1+(a+1)i}{2},$$

$$\text{所以 } z \cdot i^3 = \frac{(a-1)i^3 + (a+1)i^4}{2}$$

$$= \frac{-(a-1)i + (a+1)}{2},$$

因为 $z \cdot i^3 > 0$,

$$\text{所以 } z \cdot i^3 \text{ 为实数, } -\frac{a-1}{2} = 0,$$

可得 $a = 1$, 此时, $z \cdot i^3 = 1 > 0$, 符合题意,

故选 A.

6. A 【解析】因为 $|a| = 1$, $|b| = 2$, $b \cdot (a+b) = 3$,

$\therefore a \cdot b = 3 - b^2 = -1$, 所以 $|a+b|^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2 = 1 - 2 + 4 = 3$, 所以 $|a+b| = \sqrt{3}$, 故选 A.

7. A 【解析】阅读、并执行程序框图可知,

该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量 $S = i^{2 \cdot 020}$ 的值,

根据虚数单位的乘方运算法则可得,

$$S = i^{2 \cdot 020} = (i^4)^{505} = 1,$$

故选 A.

8. C 【解析】平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $AD = 3$,

$$\text{又 } \because \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 11,$$

$$\therefore (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + 9 = 11,$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 2,$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 16 + 2 = 18.$$

故选 C.

9. D 【解析】因 $f(x) = (e^x - e^{-x})\left(x - \frac{1}{x}\right)$,

$$\text{故 } f(-x) = (e^{-x} - e^x)\left(-x + \frac{1}{x}\right) = f(x),$$

故函数 $f(x)$ 是偶函数, 其图象关于 y 轴对称,

且由 $f(x) = (e^x - e^{-x})\left(x - \frac{1}{x}\right) = 0$ 可得 $x = \pm 1$,

即函数 $f(x) = (e^x - e^{-x})\left(x - \frac{1}{x}\right)$ 的零点只有

两个, 应选答案 D.

10. C 【解析】 $\because \frac{\sin C}{\sin A} = 2$,

$\therefore$ 由正弦定理, 得 $\frac{c}{a} = 2$, 得 $c = 2a$.

$\therefore$ 由余弦定理, 得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$,

$$\therefore b^2 = 5a^2 - 4a^2 \cos B,$$

$$\therefore b^2 - a^2 = \frac{3}{2}ac, \therefore b^2 = a^2 + \frac{3}{2}ac = 4a^2.$$

因此 $4a^2 = 5a^2 - 4a^2 \cos B$, 解之得 $\cos B = \frac{1}{4}$, 故

选 C.

11. B 【解析】由于 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$, 由向量加法的几何意义可知 O 为边 BC 的中点, $\therefore \triangle ABC$ 的外接

圆的圆心为 O , 半径为 1, $\therefore$ 三角形应该是以 BC

边为斜边的直角三角形, $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$, 斜边 $BC =$

$$2, \text{ 又 } \because |\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{AC}|, \therefore |\overrightarrow{AC}| = 1, |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times |AB| \times |AC| = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

故选 B.

12. D 【解析】函数 $f(x) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 与 $g(x) = x -$

1 的所有交点从左往右依次记为 A_1, A_2, A_3, A_4 和 A_5 , 且 A_1 和 A_5, A_2 和 A_4 , 都关于点 A_3 对称, 如图所示.

$$\therefore \tan \angle BAM = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

$$\text{又 } \angle AMC = \angle BAM + \angle B,$$

$$\therefore \tan B = \tan(\angle AMC - \angle BAM)$$

$$= \frac{\tan \angle AMC - \tan \angle BAM}{1 + \tan \angle AMC \tan \angle BAM}$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{5}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{5}} = -\sqrt{3}.$$

$$\text{又 } B \in (0, \pi), \therefore B = \frac{2\pi}{3}.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } B = \frac{2\pi}{3}, \text{ 又 } \angle BAC = \frac{\pi}{6},$$

$$\therefore C = \frac{\pi}{6}, \text{ 则 } AB = BC.$$

$$\text{设 } MB = x, \text{ 则 } AB = 2x.$$

$$\text{在 } \triangle ABM \text{ 中由余弦定理, 得 } AM^2 = AB^2 + MB^2 - 2AB \cdot BM \cos B,$$

$$\text{即 } 7x^2 = 21, \text{ 解得 } x = \sqrt{3}.$$

$$\text{故得 } \triangle ABC \text{ 的面积 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 4x^2 \times \sin \frac{2\pi}{3} = 3\sqrt{3}.$$

$$21. \text{【解析】(1) } \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}),$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC},$$

$$\therefore x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}.$$

$$(2) \because \overrightarrow{BP} \text{ 与 } \overrightarrow{AD} \text{ 共线},$$

$$\therefore \text{可设 } \overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{AD}, \lambda \in \mathbf{R},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC},$$

$$\therefore \overrightarrow{BP} = \frac{\lambda}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2\lambda}{3}\overrightarrow{AC},$$

$$\therefore \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{AB} = -\left(\frac{\lambda}{3} + 1\right)\overrightarrow{AB}$$

$$- \frac{2\lambda}{3}\overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} = -\left(\frac{\lambda}{3} + 1\right)\overrightarrow{AB} + \left(1 - \frac{2\lambda}{3}\right)\overrightarrow{AC},$$

$$\therefore \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = \left(\frac{\lambda}{3} + 1\right)^2 \overrightarrow{AB}^2 + \left(\frac{\lambda}{3} + 1\right) \cdot$$

$$\left(\frac{4\lambda}{3} - 1\right)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{2\lambda}{3}\left(1 - \frac{2\lambda}{3}\right)\overrightarrow{AC}^2, \text{ ①}$$

$$\therefore AB = 2, AC = 5, \cos \angle CAB = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \overrightarrow{AB}^2 = 4, \overrightarrow{AC}^2 = 25, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6, \text{ ②}$$

把②代入①并整理得:

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = \frac{128}{9}\lambda^2 - 8\lambda - 2,$$

$$\therefore \overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PC},$$

$$\therefore \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = 0,$$

$$\therefore \frac{128}{9}\lambda^2 - 8\lambda - 2 = 0,$$

$$\text{解得: } \lambda_1 = \frac{3}{4}, \lambda_2 = -\frac{3}{16},$$

$$\therefore \left| \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{AD}} \right| = |\lambda| = \frac{3}{4} \text{ 或 } \frac{3}{16}.$$

$$\text{故 } \left| \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{AD}} \right| \text{ 的值为 } \frac{3}{4} \text{ 或 } \frac{3}{16}.$$

$$22. \text{【解析】(1) } \because g(x) = (3-a)x - (2-a) - 2\ln x,$$

$$\therefore g'(x) = 3 - a - \frac{2}{x}, \therefore g'(1) = 1 - a,$$

$$\text{又 } g(1) = 1, \therefore 1 - a = \frac{1-2}{1-0} = -1, \text{ 解得 } a = 2,$$

$$\text{由 } g'(x) = 3 - 2 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x} < 0, \text{ 解得 } 0 < x < 2,$$

$$\therefore \text{函数 } g(x) \text{ 在 } (0, 2) \text{ 上递减.}$$

$$(2) \because f(x) < 0 \text{ 在 } \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ 上恒成立不可能,}$$

$$\text{故要使 } f(x) \text{ 在 } \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ 上无零点, 只需对任意 } x$$

$$\in \left(0, \frac{1}{2}\right), f(x) > 0 \text{ 恒成立,}$$

$$\text{即对任意 } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right), a > 2 - \frac{2\ln x}{x-1} \text{ 恒成立,}$$

$$\text{令 } l(x) = 2 - \frac{2\ln x}{x-1}, x \in \left(0, \frac{1}{2}\right),$$

$$\text{则 } l'(x) = \frac{2\ln x + \frac{2}{x} - 2}{(x-1)^2},$$

$$\text{再令 } m(x) = 2\ln x + \frac{2}{x} - 2, x \in \left(0, \frac{1}{2}\right),$$

$$\text{则 } m'(x) = \frac{-2(1-x)}{x^2} < 0,$$

$$\text{故 } m(x) \text{ 在 } \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ 上递减,}$$

$$\text{于是 } m(x) > m\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 2\ln 2 > 0,$$

从而 $l'(x) > 0$, 于是 $l(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上递增,

$$\therefore l(x) < l\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 4\ln 2,$$

故要使 $a > 2 - \frac{2\ln x}{x-1}$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上恒成立, 只要 $a \in [2 - 4\ln 2, +\infty)$,

综上, 若函数 $y = f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上无零点, 则 a 的最小值是 $2 - 4\ln 2$.

(十)

1. C 【解析】数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项依次为 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1,$

$$\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \text{即 } \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \text{故其通项公式为 } a_n = \frac{n}{3}.$$

2. B 【解析】 $z = \frac{1+2i}{i} = -i(1+2i) = 2-i$, 则 $\bar{z} = 2+i$, 故选 B.

3. C 【解析】因为 $\{a_n\}$ 是等差数列,

$$\text{所以 } 2a_4 - a_6 = a_4 - 2d = a_2 = 7, \therefore a_1 a_2 = 35, \therefore a_1 = 5, d = a_2 - a_1 = 2, \text{故选 C.}$$

4. B 【解析】由题意, 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且每一项都是正数,

$$\text{若 } a_1 = 1, a_{2019} = 3,$$

$$\text{所以 } q > 0, a_{2019} = 1 \times q^{2018} = 3,$$

$$\text{解得 } q^{2018} = 3, \text{所以 } q^{1009} = \sqrt{3},$$

$$\text{则 } a_{1010} = a_1 q^{1009} = 1 \times q^{1009} = \sqrt{3},$$

故选 B.

5. D 【解析】 $\because a, b$ 是不共线的两个平面向量,

$$\therefore 2a - b \neq 0,$$

$$\text{即 } \overrightarrow{QR} \neq 0,$$

$$\because P, Q, R \text{ 三点共线},$$

$$\therefore \overrightarrow{PQ} \text{ 与 } \overrightarrow{QR} \text{ 共线},$$

$$\therefore \text{存在 } \lambda, \text{使 } \overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{QR},$$

$$\therefore a + kb = 2\lambda a - \lambda b,$$

$$\therefore \text{根据平面向量基本定理得, } \begin{cases} 2\lambda = 1, \\ k = -\lambda, \end{cases}$$

$$\text{解得 } k = -\frac{1}{2}.$$

故选 D.

6. B 【解析】根据等差数列的性质和等差数列的前 n 项和公式得,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{3a_{11}}{2b_{11}} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{a_1 + a_{21}}{b_1 + b_{21}} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{a_1 + a_{21}}{2} \cdot 21}{\frac{b_1 + b_{21}}{2} \cdot 21} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{S_{21}}{T_{21}} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{43}{65} \\ &= \frac{129}{130}. \end{aligned}$$

故选 B.

7. C 【解析】设从上到下第 m 层的灯笼数为 a_m ,

$$\text{由已知得 } \begin{cases} a_1 + a_n = 65, \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n = 127, \end{cases}$$

$$\text{所以 } \begin{cases} a_1(1+2^{n-1}) = 65, \\ \frac{a_1(1-2^n)}{1-2} = 127, \end{cases}$$

$$\text{解得 } n = 7, a_1 = 1,$$

$$\text{所以 } a_7 = 2^6 = 64, \text{故选 C.}$$

8. A 【解析】由实数 $1, x, y, 4$ 成等差数列, 得 $y - x$

$$\begin{aligned} &= \frac{4-1}{3} = 1, \text{由 } -2, a, b, c, -8 \text{ 成等比数列, 得 } b^2 = \\ &-2 \times (-8) = 16 \text{ 且 } a^2 = -2b, \text{即 } b = -4, \text{所以} \\ &\frac{y-x}{b} = -\frac{1}{4}. \text{故选 A.} \end{aligned}$$

9. B 【解析】 $\because 2\cos 2\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$

$$\begin{aligned} \therefore 2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) &= 2(\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \alpha - \sin \alpha) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha) \neq 0, \end{aligned}$$

$$\therefore \cos \alpha + \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\text{两边平方整理得 } 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha = 1 + \sin 2\alpha = \frac{1}{8},$$

$$\therefore \sin 2\alpha = -\frac{7}{8}. \text{选 B.}$$

10. C 【解析】因为 $\{a_n\}$ 为等差数列且 $a_1 = 1, d = 2$,

$$\text{故 } a_n = 2n - 1.$$

$$\text{又 } \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} \frac{1}{2}, n=1, \\ \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}, n \geq 2, \end{cases}$$

$$\text{也就是 } \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} \frac{1}{2}, n=1, \\ -\frac{1}{2^n}, n \geq 2, \end{cases}$$

$$\text{所以 } b_n = \begin{cases} 2, n=1, \\ -(2n-1)2^n, n \geq 2, \end{cases}$$

$$S_5 = 2 - 12 - 40 - 112 - 288 = -450,$$

故选 C.

11. C 【解析】因为函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + f(-x) = 4$,

所以 $f(x)$ 的图象关于 $(0, 2)$ 对称,

$$\text{函数 } g(x) = \frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x},$$

由于函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象关于 $(0, 0)$ 对称,

故 $g(x)$ 的图象也关于 $(0, 2)$ 对称,

$$\text{故 } y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 2 \times 4 = 8.$$

故选 C.

12. A 【解析】若 n 为偶数, 则

$$S_n = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{n-1} + a_n) = 2 \times 1 + 1 + 2 \times 3 + 1 + \cdots + 2(n-1) + 1 = \frac{n(n+1)}{2}, S_{50} = 1\ 275 < 1\ 350, S_{52} = 1\ 378 >$$

1 350, 所以这样的偶数不存在;

若 n 为奇数, 则

$$S_n = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \cdots + (a_{n-1} + a_n) = a_1 + 2 \times 2 + 1 + 2 \times 4 + 1 + \cdots + 2(n-1) + 1 = a_1 + \frac{(n+2)(n-1)}{2} = 3 - a_2 + \frac{(n+2)(n-1)}{2},$$

若 $S_{51} = 1\ 328 - a_2 = 1\ 350$, 则当 $a_2 = -22 < 2$ 时成立,

若 $S_{53} = 1\ 433 - a_2 = 1\ 350$, 则当 $a_2 = 83 > 2$ 不成立. 故选 A.

13. $\left\{a \mid a < \frac{1}{3}\right\}$ 【解析】因为命题 $\neg p$ 是真命题, 所以 p 是假命题.

又当 p 是真命题, 即 $ax^2 + 2x + 3 \geq 0$ 恒成立, 应有

$$\begin{cases} a > 0, \\ \Delta = 4 - 12a \leq 0, \end{cases} \text{解得 } a \geq \frac{1}{3},$$

所以当 p 是假命题时, $a < \frac{1}{3}$.

所以实数 a 的取值范围是 $\left\{a \mid a < \frac{1}{3}\right\}$.

14. $40\sqrt{3}$ 【解析】设另两边长分别为 $8x, 5x (x > 0)$,

$$\text{则 } \cos 60^\circ = \frac{64x^2 + 25x^2 - 14^2}{80x^2}, \text{解得 } x = 2 \text{ 或 } x = -2 (\text{舍去}).$$

故另两边长分别是 16, 10.

$$\text{所以三角形的面积 } S = \frac{1}{2} \times 16 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 40\sqrt{3}.$$

15. $\lg 2\ 021$ 【解析】因为 $y = x^{n+1}$,

$$\text{所以 } y' = (n+1)x^n,$$

所以在 $(1, 1)$ 处的切线斜率 $k = n+1$,

所以切线方程为 $y-1 = (n+1)(x-1)$,

$$\text{令 } y=0, \text{得 } x = \frac{n}{n+1}, \text{即 } x_n = \frac{n}{n+1},$$

$$\text{所以 } a_n = \lg \frac{1}{x_n} = \lg(n+1) - \lg n,$$

$$\text{所以 } a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2\ 020} = \lg 2 - \lg 1 + \lg 3 - \lg 2 + \lg 4 - \lg 3 + \cdots + \lg 2\ 021 - \lg 2\ 020 = \lg 2\ 021.$$

16. $\frac{1}{7}$ 【解析】由 $a_{n+1} = \frac{a_n}{8a_{n+1}}$ 得 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{8a_n + 1}{a_n} = \frac{1}{a_n}$

$$+ 8 \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 8,$$

即数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是公差为 8 的等差数列,

$$\text{故 } \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1) \times 8 = 8n - 17,$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{1}{8n-17},$$

当 $n=1, 2$ 时 $a_n < 0$;

当 $n \geq 3$ 时, $a_n > 0$, 数列 $\{a_n\}$ 递减,

故最大项的值为 $a_3 = \frac{1}{7}$.

17. 【解析】(1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由题设得 $a_n = q^{n-1}$.

$$\text{由已知得 } q^4 = 4q^2,$$

解得 $q=0$ (舍去), $q=-2$ (舍) 或 $q=2$.

$$\text{故 } a_n = 2^{n-1}.$$

(2) 因为 $a_n = 2^{n-1}$,

所以 $S_m = \frac{1-2^m}{1-2} = 2^m - 1 = 63$, 得 $2^m = 64$,

解得 $m=6$.

18. 【解析】(1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 且 $d>0$, 根据题意有

$$\begin{cases} a_3=7, \\ a_4^2=27a_1, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} a_3=7, \\ (a_3+d)^2=27(a_3-2d), \end{cases}$$

因为 $d>0$, 解得 $d=2$,

所以 $a_n = a_3 + (n-3)d = 2n+1$.

$$\begin{aligned} (2) b_n &= \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n+3}} \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{前 } n \text{ 项和 } T_n &= \frac{1}{2} (\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{7} - \sqrt{5} + \cdots + \sqrt{2n+1} \\ &\quad - \sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1}) = \frac{1}{2} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

19. 【解析】(1) $\because a_2$ 是 a_1 与 a_5 的等比中项,

$$\therefore a_2^2 = a_1 a_5,$$

$$\therefore (a_1 + d)^2 = a_1 (a_1 + 4d), \text{ 化简得 } d^2 = 2a_1 d,$$

$$\therefore d \neq 0, \therefore d = 2a_1, \text{ ①}$$

$$\text{又 } S_8 = 64, 8a_1 + \frac{8 \times 7}{2} d = 64, a_1 + \frac{7}{2} d = 8, \text{ ②}$$

$$\text{由 ①② 得 } a_1 = 1, d = 2, \therefore a_n = 2n - 1.$$

$$(2) S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(1 + 2n - 1)}{2} = n^2,$$

$$\therefore S_n + a_n > 62, \therefore n^2 + 2n - 1 > 62,$$

$$\therefore n^2 + 2n - 63 > 0, (n-7)(n+9) > 0,$$

$$\therefore n \in \mathbf{N}^*, \therefore n-7 > 0, n > 7,$$

$$\therefore n \text{ 的最小值为 } 8.$$

20. 【解析】(1) $\because p \parallel q$,

$$\therefore \sin x = \sqrt{3} \cos x, \tan x = \sqrt{3},$$

$$\therefore \sin 2x - \cos^2 x = \frac{2 \sin x \cos x - \cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x}$$

$$= \frac{2 \tan x - 1}{\tan^2 x + 1} = \frac{2\sqrt{3} - 1}{4}.$$

$$(2) f(x) = pq = \cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right),$$

由题意可得 $g(x) = 2 \sin \left(2x + \frac{5\pi}{6} \right)$,

$$g(-x) = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right),$$

$$\text{由 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi,$$

$$\therefore \text{单调递增区间为 } \left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi \right], k \in \mathbf{Z}.$$

21. 【解析】(1) $n=1$ 时, $3a_1 = 2S_1 + 1 = 2a_1 + 1$,

所以 $a_1 = 1$,

当 $n \geq 2$ 时, 由 $3a_n = 2S_n + n$, 得 $3a_{n-1} = 2S_{n-1} + n - 1$,

$$\text{则 } 3a_n - 3a_{n-1} = 2S_n + n - 2S_{n-1} - n + 1 = 2(S_n - S_{n-1}) + 1 = 2a_n + 1,$$

$$\text{即 } a_n = 3a_{n-1} + 1,$$

$$\text{所以 } a_n + \frac{1}{2} = 3a_{n-1} + 1 + \frac{1}{2} = 3 \left(a_{n-1} + \frac{1}{2} \right).$$

$$\text{又 } a_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \neq 0,$$

故 $\left\{ a_n + \frac{1}{2} \right\}$ 就是首项为 $\frac{3}{2}$, 公比为 3 的等比数列,

$$\begin{aligned} \text{则 } a_n + \frac{1}{2} &= \frac{3}{2} \cdot 3^{n-1} \text{ 即 } a_n = \frac{3}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3^n - 1}{2}. \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 将 } a_n = \frac{3}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2} \text{ 代入 } 3a_n = 2S_n + n \text{ 得 } S_n$$

$$= \frac{3}{4} \cdot 3^n - \frac{1}{4} (2n + 3),$$

$$\text{所以 } T_n = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$$

$$= \frac{3}{4} (3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n) - \frac{1}{4} (5 + 7 + \cdots + 2n + 3)$$

$$3)$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{3(1-3^n)}{1-3} - \frac{n(n+4)}{4}$$

$$= \frac{9}{8} (3^n - 1) - \frac{n(n+4)}{4}$$

$$= \frac{3^{n+2}}{8} - \frac{9}{8} - \frac{n^2}{4} - n.$$

22. 【解析】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = 1$

$$+ \frac{1}{x^2} - \frac{a}{x} = \frac{x^2 - ax + 1}{x^2}.$$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立, $f(x)$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x^2 - ax + 1 = 0$.

① 当 $\Delta = a^2 - 4 \leq 0$ 时, 即 $0 < a \leq 2$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

② 当 $\Delta = a^2 - 4 > 0$ 时, 即 $a > 2$ 时, $x^2 - ax + 1 = 0$ 的两根为 $x = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ 或 $x = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$,

当 $x \in (0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2})$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in (\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2})$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

综上, 当 $a \leq 2$ 时, $f(x)$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 无递减区间;

当 $a > 2$ 时, $f(x)$ 的递增区间为 $(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2})$, $(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty)$,

递减区间为 $(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2})$.

(2) $g(x) = x - \frac{1}{x} + a \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{a}{x} = \frac{x^2 + ax + 1}{x^2},$$

令 $g'(x) = 0$, 得 $x^2 + ax + 1 = 0$, 其两根为 x_1, x_2 ,

$$\text{且} \begin{cases} x_1 + x_2 = -a, \\ x_1 x_2 = 1, \end{cases}$$

所以 $x_2 = \frac{1}{x_1}$, $a = -(x_1 + \frac{1}{x_1})$,

$$\text{所以 } g(x_1) - g(x_2) = g(x_1) - g\left(\frac{1}{x_1}\right)$$

$$= x_1 - \frac{1}{x_1} + a \ln x_1 - \left(\frac{1}{x_1} - x_1 + a \ln \frac{1}{x_1}\right)$$

$$= 2\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right) + 2a \ln x_1$$

$$= 2\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right) - 2\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) \ln x_1.$$

设 $h(x) = 2\left(x - \frac{1}{x}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x$, $x \in (0, e]$, 则 $[g(x_1) - g(x_2)]_{\min} = h(x)_{\min}$,

$$\text{因为 } h'(x) = 2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left[\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \ln x + \left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{1}{x}\right]$$

$$= \frac{2(1+x)(1-x) \ln x}{x^2},$$

当 $x \in (0, 1]$ 时, 恒有 $h'(x) \leq 0$, 当 $x \in (1, e]$ 时, 恒有 $h'(x) < 0$,

总之, $x \in (0, e]$ 时, 恒有 $h'(x) \leq 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, e]$ 上单调递减,

$$\text{所以 } h(x)_{\min} = h(e) = -\frac{4}{e},$$

$$\text{所以 } [g(x_1) - g(x_2)]_{\min} = -\frac{4}{e}.$$

(十一)

1. C 【解析】由 $x^2 - 4x + 3 \leq 0$, 解得 $1 \leq x \leq 3$, 故 $A \cap B = \{x | 2 < x \leq 3\}$, 所以选 C.

2. D 【解析】因为函数 $y = \tan x$ 的对称中心为 $(\frac{k\pi}{2}, 0)$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$\text{令 } 3x + \frac{\pi}{6} = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \text{ 则 } x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbf{Z},$$

所以函数 $y = \tan(3x + \frac{\pi}{6})$ 图象的对称中心为 $(-\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{6}, 0)$, $k \in \mathbf{Z}$. 选 D.

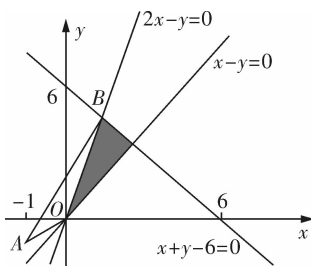
3. C 【解析】设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $\begin{cases} a_1 + d = 10, \\ a_1 + 4d = 1, \end{cases}$ 得

$$\begin{cases} a_1 = 13, \\ d = -3, \end{cases} \text{ 所以 } a_n = 16 - 3n, \text{ 则 } \{a_n\} \text{ 的前 7 项的和}$$

$$\text{为 } \frac{(29 - 3n)n}{2} = \frac{(29 - 21) \times 7}{2} = 28, \text{ 故选 C.}$$

4. A 【解析】由不等式组作出如图所示的可行域,

$$\text{因为 } z = \frac{x + 2y + 2}{x + 1} = 1 + \frac{2(y + \frac{1}{2})}{x + 1},$$



令 $t = \frac{y + \frac{1}{2}}{x + 1}$, 则 t 表示平面区域内的点与定点

$A(-1, -\frac{1}{2})$ 连线的斜率,

由图象可知, $k_{OA} \leq t \leq k_{AB}$,

因为点 $O(0, 0), B(2, 4)$,

所以 $k_{OA} = \frac{1}{2}, k_{AB} = \frac{3}{2}$, 故 $2 \leq z \leq 4$.

5. C 【解析】第一次运行: $a = 0 + 1 = 1, i = 1$ 为奇数,

$S = 1 + 1 = 2, i = 1 + 1 = 2, i < 5$;

第二次运行: $a = 1 + 2 = 3, i = 2$ 为偶数, $S = 3 \times 2 = 6, i = 2 + 1 = 3, i < 5$;

第三次运行: $a = 3 + 3 = 6, i = 3$ 为奇数, $S = 6 + 6 = 12, i = 3 + 1 = 4, i < 5$;

第四次运行: $a = 6 + 4 = 10, i = 4$ 为偶数, $S = 10 \times 12 = 120, i = 4 + 1 = 5, i \geq 5$;

程序终止运行, 输出 $S = 120$.

故选 C.

6. D 【解析】对于 A 选项, 由于 x 可以取负数, 故最小值不为 2, A 选项错误.

对于 B 选项, $y \geq 2\sqrt{\sin x \cdot \frac{1}{\sin x}} = 2$, 但是 $\sin x = \frac{1}{\sin x}$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上不成立, 即基本不等式等号不成立, 故 B 选项错误.

对于 C 选项, $y = \sqrt{x^2 + 4} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x^2 + 4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}} = 2$, 但是 $\sqrt{x^2 + 4} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$ 无实数解, 即基本不等式等号不成立, 故 C 选项错误.

对于 D 选项, $y \geq 2\sqrt{e^x + \frac{4}{e^x}} - 2 = 2$, 当且仅当 $e^x = 2$ 即 $x = \ln 2$ 时, 等号成立, 故选 D.

7. C 【解析】由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 即 $b^2 - 4b + 3 = 0$, 解得 $b = 1$ 或 $b = 3$.

8. B 【解析】由题意有, 第 n 组中有 n 个数, 分子由小到大且为 $1, 2, 3, \dots, n$,

设 a_{200} 在第 n 组中, 则 $\frac{(n-1)n}{2} < 200 \leq \frac{n(n+1)}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$,

解得: $n = 20$.

即 a_{200} 在第 20 组中, 前 19 组的数的个数之和为:

$$\frac{19 \times 20}{2} = 190,$$

即 a_{200} 在第 20 组的第 10 个数, 即为 $\frac{10}{20-10+1}$

$$= \frac{10}{11},$$

$a_{200} = \frac{10}{11}$, 故选 B.

9. B 【解析】因为 $x > 2$, 所以 $x - 2 > 0$,

$$\text{所以 } m = x + \frac{1}{x-2}$$

$$= (x-2) + \frac{1}{x-2} + 2$$

$$\geq 2\sqrt{(x-2) \cdot \frac{1}{x-2}} + 2$$

$$= 4,$$

当且仅当 $x - 2 = \frac{1}{x-2}$, 即 $x = 3$ 时等号成立.

因为 $2 - x^2 < 2$, 所以 $n < 4$, 所以 $m > n$.

故选 B.

10. D 【解析】当 $a = b = 1$ 时, $a + b = 2$, 所以推不出 a, b 中至少有一个大于 1, ①不符合;

当 $a = b = 0$ 时, $a + b > -2$, 推不出 a, b 中至少有一个大于 1, ③不符合;

当 $a = b = -2$ 时, $ab > 1$, 推不出 a, b 中至少有一个大于 1, ④不符合;

对于②, 假设 a, b 都不大于 1, $a \leq 1, b \leq 1 \Rightarrow a + b \leq 2$, 与题设 $a + b > 2$ 矛盾, 所以②能推出 a, b 中至少有一个大于 1;

对于⑤, 假设 a, b 都不大于 1, 则 $\log_a b > \log_a 1 = 0$, 与题设 $\log_a b < 0$ 矛盾, 故⑤能推出 a, b 中至少有一个大于 1.

综上选 D.

11. C 【解析】①取 $a = 4, b = 1$, 则 $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 1$, 但 $a - b > 1$, 故①错;

②因为 $a^2 - b^2 = 1 = (a+b)(a-b)$, $a > b > 0$, 所以 $0 < a - b < a + b$, 因此 $a - b = \frac{1}{a+b} < 1$, 即②正确;

③因为 $a^3 - b^3 = 1 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) > (a-b) \cdot (a-b)^2$, 所以 $a - b < 1$, 故③正确;

④因为 $a^4 - b^4 = 1 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a-b)(a$

$+b)(a^2+b^2)$, 由 $a^4=1+b^4>1$, 得 $a>1$, 又 $a>b>0$, 得 $0<a-b<(a+b)(a^2+b^2)$, 所以 $a-b=\frac{1}{(a+b)(a^2+b^2)}<1$, 故④正确.

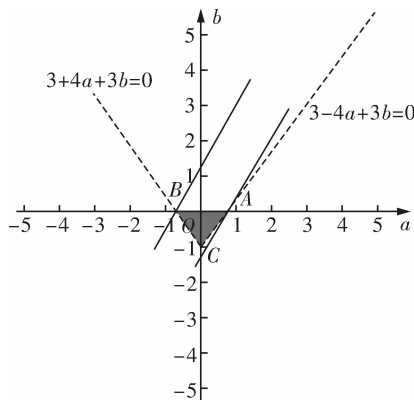
12. B 【解析】由函数 $f(x)=x^3+2ax^2+3bx+c$,

求导 $f'(x)=3x^2+4ax+3b$,

$f(x)$ 的两个极值点分别在区间 $(-1,0)$ 与 $(0,1)$ 内, 则 $3x^2+4ax+3b=0$ 的两个根分别在区间 $(0,1)$ 与 $(-1,0)$ 内,

$$\text{即} \begin{cases} f'(0)<0, \\ f'(-1)>0, \text{令 } z=2a-b, \\ f'(1)>0, \end{cases}$$

$\therefore$ 转化为在约束条件 $\begin{cases} 3b<0, \\ 3-4a+3b>0, \\ 3+4a+3b>0 \end{cases}$ 时, 求 $z=2a-b$ 的取值范围, 可行域如下阴影 (不包括边界),



目标函数转化为 $b=2a-z$,

由图可知, z 在 $A(\frac{3}{4}, 0)$ 处取得最大值 $\frac{3}{2}$, 在

$B(-\frac{3}{4}, 0)$ 处取得最小值 $-\frac{3}{2}$,

因为可行域不包含边界,

$\therefore z=2a-b$ 的取值范围为 $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.

故选 B.

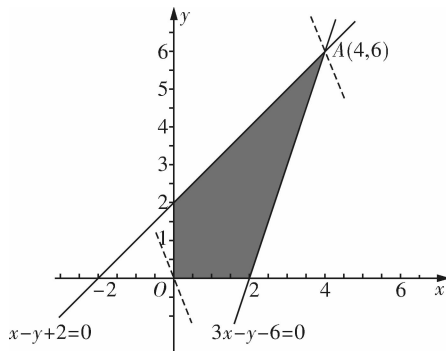
13. $4\sqrt{3}$ 【解析】 $|a-2b|=\sqrt{a^2-4a\cdot b+4b^2}$

$$=\sqrt{16-32\cos\frac{2\pi}{3}+16}$$

$$=\sqrt{48}=4\sqrt{3}.$$

故答案为 $4\sqrt{3}$.

14. 14 【解析】画出可行域如下图所示, 由图可知, 目标函数 $z=2x+y$ 在点 $A(4,6)$ 处取得最大值, 且最大值为 $z=2\times 4+6=14$.



15. $\sqrt{3}+1$ 【解析】 $\because \frac{g(x)}{f(x)}=\frac{3x^2+2x+1}{2x}$

$$=\frac{1}{2}\left(3x+\frac{1}{x}\right)+1,$$

又 $x>0$, $\therefore 3x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{3}$, 当且仅当 $3x=\frac{1}{x}$, 即 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时取等号,

$$\therefore \frac{1}{2}\left(3x+\frac{1}{x}\right)+1\geq \sqrt{3}+1,$$

$\therefore$ 函数 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 的最小值为 $\sqrt{3}+1$.

16. $(-\infty, \frac{65}{8}]$ 【解析】 $\because$ 正实数 x, y 满足 $x+y+8=xy$,

$$\therefore x+y+8\leq \frac{(x+y)^2}{4},$$

$$\therefore (x+y-8)(x+y+4)\geq 0,$$

$$\therefore x+y+4\geq 0,$$

$$\therefore x+y-8\geq 0,$$

$$\therefore x+y\geq 8 \text{ (当且仅当 } x=y=4 \text{ 时取等号)}$$

$\therefore$ 对任意满足条件的正实数 x, y 都有不等式

$$(x+y)^2-a(x+y)+1\geq 0,$$

$$\therefore a\leq (x+y)+\frac{1}{x+y}$$

对任意满足条件的正实数 x, y 恒成立,

令 $t=x+y(t\geq 8)$,

$$\text{则 } f(t)=t+\frac{1}{t} \text{ 在 } (8, +\infty) \text{ 上为单调增函数,}$$

$$\therefore f(t)=t+\frac{1}{t}\geq 8+\frac{1}{8}=\frac{65}{8} \text{ (当且仅当 } t=8 \text{ 即}$$

$x=y=4$ 时取等号),

$$\therefore a \leq \frac{65}{8},$$

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, \frac{65}{8}]$.

17. 【解析】(1) $3x^3 - (3x^2 - x + 1) = (3x^3 - 3x^2) + (x - 1) = 3x^2(x - 1) + (x - 1) = (x - 1)(3x^2 + 1)$.

$$\therefore x \leq 1, \therefore x - 1 \leq 0.$$

$$\text{又 } 3x^2 + 1 > 0, \therefore (x - 1)(3x^2 + 1) \leq 0,$$

$$\therefore 3x^3 \leq 3x^2 - x + 1.$$

$$(2) \because c < d < 0, \therefore -c > -d > 0.$$

$$\text{又 } a > b > 0, \therefore a - c > b - d > 0,$$

$$\text{则 } (a - c)^2 > (b - d)^2 > 0, \text{ 即 } \frac{1}{(a - c)^2} < \frac{1}{(b - d)^2}.$$

$$\text{又 } e < 0,$$

$$\therefore \frac{e}{(a - c)^2} > \frac{e}{(b - d)^2}.$$

18. 【解析】(1) 当 $n=1$ 时, $S_1 = 2a_1 - 2$, 即 $a_1 = 2$.

$$\text{由题 } S_n = 2a_n - 2, S_{n+1} = 2a_{n+1} - 2,$$

$$\text{两式相减得 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2.$$

所以 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列, 故 $a_n = 2^n$.

$$(2) T_n = \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{-1}{2^3} + \dots + \frac{2-n}{2^n}.$$

$$\text{两边同乘以 } \frac{1}{2} \text{ 得 } \frac{1}{2} T_n = \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{-1}{2^4} + \dots + \frac{2-n}{2^{n+1}}.$$

两式错位相减得

$$(1 - \frac{1}{2}) T_n = \frac{1}{2} + \frac{-1}{2^2} + \frac{-1}{2^3} + \dots + \frac{-1}{2^n} - \frac{2-n}{2^{n+1}}.$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2} T_n = \frac{1}{2} + \frac{\frac{-1}{2^2} - \frac{-1}{2^n} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2-n}{2^{n+1}}.$$

$$\text{化简得 } T_n = \frac{n}{2^n}.$$

19. 【解析】(1) $\because xy \leq (\frac{x+y}{2})^2$, 且 $x+y=4$,

$$\therefore xy \leq 4,$$

当且仅当 $x=y=2$ 时取等号.

$$(2) \frac{x}{x-1} + \frac{2y}{y-1} = 3 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{y-1}$$

$$= 3 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{y-1} \right) [(x-1) + (y-1)]$$

$$= 3 + \frac{1}{2} \left[3 + \frac{y-1}{x-1} + \frac{2(x-1)}{y-1} \right]$$

$$\geq 3 + \frac{1}{2} (3 + 2\sqrt{2}) = \frac{9}{2} + \sqrt{2},$$

当且仅当 $x=2\sqrt{2}-1, y=5-2\sqrt{2}$ 时取等号.

故 $\frac{x}{x-1} + \frac{2y}{y-1}$ 的最小值为 $\frac{9}{2} + \sqrt{2}$.

20. 【解析】(1) $f(x) = \sqrt{3} \sin^2 \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - \cos x) + \frac{1}{2} \sin x$$

$$= \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{由 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{解得 } -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为

$$\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right), k \in \mathbf{Z}.$$

$$(2) \text{ 因为 } f(B) = \sin \left(B - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{所以 } \sin \left(B - \frac{\pi}{3} \right) = 0.$$

$$\text{所以 } B = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{又因为 } b = \sqrt{3},$$

$$\text{所以 } 3 = a^2 + c^2 - ac, \text{ 即 } a^2 + c^2 = 3 + ac.$$

$$\text{而 } a^2 + c^2 \geq 2ac, \text{ 所以 } ac \leq 3, \text{ 即 } a^2 + c^2 \leq 6.$$

$$\text{又因为 } a^2 + c^2 = 3 + ac > 3, \text{ 所以 } 3 < a^2 + c^2 \leq 6.$$

21. 【解析】(1) 设每件定价为 t 元,

$$\text{依题意得 } \left(8 - \frac{t-25}{1} \times 0.2 \right) t \geq 25 \times 8,$$

$$\text{整理得 } t^2 - 65t + 1000 \leq 0,$$

$$\text{解得 } 25 \leq t \leq 40,$$

所以要使销售的总收入不低于原收入, 每件定价最多为 40 元.

(2) 依题意知当 $x > 25$ 时, 不等式 $ax \geq 25 \times 8 + 50$

$$+ \frac{1}{6} (x^2 - 600) + \frac{1}{5} x \text{ 有解,}$$

$$\text{等价于 } x > 25 \text{ 时, } a \geq \frac{150}{x} + \frac{1}{6} x + \frac{1}{5} \text{ 有解,}$$

由于 $\frac{150}{x} + \frac{1}{6}x \geq 2\sqrt{\frac{150}{x} \times \frac{1}{6}x} = 10$,

当且仅当 $\frac{150}{x} = \frac{x}{6}$, 即 $x=30$ 时等号成立,

所以 $a \geq 10.2$.

当该商品改革后销售量 a 至少达到 10.2 万件时, 才可能使改革后的销售收入不低于原收入与总投入之和, 此时该商品的每件定价为 30 元.

22. 【解析】(1) $\because f'(x) = a + 2\ln x + 2$,

由于函数 $f(x)$ 在 $(0, e^2]$ 上单调递减,

所以 $f'(x) \leq 0$ 在 $(0, e^2]$ 上恒成立.

$\therefore a \leq (-2\ln x - 2)_{\min} = -2 \times \ln e^2 - 2 = -6$.

即 $a \in (-\infty, -6]$.

(2) 由题意得, $t \leq \left(\frac{f(x)}{x-2}\right)_{\min} = \left(\frac{2x+2x\ln x}{x-2}\right)_{\min}$.

令 $g(x) = \frac{2x+2x\ln x}{x-2}, x > 2$,

则 $g'(x) = \frac{2(x-2\ln x-4)}{(x-2)^2}$.

令 $h(x) = x - 2\ln x - 4, x > 2$,

则 $h'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$.

当 $x > 2$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $x \in (2, +\infty)$ 上单调递增.

$\therefore h(8) = 4 - 6\ln 2 \approx -0.2 < 0, h(9) = 5 - 4\ln 3 \approx 0.6 > 0$.

$\therefore \exists x_0 \in (8, 9)$ 使得 $h(x_0) = 0$, 即 $x_0 - 2\ln x_0 - 4 = 0$.

$\therefore$ 当 $x \in (2, x_0)$ 时, $h(x) < 0, g(x)$ 在 $(2, x_0)$ 上递减;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h(x) > 0, g(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上递增.

$\therefore g(x)_{\min} = g(x_0)$

$= \frac{2x_0 + 2x_0 \ln x_0}{x_0 - 2}$

$= \frac{2x_0 + x_0(x_0 - 4)}{x_0 - 2} = x_0 \in (8, 9)$.

$\therefore t$ 的最大整数值为 8.

(十二)

1. B 【解析】 $i^2 = -1, \frac{(1+i)^2}{i} = 2, \frac{(1-i)^2}{i} = -2, \frac{1}{i} = -i$, 则 $N = \{i, -i, -1, -2, 2\}, M \cap N = \{-2, -1, 2\}, M \cap N$ 含有三个元素, 故正确选项是 B.

2. A 【解析】若输入的是 8, 则输出的是 15; 若输入的是 15, 则输出的是 29; 若输入的是 29, 则输出的是 8, 故选 A.

3. A 【解析】由 $f(x) > 0$ 恒成立可得

$$\begin{cases} f(0) = b > 0, \\ f(1) = a + b > 0, \end{cases} \text{ 所以 } a + 2b > 0 \text{ 成立;}$$

反之, 当 $a + 2b > 0$ 成立时, 则无法得到

$$\begin{cases} f(0) = b > 0, \\ f(1) = a + b > 0 \end{cases} \text{ 成立.}$$

所以“ $f(x) > 0$ 恒成立”是“ $a + 2b > 0$ 成立”的充分不必要条件. 选 A.

4. D 【解析】设 $C(x_1, y_1)$, 则 $(x_1 + 2, y_1 - 1) = \frac{1}{2}(x_1 - 1, y_1 - 4)$, 得 $C(-5, -2)$,

设 $E(x_2, y_2)$, 则 $(x_2 + 5, y_2 + 2) = \frac{1}{4}(x_2 - 4, y_2 + 3)$, 得 $D(-8, -\frac{5}{3})$, 故选 D.

5. C 【解析】 $\because 0 < a < b, a + b = 1$,

$\therefore a < b = 1 - a$, 即 $a < 1 - a, a < \frac{1}{2}$;

又 $2ab < \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{1}{2} (a < b, \text{等号取不到})$

$\therefore$ 最大的数为 $\frac{1}{2}$, 故选 C.

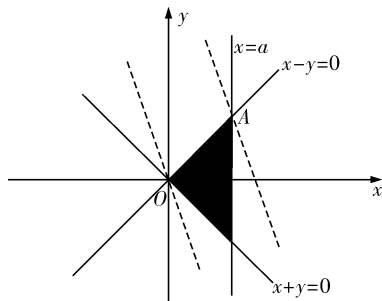
6. A 【解析】 $S_7 = 7a_4 = 21$, 所以 $a_4 = 3$, 所以 $a_2 \cdot a_6 = (a_4 - 2d)(a_4 + 2d) = (3 - 2d)(3 + 2d) = 5$, 所以 $d = -1$, 所以 $a_{19} = a_4 + 15d = -12$. 故选 A.

7. D 【解析】设 a 与 b 的夹角为 θ , 由 $a \perp (a - b)$, 得 $a \cdot (a - b) = 0$, 即 $a^2 - a \cdot b = 0$, 即 $a^2 - |a| \cdot |b| \cos \theta = 0$, 所以 $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以向量 a 在 b 方向上的投影为 $|a| \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 D.

8. C 【解析】构造函数 $f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2 = nx^2 - 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)x + n$, 因为对一切实数 x , 恒有 $f(x) \geq 0$, 所以 $\Delta \leq 0$, 即 $4(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - 4n^2 \leq 0$, 所以 $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq n$.

9. C 【解析】作可行域如图, 可得 $\frac{1}{2} \times a \times 2a = 4, \therefore a$

$=2$, 所以直线 $z=2x+y$ 过点 $A(2,2)$ 时 z 取最大值 6, 选 C.



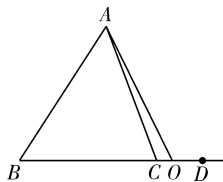
10. D 【解析】 $x+2y-xy=0$ 可化为 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1$,

$$\text{则 } x+2y = (x+2y) \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} \right) = 4 + \frac{4y}{x} + \frac{x}{y} \geq 4 + 2\sqrt{\frac{4y}{x} \cdot \frac{x}{y}} = 8,$$

当且仅当 $x=2y=4$ 时等号成立, 即 $x+2y$ 的最小值为 8,

因为 $x+2y > m^2+2m$ 恒成立, 所以 $m^2+2m < 8$, 解得 $-4 < m < 2$, 故选 D.

11. D 【解析】如图.



依题意, 设 $\vec{BO} = \lambda \vec{BC}$, 其中 $1 < \lambda < \frac{4}{3}$,

$$\begin{aligned} \text{则有 } \vec{AO} &= \vec{AB} + \vec{BO} = \vec{AB} + \lambda \vec{BC} \\ &= \vec{AB} + \lambda(\vec{AC} - \vec{AB}) \\ &= (1-\lambda)\vec{AB} + \lambda\vec{AC}. \end{aligned}$$

又 $\vec{AO} = x\vec{AB} + (1-x)\vec{AC}$, 且 $\vec{AB}, \vec{AC}$ 不共线,

$$\text{于是有 } x = 1 - \lambda \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right),$$

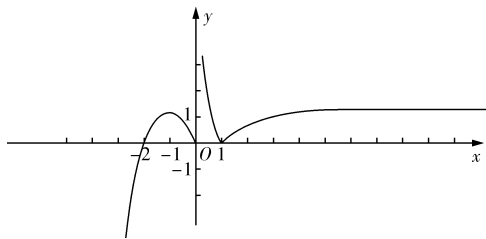
即 x 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$.

故选 D.

12. B 【解析】画出函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示, 令 $f(x)=t$, 则方程化为 $t^2-t+2a-3=0$, 结合图象可知问题转化为方程 $t^2-t+2a-3=0$ 有两个小于 1 的正数根的问题. 由二次方程的理论可

$$\begin{cases} \Delta = 1 - 4(2a-3) > 0, \\ f(0) = f(1) = 2a-3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2} < a < \frac{13}{8}, \text{ 应选}$$

答案 B.



13. $(0, 2)$ 【解析】复数 $(1+i)^2=2i$ 在复平面上对应的点的坐标为 $(0, 2)$.

14. $\frac{5\pi}{12}$ 【解析】将函数 $y=\sin 2x$ 向右平移 φ ($0 < \varphi < \pi$) 个单位, 所得函数记为 $y=f(x)=\sin(2x-2\varphi)$,

$\because$ 当 $x=\frac{2\pi}{3}$ 时 $f(x)$ 取得最大值,

$$\text{则 } \frac{4\pi}{3} - 2\varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore 2\varphi = -2k\pi + \frac{5\pi}{6},$$

令 $k=0$, 可得 $\varphi = \frac{5\pi}{12}$, 故答案为 $\frac{5\pi}{12}$.

15. $[\sqrt{2}, +\infty)$ 【解析】由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ac$

$$\times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 可得 } ac=2, \text{ 再由 } b^2=a^2+c^2-2ac \cos B$$

$$\text{可得 } b^2 \geq 2ac - 2ac \times \frac{1}{2} = ac = 2, \text{ 当且仅当 } a=c=$$

$\sqrt{2}$ 时取“=”,

$\therefore b$ 的取值范围是 $[\sqrt{2}, +\infty)$.

16. ②④ 【解析】由图可知, $S_1=a, S_2=a+2a,$

$$S_3=a+2a+a, S_4=a+2a+a+\frac{1}{2}a, \dots,$$

$\therefore \{S_n\}$ 不是等比数列, ①错误;

$\{S_n\}$ 是递增数列, ②正确;

$$S_n = a + 2a + a + \frac{1}{2}a + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}a$$

$$= a + \frac{2a \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right]}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$=a+4a\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right],$$

对于③, $S_n \geq S_1 = a$, 要使 $S_n > 2\ 020$ 恒成立,

只需 $a > 2\ 020$, a 无最小值, ③错误;

对于④, $\because S_n < 5a$, 要使 $S_n < 2\ 020$ 恒成立,

只需 $5a \leq 2\ 020$, $a \leq 404$, 即 a 的最大值为 404 , ④

正确.

真命题是②④, 故答案为②④.

17. 【解析】(1) $\because a = (\cos \alpha, \sin \alpha), b = (\cos \beta, \sin \beta)$,

$$\therefore a - b = (\cos \alpha - \cos \beta, \sin \alpha - \sin \beta).$$

$$\therefore |a - b| = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{即 } 2 - 2\cos(\alpha - \beta) = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = \frac{3}{5}.$$

$$(2) \because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < \beta < 0, \therefore 0 < \alpha - \beta < \pi,$$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = \frac{3}{5}, \therefore \sin(\alpha - \beta) = \frac{4}{5}.$$

$$\therefore \sin \beta = -\frac{5}{13}, \therefore \cos \beta = \frac{12}{13},$$

$$\therefore \sin \alpha = \sin[(\alpha - \beta) + \beta]$$

$$= \sin(\alpha - \beta) \cos \beta + \cos(\alpha - \beta) \sin \beta$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{33}{65}.$$

18. 【解析】(1) 当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 2a_1 - 1$, 所以 a_1

$$= 1,$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = (2a_n - 1) - (2a_{n-1} - 1),$$

$$\text{所以 } a_n = 2a_{n-1},$$

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $a_1 = 1$ 为首项, 以 2 为公比的等比数列.

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } a_n = 2^{n-1},$$

$$\text{所以 } b_n = (2n-1)2^{n-1},$$

$$\text{所以 } T_n = 1 + 3 \times 2 + 5 \times 2^2 + \cdots + (2n-3) \cdot 2^{n-2} + (2n-1) \cdot 2^{n-1}, \textcircled{1}$$

$$2T_n = 1 \times 2 + 3 \times 2^2 + \cdots + (2n-3) \cdot 2^{n-1} + (2n-1) \cdot 2^n, \textcircled{2}$$

① - ②得:

$$-T_n = 1 + 2(2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) - (2n-1) \cdot 2^n$$

$$= 1 + 2 \times \frac{2-2^{n-1} \times 2}{1-2} - (2n-1)2^n$$

$$= (3-2n)2^n - 3,$$

$$\text{所以 } T_n = (2n-3)2^n + 3.$$

19. 【解析】(1) 由相邻两条对称轴的距离为 $\frac{\pi}{2}$ 可得其

$$\text{周期为 } T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi, \text{ 所以 } \omega = 2,$$

$$\text{图象过点 } \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \text{ 且 } \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \text{ 得 } \varphi = \frac{\pi}{6},$$

$$f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right), \text{ 由 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi$$

$$+ \frac{\pi}{2} \text{ 得函数 } f(x) \text{ 在 } [0, \pi] \text{ 上的增区间为}$$

$$\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \text{ 和 } \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right].$$

$$(2) \text{ 由 } f\left(\frac{A}{2}\right) + \cos A = \frac{1}{2},$$

$$\text{可得 } \sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) + \cos A = \frac{1}{2},$$

$$\text{则 } \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A + \frac{1}{2} \cos A = \frac{1}{2}, \text{ 得 } \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\text{由于 } 0 < A < \pi, \text{ 则 } \frac{\pi}{6} < A + \frac{\pi}{6} < \frac{7\pi}{6},$$

$$\therefore A + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}, \therefore A = \frac{2\pi}{3}.$$

20. 【解析】(1) 因为 $f(x) = (ax-2)e^x$,

$$\text{所以 } f'(x) = (ax-2+a)e^x,$$

$$\text{又 } f(x) \text{ 在 } x=1 \text{ 处取得极值,}$$

$$\text{所以 } f'(1) = 0, \text{ 解得 } a=1, \text{ 经检验符合题意.}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可知, } f'(x) = (x-1)e^x,$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 在 } [0, 1] \text{ 上单调递减, 在 } [1, 2] \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 的最小值为 } f(1) = -e,$$

$$\text{又 } f(0) = -2, f(2) = 0,$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 的最大值为 } f(2) = 0,$$

$$\text{所以 } |f(x_1) - f(x_2)| \leq e.$$

21. 【解析】(1) 设数列 $\{a_n + 3n\}$ 的公比为 q ,

$$\text{则 } q = \frac{a_3 + 3 \times 3}{a_2 + 3 \times 2} = \frac{4}{2} = 2,$$

$$\text{又 } a_1 + 3 = \frac{a_2 + 6}{2} = 1,$$

$$\therefore a_n + 3n = 2^{n-1},$$

$$\therefore a_n = 2^{n-1} - 3n.$$

当 $n \geq 3$ 时,

$$a_{n+1} - a_n = 2^n - 3(n+1) - 2^{n-1} + 3n,$$

$$= 2^{n-1} - 3 \geq 4 - 3 > 0,$$

$$\therefore a_{n+1} > a_n,$$

$\therefore$ 数列 $a_3, a_4, a_5, \dots, a_n, \dots$ 为递增数列.

$$(2) \text{ 令 } b_n = \frac{2^{n-1} - 3}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}},$$

$$\therefore S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$= \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n - 3(n+1)}$$

$$= -\frac{2^n - 3n - 1}{2^{n+1} - 6n - 6}.$$

22. 【解析】(1) $f'(x) = x^2 + (1-a)x - a = (x+1)(x-a)$.

因为 $a > 0$, 所以当 $x < -1$ 或 $x > a$ 时, $f'(x) > 0$,
当 $-1 < x < a$, $f'(x) < 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$, $(a, +\infty)$ 上单调递增,
在 $(-1, a)$ 上单调递减.

(2) 当 $a = 1$ 时, 由 (1) 知 $f(x)$ 在区间 $[-3, -1]$ 上单调递增, 在区间 $[-1, 1]$ 单调递减, 在区间 $[1, 2]$ 单调递增.

当 $t \in [-3, -2]$ 时, $t+3 \in [0, 1]$, $f(x)$ 在区间 $[t, -1]$ 上单调递增, 在区间 $[-1, t+3]$ 上单调递减,

$$f(t+3) - f(t) = 3(t+1) - (t+2) \geq 0,$$

因此 $f(x)$ 在区间 $[t, t+3]$ 上最大值是 $f(-1)$,
最小值是 $f(t)$,

$$\text{所以 } g(t) = f(-1) - f(t) = -\frac{1}{3} - f(t).$$

因为 $f(t)$ 在区间 $[-3, -2]$ 上单调递增,

$$\text{所以 } g(t) \text{ 最小值是 } g(t) = -\frac{1}{3} - f(-2) = \frac{4}{3}.$$

当 $t \in [-2, -1]$ 时, $t+3 \in [1, 2]$, $f(x)$ 在

$[-2, -1]$, $[1, 2]$ 上单调递增,

所以 $f(-2) \leq f(t) \leq f(-1)$, $f(1) \leq f(t+3) \leq f(2)$.

$$\text{所以 } g(t) = f(-1) - f(t) = \frac{4}{3}.$$

综上 $g(t)$ 在区间 $[-3, -1]$ 上的最小值是 $\frac{4}{3}$.

(十三)

1. B 【解析】由题意知, $\frac{z}{1+i} = 1-2i$, 则 $z = (1+i)(1-2i) = 3-i$. 故选 B.

2. B 【解析】因为高二(2)班男生 36 人, 女生 18 人, 现用分层抽样方法从中抽出 n 人, 所以 $\frac{n}{36+18} = \frac{12}{36} \Rightarrow n=18$, 故选 B.

3. A 【解析】等级为 A 的人数是: $500 \times 41\% = 205$. 故选 A.

4. D 【解析】设长方形的长为 a , 宽为 b , 则长方形的面积为 ab , 三角形的面积 $\frac{1}{4}ab$, 则阴影部分的面积为 $ab - \frac{1}{4}ab = \frac{3}{4}ab$, 根据几何概型概率公式可得点 M 取自阴影区域的概率是 $\frac{\frac{3}{4}ab}{ab} = \frac{3}{4}$, 故选 D.

5. B 【解析】阅读茎叶图可知乙组的中位数为: $\frac{32+34}{2} = 33$,

结合题意可知: 甲组的中位数为 33, 即 $m=3$,

则甲组数据的平均数为: $\frac{24+33+36}{3} = 31$.

6. C 【解析】由题意可知本题是一个古典概型, 试验发生包含的事件 $a \in A = \{-2, 1, 2\}$, $b \in B = \{-1, 1, 3\}$

得到 (a, b) 的取值所有可能的结果是: $(-2, -1)$, $(-2, 1)$, $(-2, 3)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(1, 3)$, $(2, -1)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, 共 9 种结果,

由 $ax - y + b = 0$ 可得 $y = ax + b$,

当 $\begin{cases} a > 0, \\ b \geq 0 \end{cases}$ 时, 直线不经过第四象限,

符合条件的 (a, b) 的有 $(1, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$,

则直线 $ax-y+b=0$ 不经过第四象限的概率为 $P=\frac{4}{9}$,

故选 C.

7. B 【解析】由题意可知 A, B 两事件互斥, 且 $P(A)=\frac{14}{32}, P(B)=\frac{6}{32}$,

$$\text{所以 } P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{14}{32}+\frac{6}{32}=\frac{5}{8}.$$

8. C 【解析】根据频率分布直方图知,

12 月份人均用电量人数最多的一组是 $[10, 20)$, 有 $1\,000 \times 0.04 \times 10 = 400$ 人, A 正确;

12 月份人均用电量不低于 20 度的频率是 $(0.03 + 0.01 + 0.01) \times 10 = 0.5$, 有 $1\,000 \times 0.5 = 500$ 人, B 正确;

12 月份人均用电量为 $5 \times 0.1 + 15 \times 0.4 + 25 \times 0.3 + 35 \times 0.1 + 45 \times 0.1 = 22$, C 错误;

在这 1 000 位居民中任选 1 位协助收费, 用电量在 $[30, 40)$ 的频率为 0.1, 估计所求的概率为 $\frac{1}{10}$, D 正确. 故选 C.

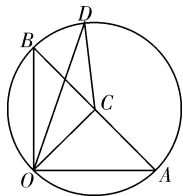
9. D 【解析】设事件 A, B 分别表示甲、乙飞行员击中敌机, 则 $P(A)=0.4, P(B)=0.5$, 事件“恰有一人击中敌机”的概率为 $P(A\bar{B}+\bar{A}B)=P(A) \cdot (1-P(B)) + (1-P(A)) \cdot P(B)=0.5$. 选 D.

10. D 【解析】 $\because A=3B, \frac{c \cdot \sin B}{\sin 4B} = \frac{c \cdot \sin B}{\sin(3B+B)} =$

$$\frac{c \cdot \sin B}{\sin(A+B)} = \frac{c \cdot \sin B}{\sin C}, \text{由正弦定理可得}$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \therefore \frac{c \cdot \sin B}{\sin C} = b = 1. \text{ 故选 D.}$$

11. A 【解析】如图所示, $a = \overrightarrow{OA}, b = \overrightarrow{OB}$, 且 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$,



$$\text{又 } c = \frac{1}{2}(a+b), \text{ 取 } AB \text{ 中点为 } C, \text{ 可得 } c = \overrightarrow{OC},$$

$$\therefore |d-c| = \sqrt{2},$$

$\therefore d$ 的终点 D 在以 C 为圆心, $\sqrt{2}$ 为半径的圆上运动,

当 D 点在 O 点时, $|d|$ 的最小值为 0;

当 D 点在 OC 的延长线时, $|d|$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$,

$\therefore |d|$ 的取值范围是 $[0, 2\sqrt{2}]$.

故选 A.

12. D 【解析】当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x)$ 的取值范围是

$$\left[-\frac{1}{4}, 0\right); \text{ 当 } x \in [1, 2] \text{ 时, } f(x) \text{ 的取值范围是}$$

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right], \text{ 所以当 } x \in (0, 2] \text{ 时, } f(x) \text{ 的取值范围是}$$

$$\left[-\frac{1}{4}, 0\right) \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \text{ 又当 } x \in (2, 4] \text{ 时,}$$

$$f(x) = 2f(x-2) - 2, \text{ 故 } f(x) \text{ 的取值范围是}$$

$$\left[-\frac{5}{2}, -2\right) \cup [-1, 0], \text{ 所以 } x \in (0, 4] \text{ 时,}$$

$$f(x)_{\min} = -\frac{5}{2}, \text{ 故 } t^2 - \frac{7}{2}t \leq -\frac{5}{2}, \text{ 解得 } 1 \leq t \leq$$

$$\frac{5}{2}, \text{ 选 D.}$$

13. $(-1, 3)$ 【解析】由于不等式 $ax-b < 0$ 的解集是 $(1, +\infty)$,

$$\text{所以 } a < 0 \text{ 且 } \frac{b}{a} = 1,$$

$$\text{故 } a = b < 0.$$

$$\text{所求不等式可化为 } (-x-1)(x-3) > 0,$$

$$\text{即 } (x+1)(x-3) < 0, \text{ 解得 } -1 < x < 3.$$

14. 101.7

$$\text{【解析】由题意可得 } \bar{x} = \frac{15+20+30+40+50}{5} = 31,$$

$$\bar{y} = \frac{65+70+75+80+90}{5} = 76,$$

$$\therefore 76 = 0.66 \times 31 + a,$$

$$a = 55.54,$$

$$\text{则线性回归方程为 } \hat{y} = 0.66x + 55.54.$$

$$\text{当 } x = 70 \text{ 时, } \hat{y} = 101.7.$$

15. $\frac{2}{3}$ 【解析】从袋中一次随机摸出 2 个球, 共有

$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)$, 6 种基本事件, 其中摸出的 2 个球的编号之和大于 4 的事件为 $(1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)$, 4 种基本事件, 因此概率为 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

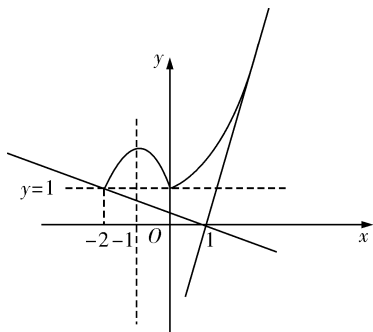
16. $a \leq -\frac{1}{3}$ 或 $a \geq e^2$ 【解析】函数 $g(x) = f(x) - ax$

$+a$ 存在零点, 即方程 $f(x) - ax + a = 0$ 存在实数根,

也就是函数 $y = f(x)$ 与 $y = a(x-1)$ 的图象有交点. 如图所示, 直线 $y = a(x-1)$ 恒过定点 $(1, 0)$,

过点 $(-2, 1)$ 与 $(1, 0)$ 的直线的斜率 $k = \frac{1-0}{-2-1} =$

$-\frac{1}{3}$,



设直线 $y = a(x-1)$ 与 $y = e^x$ 相切于 (x_0, e^{x_0}) , 则切点处的导数值为 e^{x_0} , 则过切点的直线方程为 $y - e^{x_0} = e^{x_0}(x - x_0)$, 由切线过 $(1, 0)$, 则 $-e^{x_0} = e^{x_0}(1 - x_0)$, $\therefore x_0 e^{x_0} = 2e^{x_0}$, 得 $x_0 = 2$. 此时切线的斜率为 e^2 . 由图可知, 要使函数 $g(x) = f(x) - ax + a$ 存在零点, 则实数 a 的取值范围为 $a \leq -\frac{1}{3}$ 或 $a \geq e^2$.

17. 【解析】(1) 补齐表格如下:

	喜欢“地方历史”校本课程	不喜欢“地方历史”校本课程	合计
在本地成长	8	2	10
非本地成长	4	6	10
合计	12	8	20

由上表知, 在喜欢“地方历史”校本课程的 12 名学生中抽取 1 人, 在本地成长的概率为 $\frac{8}{12}$; 在不喜欢“地方历史”校本课程的 8 名学生中抽取 1 人, 在本地成长的概率为 $\frac{2}{8}$;

设从抽取的 2 名学生中至少有 1 名学生是在本地成长的事件为 A , 则

$$P(A) = \frac{8}{12} \times \frac{2}{8} + \frac{8}{12} \times \frac{6}{8} + \frac{4}{12} \times \frac{2}{8} = \frac{3}{4}.$$

$$(2) K^2 = \frac{20(48-8)^2}{10 \times 10 \times 12 \times 8} = \frac{10}{3} \approx 3.333 > 2.706,$$

答: 能在犯错误的概率不超过 0.10 的前提下认为“是否喜欢‘地方历史’校本课程与本地成长有关”.

18. 【解析】(1) 分数在 $[120, 130)$ 内的频率为 $1 - (0.1$

$$+ 0.15 + 0.15 + 0.25 + 0.05) = 0.3, \frac{\text{频率}}{\text{组距}} = 0.03,$$

直方图略, 平均分为: $95 \times 0.1 + 105 \times 0.15 + 115 \times 0.15 + 125 \times 0.3 + 135 \times 0.25 + 145 \times 0.05 = 121$.

(2) 由题意, $[110, 120)$ 分数段的人数为: $60 \times 0.15 = 9$ 人,

$[120, 130)$ 分数段的人数为: $60 \times 0.3 = 18$ 人,

因为用分层抽样的方法在分数段为 $[110, 130)$ 的学生中抽取一个容量为 6 的样本, 抽样比 $k =$

$$\frac{6}{18+9} = \frac{2}{9}, \text{所以需在} [110, 120) \text{分数段内抽取} \frac{2}{9}$$

$\times 9 = 2$ 人, 并分别记为 m, n ;

在 $[120, 130)$ 分数段内抽取 $\frac{2}{9} \times 18 = 4$ 人, 并分别

记为 a, b, c, d ;

设“从样本中任取 2 人, 至多有 1 人在分数段 $[120, 130)$ 内”为事件 A ,

则基本事件有: $(m, n), (m, a), (m, b), (m, c), (m, d), (n, a), (n, b), (n, c), (n, d), (a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)$ 共 15 种.

事件 A 包含的基本事件有: $(m, n), (m, a), (m, b), (m, c), (m, d), (n, a), (n, b), (n, c), (n, d)$ 共 9

$$\text{种, 所以 } P(A) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

19. 【解析】(1) 当 $n \geq 2$ 时, 有 $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n^2 - n}{2} -$

$$\frac{(n-1)^2 - (n-1)}{2} = n - 1.$$

当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = \frac{1-1}{2} = 0$, 满足上式.

所以 $a_n = n - 1$, 则 $b_n = a_n + 2^n + 1 = n + 2^n$.

$$(2) c_n = (a_n + 1)(b_n - n) = n2^n.$$

$$T_n = 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + n2^n \quad ①$$

$$2T_n = 2^2 + 2 \times 2^3 + 3 \times 2^4 + \cdots + (n-1)2^n + n2^{n+1} \quad ②$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{2}\text{得: } -T_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - n2^{n+1} =$$

$$\frac{2(1-2^n)}{1-2} - n2^{n+1} = (1-n)2^{n+1} - 2$$

$$\text{所以 } T_n = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

20. 【解析】(1) 依散点图可知, 选择 $y = e^{bx+a}$ 更适宜作为产卵数 y 关于温度 x 的回归方程类型.

$$(2) \text{ 因为 } y = e^{bx+a}, \text{ 令 } z = \ln y = bx + a,$$

所以 z 与 x 可看成线性回归,

$$\bar{x} = \frac{20+25+30+35}{4} = 27.5,$$

$$\bar{z} = \frac{1.61+3+4.61+5.78}{4} = 3.75,$$

$$\text{所以 } b = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i z_i - n \cdot \bar{x} \bar{z}}{\sum_{i=1}^4 x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2} = \frac{447.8 - 4 \times 27.5 \times 3.75}{3150 - 4 \times 27.5 \times 27.5}$$

$$= 0.28,$$

$$a = \bar{z} - b \cdot \bar{x} = 3.75 - 0.28 \times 27.5 = -3.95,$$

$$\text{所以 } z = 0.28x - 3.95,$$

$$\text{即 } y = e^{0.28x-3.95}.$$

$$(3) \text{ 由 } y \leq 50 \text{ 即 } e^{0.28x-3.95} \leq 50,$$

$$0.28x - 3.95 \leq \ln 50 = 3.91,$$

$$\text{解得 } x \leq 28.07,$$

要使得产卵数不超过 50, 则温度控制在 28°C 以下.

21. 【解析】(1) 依题意 $\frac{n}{n+2} = \frac{1}{2}$, 得 $n = 2$.

(2) ①取出 2 个小球的可能情况有: $(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2), (2,0), (2,1), (2,2), (2,2)$, 共 16 种, 其中满足“ $a+b=2$ ”的有 5 种.

$$\text{所以所求概率为 } P(A) = \frac{5}{16}.$$

②记“ $x^2 + y^2 > (a-b)^2$ 恒成立”为事件 B , 则事件 B 等价于“ $x^2 + y^2 > 4$ ”恒成立, (x,y) 可以看成平面中的点的坐标,

则全部结果所构成的区域为 $\Omega = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, x,y \in \mathbf{R}\}$,

而事件 B 构成的区域为 $B = \{(x,y) | x^2 + y^2 > 4, (x,y) \in \Omega\}$.

$$\text{所以所求的概率为 } P(B) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

$$22. \text{【解析】}(1) \text{ 令 } f'(x) = \frac{x-a^2}{x} = 0, \text{ 得 } x = a^2 > 0,$$

当 $0 < a \leq 1$ 时, $a^2 \leq a$, $f'(x) > 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增.

当 $a > 1$ 时, $a^2 > a$, 令 $f'(x) > 0$, 得 $x > a^2$;

令 $f'(x) < 0$, 得 $a < x < a^2$.

$\therefore f(x)$ 在 (a, a^2) 上单调递减, 在 $(a^2, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 令 $a = 1$, 得 $f(x) = x - \ln x$, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$.

$$\therefore f(x)_{\min} = f(1) = 1, \therefore x - \ln x \geq 1,$$

$$\therefore x^3 - x^2 \ln x \geq x^2.$$

设 $g(x) = 2x^3 - x^2 \ln x - 16x + 20$, 则 $g(x) = x^3 + (x^3 - x^2 \ln x) - 16x + 20 \geq x^3 + x^2 - 16x + 20$,

当且仅当 $x = 1$ 时取等号.

$$\text{设 } h(x) = x^3 + x^2 - 16x + 20 (x > 0),$$

$$\text{则 } h'(x) = 3x^2 + 2x - 16 = (3x+8)(x-2),$$

令 $h'(x) > 0$, 得 $x > 2$; 令 $h'(x) < 0$, 得 $0 < x < 2$.

$$\therefore h(x)_{\min} = h(2) = 0.$$

$\therefore g(x) \geq h(x) \geq 0$, 易知此不等式中两个等号的成立条件不同, 故 $g(x) > 0$,

从而 $2x^3 - x^2 \ln x - 16x + 20 > 0$ 得证.

(十四)

1. D 【解析】由三视图可知, 该物体由圆锥和圆柱组合而成, 故选 D.

2. A 【解析】 $\because z = 1 + 2i$,

$$\therefore z + i \cdot \bar{z} = 1 + 2i + i(1 - 2i) = 1 + 2i + i + 2 = 3 + 3i.$$

$\therefore$ 复数 $z + i \cdot \bar{z}$ 在复平面内对应的点的坐标为 $(3, 3)$, 位于第一象限.

故选 A.

3. B 【解析】已知平面 α 外不共线的三点 A, B, C 到 α 的距离都相等, 且三点在 α 的同侧, 则直线 AB 平行于 α , 直线 BC 平行于 α , 即平面 ABC 平行于 α , 反之根据面面平行的定理可知成立,

故选 B.

4. B 【解析】依题意可知, 原不等式可转化为 $3^{-x+4} > 3^{-2x}$, 由于指数函数 $y = 3^x$ 为增函数, 故 $-x+4 > -2x$, $x > -4$, 故选 B.

5. C 【解析】对于 A, 根据平面与平面平行、垂直的性

质,可得正确;

对于 B,根据平面与平面平行、线面垂直的性质,可得正确;

对于 C, m, n 可能异面,也可能平行,故错误;

对于 D,由 $m \parallel n, n \perp \beta$ 可知 $m \perp \beta$, 又 $m \subset \alpha$, 所以 $\alpha \perp \beta$, 可得正确.

故选 C.

6. C 【解析】设圆锥的底面圆半径为 r , 高为 h ,

因为底面周长为 8π ,

所以 $2\pi r = 8\pi$, 所以 $r = 4$,

又圆锥的母线长为 5,

所以圆锥的高为 $h = \sqrt{25 - 16} = 3$,

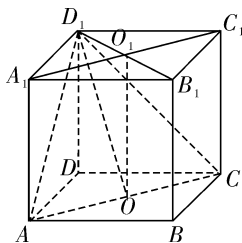
因此圆锥的体积为 $V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h = 16\pi$.

7. B 【解析】由图可知矩形 $O'A'B'C'$ 的面积为 $3 \times 1 = 3 \text{ cm}^2$.

原图形的面积是 S , 则 $S_{O'A'B'C'} = \frac{\sqrt{2}}{4} S$,

解得 $S = 6\sqrt{2} \text{ cm}^2$. 故选 B.

8. D 【解析】如图, 设上下底面的中心分别为 O_1, O , 设正方体的棱长等于 1,



则 O_1O 与平面 ACD_1 所成角就是 BB_1 与平面 ACD_1 所成角, 即 $\angle O_1OD_1$,

直角三角形 OO_1D_1 中, $\cos \angle O_1OD_1 = \frac{O_1O}{OD_1} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

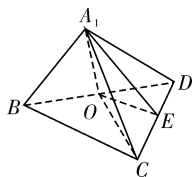
故选 D.

9. B 【解析】运用正弦定理得到 $\sin A + \sin B = \sin C \cdot (\cos A + \cos B)$, 结合正弦的两角和公式, $\sin A = \sin(B + C)$, $\sin B = \sin(A + C)$, 代入, 得到 $\sin B \cos C + \cos B \sin C + \sin A \cos C + \cos A \sin C = \sin C \cdot (\cos A + \cos B)$ 得到 $\cos C(\sin A + \sin B) = 0$, 结合三角形的性质可知, $\sin A > 0$, $\sin B > 0$, 所以 $\cos C = 0$, 解得 $C = \frac{\pi}{2}$, 故该三角形为直角三角形, 故选 B.

10. D 【解析】 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2, AC = 4, BC = 2\sqrt{5}$, 由勾股定理可知 $\triangle ABC$ 是以 A 为直角顶点的直角三角形, 斜边 BC 中点的 O' 就是 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心, 半径为 $\sqrt{5}$, $\therefore$ 三棱锥 $O-ABC$ 的体积为 $\frac{8}{3}$, $\therefore \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times OO' = \frac{8}{3}$, $\therefore OO' = 2$, 球的半径 $R = \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = 3$, 所以球 O 的表面积为 $4\pi R^2 = 4\pi \times 9 = 36\pi$. 故选 D.

11. A 【解析】函数 $f(x)$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后得到 $\sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \varphi\right] = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3} + \varphi\right)$, 为偶函数, 根据诱导公式可知 $\frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\therefore |\varphi| < \frac{\pi}{2}$, $\therefore \varphi = \frac{\pi}{6}$. 故 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$. 所以 $a_n = f\left(\frac{n\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$, 根据三角函数的周期性可知 a_n 是周期为 6 的周期数列, 且从 a_1 开始每 6 项和为零, 故 $S_{2020} = S_{2016+4} = S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{5\pi}{6} + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$. 故选 A.

12. C 【解析】 $\because BD \perp OC, BD \perp OA_1, OC \cap OA_1 = O$, 故直线 $BD \perp$ 平面 A_1OC , 选项 A 正确; $\because O$ 到 A_1, B, C, D 的距离都相等, 则 O 为三棱锥 A_1-BCD 外接球的球心且半径为 $\sqrt{2}$, 选项 B 正确; 连接 A_1E, OE , 则 $OE \parallel BC$, $\therefore BC \parallel$ 平面 A_1OE , 选项 D 正确. 故选 C.

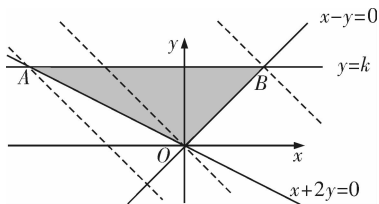


13. 1 【解析】结合 $a \perp (a + 2b)$ 可知, $a \cdot (a + 2b) = 0$ 得到 $a^2 + 2ab = 0$,

$$\frac{|a+b|}{|b|} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{(b)^2}} = \sqrt{\frac{0+b^2}{b^2}} = 1.$$

14. 38 【解析】根据题中的三视图可知, 该几何体是由一个长、宽均为 2, 高为 4 的长方体截去一个长、宽均为 1, 高为 4 的长方体后剩余的部分, 所以该几何体的表面积为 $2 \times 2 \times 2 - 1 \times 1 \times 2 + 2 \times 4 \times 4 = 38$.
15. -2 【解析】作出可行域, 如图所示, 经计算, 得 $A(-2k, k), B(k, k)$. 由图可知, 当直线 $y = -x$

+z 过点 B 时, z 取最大值, 即 $k+k=4$, 解得 $k=2$; 当直线 $y=-x+z$ 过点 A $(-4, 2)$ 时, z 取最小值, 即 $z_{\min}=-4+2=-2$.



16. $\frac{6}{17}$ 【解析】由题意, 四棱锥 $P-ABCD$ 为正四棱锥, $PA=PB=PC=PD$,

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore$ 异面直线 PB 与 AD 所成角为 $\angle PBC$,

取 BC 中点 E , 则 $\tan \angle PBC = \frac{PE}{BE} = \frac{5}{3}$,

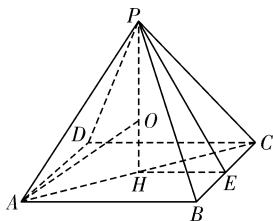
$\therefore PE=5, HP=4$,

从而四棱锥 $P-ABCD$ 的表面积为 $S = \frac{1}{2} \times 6 \times 5$

$\times 4 + 6 \times 6 = 96, V = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 4 = 48$,

$\therefore$ 内切球的半径为 $r = \frac{3V}{S} = \frac{3}{2}$.

设四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的球心为 O , 外接球的半径为 R , 则 $OP=OA$,



$\therefore (4-R)^2 + (3\sqrt{2})^2 = R^2$,

$\therefore R = \frac{17}{4}$,

$\therefore \frac{r}{R} = \frac{6}{17}$.

17. 【解析】(1) 平面直角坐标系中, 向量 $a=(1, 2)$, $b=(\cos x, \sin x)$, 且 $a \parallel b$, 则 $\sin x - 2\cos x = 0$,

$\therefore \sin x = 2\cos x, \therefore \tan x = 2$.

(2) 设 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$,

则 $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\tan x}{\tan^2 x + 1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \\ &= \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1-4}{1+4} \\ &= \frac{4-3\sqrt{3}}{10}. \end{aligned}$$

18. 【解析】(1) $\because AB^2 + BD^2 = AD^2 = 2$,

$\therefore AB \perp BD$.

又 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD, \therefore AA_1 \perp BD$.

$\because AB \cap AA_1 = A, \therefore BD \perp$ 平面 ABB_1A_1 .

(2) $\because AB=BD$ 且 $AB \perp BD, \therefore \angle ADB = 45^\circ$.

又 $AD \parallel BC, \therefore \angle CBD = \angle ADB = 45^\circ$,

$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BD \times BC \times \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore V_{D-A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{3} \times 2 \times (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$.

又 $V_{D-ABB_1A_1} = \frac{1}{3} \times BD \times S_{\text{矩形} ABB_1A_1} = \frac{1}{3} \times 1 \times 1$

$\times 2 = \frac{2}{3}$.

$\therefore \frac{1+\sqrt{2}}{3} > \frac{2}{3}$,

$\therefore V_{D-A_1B_1C_1D_1} > V_{D-ABB_1A_1}$.

19. 【解析】(1) 根据题意绘制茎叶图如下:

5	9
6	5
7	3 6 8
8	1 2 4 6
9	6

(2) 样本数据的中位数为: $\frac{78+81}{2} = 79.5$.

平均数为 $x = \frac{1}{10} \times (96+81+82+84+86+73+$

$76+78+65+59) = \frac{780}{10} = 78$,

方差为 $s^2 = \frac{1}{10} \times [18^2 + 3^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + (-5)^2$

$+ (-2)^2 + 0^2 + (-13)^2 + (-19)^2] = \frac{1\ 008}{10}$

$= 100.8$.

(3) 成绩在平均分以上(含平均分)的作品有: 78, 81, 82, 84, 86, 96 共 6 件;

从成绩在平均分以上(含平均分)的作品中随机抽取两件作品的基本事件有: (78, 81), (78, 82), (78, 84), (78, 86), (78, 96), (81, 82), (81, 84), (81, 86), (81, 96), (82, 84), (82, 86), (82, 96), (84, 86), (84, 96), (86, 96), 共有 15 个.

设事件 A 为成绩为 82 分的作品被抽取到, 则事件 A 包含的基本事件有: (78, 82), (81, 82), (82, 84), (82, 86), (82, 96) 共 5 个,

$$\therefore P(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

因此成绩为 82 分的作品被抽取到的概率为 $\frac{1}{3}$.

20. 【解析】(1) $\because PA$ 是圆柱的母线,

$$\therefore PA \perp \text{平面 } ABC \Rightarrow PA \perp BC,$$

$\because AB$ 是圆柱底面圆的直径, C 是底面圆周上异于 A, B 的任意一点,

$$\therefore BC \perp AC, \text{ 又 } AC \cap PA = A, \therefore BC \perp \text{平面 } PAC,$$

$$\text{又 } PC \subset \text{平面 } PAC, \therefore BC \perp PC.$$

(2) 由已知得三棱锥 $P-ABC$ 的高 $PA=2$, 当直角 $\triangle ABC$ 的面积最大时, 三棱锥 $P-ABC$ 的体积最大, 当点 C 在弧 AB 中点时 $S_{\triangle ABC}=1$ 最大,

$$\therefore V_{P-ABC} = \frac{1}{3} \times 2 \times 1 = \frac{2}{3},$$

结合(1)可得三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的直径即为 PB ,

$$\text{所以此时外接球的直径 } 2R = \sqrt{PA^2 + AB^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{2}.$$

$$\therefore S = 8\pi.$$

21. 【解析】(1) $\because$ 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $ABCD$ 为菱形, AC, BD 交于点 O ,

$$\therefore BD \perp AC,$$

$$\because PA \perp \text{平面 } ABCD,$$

$$\text{则 } BD \perp PA.$$

$$\text{由 } BD \perp AC, BD \perp PA, AC \cap PA = A,$$

$$\text{则 } BD \perp \text{平面 } PAC,$$

$$\text{又因为 } BD \subset \text{平面 } BDE,$$

$$\text{故平面 } BDE \perp \text{平面 } PAC.$$

(2) 由题知, 当 OE 最小时, $\triangle BED$ 的面积最小,

$$S_{\triangle BED} = \frac{1}{2} \times BD \times OE = 4,$$

$$\text{即 } OE = 1,$$

$$\text{此时 } OE \perp PC, \text{ 即当 } OE \perp PC \text{ 时, } OE = 1, OC = 3,$$

$$CE = 2\sqrt{2},$$

$$\text{又由 } \triangle COE \sim \triangle CPA,$$

$$\text{可得 } \frac{OE}{PA} = \frac{CE}{AC}, \text{ 解得 } PA = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{所以 } V_{P-ABCD} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}.$$

22. 【解析】(1) 在正方形 $ABCD$ 中, $\angle A, \angle B, \angle C$ 为直角,

$\therefore$ 在三棱锥 $P-DEF$ 中, PE, PF, PD 三条线段两两垂直,

$$\therefore PD \perp \text{平面 } PEF.$$

$$\because \frac{DG}{GH} = \frac{BR}{RH}, \text{ 即 } \frac{DG}{GH} = \frac{PR}{RH},$$

$$\therefore \text{在 } \triangle PDH \text{ 中, } RG \parallel PD,$$

$$\therefore GR \perp \text{平面 } PEF.$$

(2) 因为正方形 $ABCD$ 的边长为 4,

$$S_{\text{正方形 } ABCD} = 16, \text{ 由题意可知三棱锥的表面积 } S =$$

$$S_{\text{正方形 } ABCD} = 16,$$

$$\text{且 } PE = PF = 2, PD = 4,$$

设三棱锥 $P-DEF$ 内切球半径为 r .

$$\text{则三棱锥的体积 } V_{P-DEF} = \frac{1}{6} \times 2 \times 2 \times 4 = \frac{1}{3} S$$

$$\cdot r,$$

$$\therefore r = \frac{1}{2}, \text{ 即三棱锥 } P-DEF \text{ 的内切球的半径}$$

$$\text{为 } \frac{1}{2}.$$

(十五)

1. D 【解析】由于斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, 故倾斜角为 150° .

2. C 【解析】 $a_3 = 3S_2 + 2, a_4 = 3S_3 + 2$, 等式两边分别相减得, $a_4 - a_3 = 3a_3$ 即 $a_4 = 4a_3, \therefore q = 4$.

3. D 【解析】A 选项, 可知 90 后占了 56%, 故正确;
B 选项, 90 后从事技术岗位的人数占 $56\% \times 39.6\% = 22.176\%$, 可知互联网行业中从事技术岗位的人数超过总人数的 20%, 故正确;
C 选项, 90 后从事运营岗位的人数占 $56\% \times 17\% = 9.52\%$, 超过 80 前总人数, 故正确;

D 选项, 因为 80 后从业者中从事技术人数所占比例不清楚, 所以不一定多, 故错误.

故选 D.

4. C 【解析】直线 $mx - y + 1 - 2m = 0$ 过定点 $Q(2, 1)$, 所以点 $P(3, 2)$ 到直线 $mx - y + 1 - 2m = 0$ 的距离最大时 PQ 垂直于该直线, 即 $m \cdot \frac{2-1}{3-2} = -1$, $\therefore m = -1$, 选 C.

5. C 【解析】整理圆 C_2 的方程为标准型即: $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 32 - m$,

圆心距为: $\sqrt{(1-4)^2 + (0+4)^2} = 5$, 两圆半径为: $r_1 = 1, r_2 = \sqrt{32 - m}$,

当两圆外切时, $\sqrt{32 - m} + 1 = 5, \therefore m = 16$,

当两圆内切时, 由于 $1 < 5$, 故有 $\sqrt{32 - m} - 1 = 5$,

$\therefore m = -4$,

综上可得, $m = -4$ 或 16 .

6. B 【解析】由题意, 设直线 l_2 上的任意一点 $A(x, y)$, 则点 A 关于点 $(2, 1)$ 的对称点为 $B(4-x, 2-y)$,

又由点 B 在直线 $l_1: y = kx - k + 2$ 上,

即 $2 - y = k(4 - x) - k + 2$,

整理得 $y = k(x - 3)$, 令 $x - 3 = 0$, 即 $x = 3$ 时, $y = 0$,

可得直线 l_2 过定点 $(3, 0)$, 故选 B.

7. B 【解析】因为直线 $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$ 及直线 $x - \sqrt{3}y - 8 = 0$ 平行, 且两直线间的距离为 $\frac{|4 - (-8)|}{\sqrt{1+3}} = 6$,

所以圆心到直线的距离为 $d = 3$,

设圆的半径为 r ,

因为两直线截圆所得弦长均为 $4\sqrt{2}$,

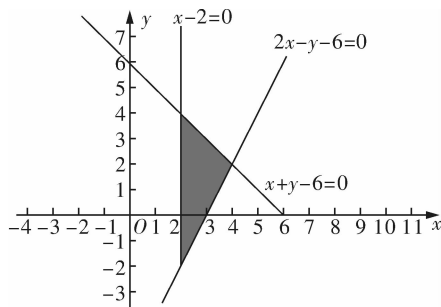
所以 $r = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + d^2} = \sqrt{17}$,

因此圆的面积为 $S = \pi r^2 = 17\pi$.

8. B 【解析】由几何体的三视图可知该几何体可由边长为 2 的正方体切去 $\frac{1}{4}$ 而得,

$\therefore$ 该几何体的体积为 $\frac{3}{4} \times 2^3 = 6$.

9. B 【解析】画出 $\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ x+y \leq 6, \\ 2x-y \leq 6 \end{cases}$ 表示的可行域, 如图,



由 $\begin{cases} x+y-6=0, \\ x-2=0 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x=2, \\ y=4, \end{cases}$

由 $\begin{cases} 2x-y-6=0, \\ x-2=0 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x=2, \\ y=-2, \end{cases}$

设 $m = x - 2y + 1$,

将 $m = x - 2y + 1$ 变形为 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1-m}{2}$,

平移直线 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1-m}{2}$,

由图可知当直线 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1-m}{2}$ 经过点 $(2, -2)$,

$(2, 4)$ 时,

直线在 y 轴上的截距分别最小与最大, m 分别取得最大值与最小值,

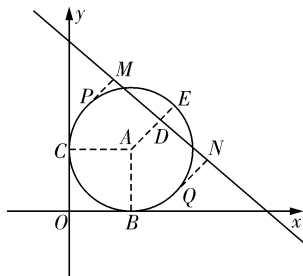
最大值 $m = 2 + 2 \times 2 + 1 = 7$, 最小值 $m = 2 - 2 \times 4 + 1 = -5$,

$-5 \leq m \leq 7, 0 \leq |m| \leq 7$,

即 $z = |x - 2y + 1|$ 的最大值为 7,

故选 B.

10. B 【解析】由圆的方程, 得到圆心 A 的坐标为 $(3, 3)$, 半径 $AE = 3$,



则圆心 $(3, 3)$ 到直线 $3x + 4y - 11 = 0$ 的距离为 $d = \frac{|3 \times 3 + 4 \times 3 - 11|}{5} = 2$, 即 $AD = 2$,

$\therefore ED = 1$, 即圆周上 E 到已知直线的距离为 1, 同时存在 P 和 Q 也满足题意,

∴圆上的点到直线 $3x+4y-11=0$ 的距离为 1 的点有 3 个.

故选 B.

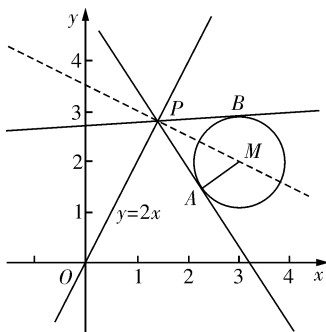
11. D 【解析】由题意可得 $|ax+1| \leq |x-2|$ 对任意的 $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ 恒成立, 得 $x-2 \leq ax+1 \leq 2-x$,

$$\text{从而得到} \begin{cases} a \geq \frac{x-3}{x}, \\ a \leq \frac{1-x}{x} \end{cases} \text{对任意的 } x \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ 恒}$$

成立,

∴ $a \geq -2$ 且 $a \leq 0$, 即 $a \in [-2, 0]$, 故选 D.

12. C 【解析】如图所示, 连接 PM 、 AM , 因为圆心 M 不在直线 l 上, 可得当切线 l_1, l_2 关于直线 l 对称时, 直线 $l \perp PM$, 且射线 PM 恰好是 $\angle APB$ 的平分线, ∵ 圆 M 的方程为 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = \frac{4}{5}$, ∴ 点 M 的坐标为 $(3, 2)$, 半径 $r = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 点 M 到直线 $l: 2x-y=0$ 的距离为 $PM = \frac{|2 \times 3 - 2|}{\sqrt{4+1}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, 由 PA 切圆 M 于 A , 得 $\text{Rt} \triangle PAM$ 中, $\sin \angle APM = \frac{AM}{PM} = \frac{1}{2}$, 得 $\angle APM = 30^\circ$, ∴ $\angle APB = 2\angle APM = 60^\circ$. 故选 C.



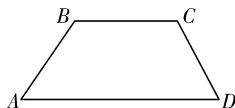
13. $x+3y-5=0$ 【解析】设所求直线为 $x+3y+m=0$, 将 $(2, 1)$ 代入得 $m=-5$, 故所求直线方程为 $x+3y-5=0$.

14. $\frac{3}{10}$ 【解析】由题意知, 从 1, 3, 5, 7, 9 中任取 3 个不同的数字 $a, b, c (a < b < c)$ 的所有可能结果有 $(1, 3, 5), (1, 3, 7), (1, 3, 9), (1, 5, 7), (1, 5, 9), (1, 7, 9), (3, 5, 7), (3, 5, 9), (3, 7, 9), (5, 7, 9)$, 共

10 种. 其中满足条件 $a+b > c$ 的结果有 $(3, 5, 7),$

$(3, 7, 9), (5, 7, 9)$, 共 3 种. 故所求概率为 $P = \frac{3}{10}$.

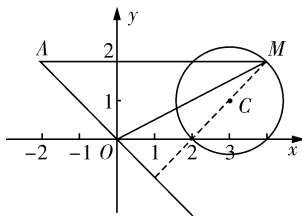
15. 梯形 【解析】 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = a + 2b - 4a - b - 5a - 3b = -8a - 2b = 2(-4a - b)$, 所以 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$, 即 $AD \parallel BC$, 且 $AD = 2BC$,



所以四边形 $ABCD$ 是梯形.

故答案为梯形.

16. 6 【解析】如图, 由题设, 得圆心 $C(3, 1)$, 半径 $r = \sqrt{2}$, $OA = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$,



直线 OA 的方程为 $x+y=0$, 则 $\triangle OAM$ 边 OA 上的高 h 就是点 M 到直线 OA 的距离, 圆心 $C(3, 1)$ 到直线 OA 的距离为 $d = \frac{|3+1|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, 可得圆 $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 2$ 上的点 M 到直线 OA 的距离的最大值为 $h_{\max} = d + r = 3\sqrt{2}$,

故 $\triangle OAM$ 面积的最大值 $S = \frac{1}{2} OA \cdot h_{\max} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6$.

17. 【解析】(1) ∵ 过点 $A(1, -2), B(-2, 1)$,

$$\therefore k = \frac{-2-1}{1-(-2)} = -1,$$

∴ 设直线为 $x+y+b=0$, 将 $A(1, -2)$ 代入得:

$$1-2+b=0, \text{ 即 } b=1,$$

$$\therefore x+y+1=0.$$

(2) ∵ 圆心为 $(4, 0)$,

$$\therefore \text{设圆为 } (x-4)^2 + y^2 = r^2,$$

$$\text{将 } A(2, 1) \text{ 代入, 得: } (2-4)^2 + 1^2 = r^2,$$

$$\therefore r = \sqrt{5}.$$

$$\therefore (x-4)^2 + y^2 = 5.$$

18. 【解析】(1) ∵ $f(x) = \cos(2x - \frac{4\pi}{3}) + 2\cos^2 x =$

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1,$$

由 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi$ 得 $f(x)$ 的对称轴方程为 $x=\frac{k\pi}{2}$

$$-\frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z}).$$

(2) 由 $f\left(\frac{A}{2}\right)=\cos\left(2 \cdot \frac{A}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+1=\frac{1}{2}$, 可得

$$\cos\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}.$$

由 $A \in (0, \pi)$, 可得 $A=\frac{\pi}{3}$.

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理, 得

$$a^2=b^2+c^2-2bccos\frac{\pi}{3}=(b+c)^2-3bc,$$

由 $b+c=2$ 知 $bc \leq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2=1$, 当 $b=c=1$ 时 bc

取最大值, 此时 a 取最小值 1.

19. 【解析】(1) 方法 1: 设直线 l 的方程为 $y=kx+1$,

$$\text{则由 } \begin{cases} x^2+y^2-6x+8=0, \\ y=kx+1 \end{cases} \text{ 得 } (k^2+1)x^2+(2k-6)x$$

$$+9=0,$$

$$\text{由 } \Delta=(2k-6)^2-36(k^2+1)>0 \text{ 得 } -24k-32k^2>0,$$

$$\text{故 } -\frac{3}{4}<k<0.$$

方法 2: 设直线 l 的方程为 $y=kx+1$, 即 $kx-y+1=0$,

圆心为 $C(3,0)$, 圆的半径为 1, 则圆心 C 到直线 l

$$\text{的距离 } d=\frac{|3k+1|}{\sqrt{k^2+1}},$$

因为直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点,

$$\text{故 } \frac{|3k+1|}{\sqrt{k^2+1}}<1, \text{ 得 } -\frac{3}{4}<k<0.$$

(2) 假设存在直线 l_1 垂直平分于弦 AB , 此时直线

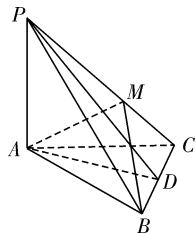
l_1 过 $Q(6,4), C(3,0)$,

$$\text{则 } k_1=\frac{4-0}{6-3}=\frac{4}{3}, \text{ 故 } AB \text{ 的斜率 } k=-\frac{3}{4}, \text{ 由 (1)}$$

可知, 不满足条件.

所以不存在直线 l_1 垂直平分弦 AB .

20. 【解析】(1) 证明: 取 BC 中点 D , 连接 PD, AD ,



因为 $PB=PC$, 所以 $BC \perp PD$,

因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 所以 $BC \perp AD$,

又因为 $AD \cap PD=D$, 所以 $BC \perp$ 平面 PAD ,

因为 $PA \subset$ 平面 PAD , 所以 $BC \perp PA$.

(2) 因为 $\angle PAB=90^\circ$, 所以 $PA \perp AB$,

又因为 $PA \perp BC, AB \cap BC=B$,

所以 $PA \perp$ 平面 ABC ,

因为 $\triangle ABC$ 为边长为 2 的等边三角形, 所以

$$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3},$$

因为 $PM=2MC$,

$$\text{所以 } V_{P-ABM}=\frac{2}{3}V_{P-ABC}=\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \cdot PA \cdot S_{\triangle ABC}$$

$$=\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}=\frac{2}{3}.$$

21. 【解析】(1) 依题意, 割线 CD 的斜率一定存在, 设

为 k , 则其方程为: $y-2=k(x-1)$,

即 $kx-y+2-k=0$.

则圆心 $E(2,0)$ 到直线 CD 的距离

$$d=\frac{|2k-0+2-k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}},$$

$$\text{且 } d^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1,$$

$$\therefore \frac{(k+2)^2}{k^2+1}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1 \Rightarrow k=-1 \text{ 或 } -7,$$

$\therefore$ 直线 CD 的方程为: $x+y-3=0$ 或 $7x+y-9=0$.

(2) 由条件可知 P, A, E, B 四点在以 PE 为直径的圆上,

设 $P(m, 2m)$,

又 $E(2,0)$, 则 EP 的中点为 $Q\left(\frac{m}{2}+1, m\right)$,

所以经过 P, A, E, B 四点的圆的方程为

$$\left(x-\frac{m}{2}-1\right)^2+(y-m)^2=\left(\frac{m}{2}-1\right)^2+m^2, \text{ 化简}$$

$$\text{得 } x^2+y^2-2x-m(x+2y-2)=0.$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0, \\ x + 2y - 2 = 0, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x=2, \\ y=0, \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=\frac{2}{5}, \\ y=\frac{4}{5}, \end{cases}$$

于是经过 P, A, E, B 四点的圆必过定点 $(2, 0), (\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$.

22. 【解析】(1) 因为 $A(-2, 0), B(1, 0), P(x', y')$, 且 $|PA| = 2|PB|$,

$$\text{所以 } \sqrt{(x'+2)^2 + y'^2} = 2\sqrt{(x'-1)^2 + y'^2},$$

$$\text{化简得 } x'^2 + y'^2 - 4x' = 0,$$

$$\text{即 } (x'-2)^2 + y'^2 = 4 \quad ①$$

$$\text{设 } M(x, y), \text{ 由中点坐标公式得 } \begin{cases} x = \frac{x'+6}{2}, \\ y = \frac{y'}{2}, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} x' = 2x - 6, \\ y' = 2y, \end{cases} \quad ②$$

$$\text{将 } ② \text{ 代入 } ① \text{ 得: } (2x-8)^2 + (2y)^2 = 4,$$

$$\text{所以点 } M \text{ 的轨迹方程为 } (x-4)^2 + y^2 = 1.$$

$$(2) \text{ 由 } \begin{cases} y = kx - 1, \\ (x-4)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得}$$

$$(x-4)^2 + (kx-1)^2 = 1,$$

$$\text{整理得 } (1+k^2)x^2 - 2(4+k)x + 16 = 0,$$

$$\text{由 } \Delta = 4(k+4)^2 - 4 \times 16(k^2+1) > 0 \text{ 得 } 0 < k < \frac{8}{15},$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = \frac{2(4+k)}{1+k^2}, x_1 \cdot x_2 = \frac{16}{1+k^2}.$$

$$\text{由已知 } |x_1 - x_2| = \frac{1}{1+k^2} \text{ 得}$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{(1+k^2)^2},$$

$$\text{所以 } \frac{4(4+k)^2}{(1+k^2)^2} - 4 \times \frac{16}{1+k^2} = \frac{1}{(1+k^2)^2},$$

$$\text{即 } 4(4+k)^2 - 64(1+k^2) = 1,$$

$$\text{即 } 60k^2 - 32k + 1 = 0,$$

$$\text{所以 } k_1 = \frac{1}{2}, k_2 = \frac{1}{30},$$

$$\text{所以直线 } l \text{ 的方程为 } y = \frac{1}{2}x - 1 \text{ 或 } y = \frac{1}{30}x - 1,$$

$$\text{即 } x - 2y - 2 = 0 \text{ 或 } x - 30y - 30 = 0.$$

1. A 【解析】因为 $A = \{x | y = \log_2(-x)\} = \{x | x < 0\}, B = \{y | y = \sin x\} = \{y | -1 \leq y \leq 1\}$, 则可知 $\complement_U A = \{x | x \geq 0\}, \therefore (\complement_U A) \cap B = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$, 选 A.

2. A 【解析】在推理过程“直线平行于平面, 则平行于平面内所有直线; 已知直线 $b \not\subset$ 平面 α , 直线 $a \subset$ 平面 α , 直线 $b \parallel$ 平面 α , 则直线 $b \parallel$ 直线 a ”中直线平行于平面, 则平行于平面内所有直线为大前提, 由线面平行的性质易得, 这是一个假命题, 故这个推理过程错误的原因是大前提错误.

3. C 【解析】 $\because$ 当 $a=1$ 时, 直线 $l_1: x+2y-1=0$ 与直线 $l_2: x+2y+4=0$ 的斜率都是 $-\frac{1}{2}$, 截距不相等, 得到两条直线平行, 故前者是后者的充分条件; $\because$ 当两条直线平行时, 得到 $\frac{a}{1} = \frac{2}{a+1} \neq \frac{-1}{4}$, 解得 $a = -2$ 或 $a=1$, $\therefore$ 后者不能推出前者. $\therefore$ 前者是后者的充分不必要条件, 故选 C.

4. B 【解析】由题意可知, 学生的成绩如下:

111, 111, 112, 113, 113;

116, 117, 117, 118, 118;

120, 120, 121, 122, 122;

123, 124, 124, 126, 127;

128, 128, 129, 129, 129;

131, 131, 131, 132, 132;

132, 133, 134, 134, 135;

137, 138, 139, 140, 140;

140, 142, 142, 143, 144.

用系统抽样方法从中抽取 9 人, 则每 5 人中抽取一人, 即上述分组中每组抽取一人,

则所抽取的学生的成绩在区间 $[120, 135]$ 内的学生人数为 5.

故选 B.

5. C 【解析】①已知复数 $z = i(1-i) = 1+i$, z 在复平面内对应的点位于第一象限, ①是错误的;

②若 x, y 是实数, 则“ $x^2 \neq y^2$ ”的充要条件是“ $x \neq y$ 且 $x \neq -y$ ”, ②是错误的;

③命题 p : “ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - x_0 - 1 > 0$ ”的否定 $\neg p$:

“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x - 1 \leq 0$ ”是正确的,特称命题的否定是全称命题.

6. A 【解析】 $\because \bar{x} = \frac{1+2+3+4}{4} = 2.5,$

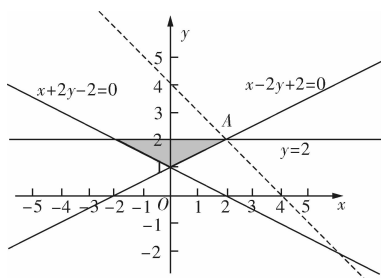
$$\bar{y} = \frac{4.5+4+3+2.5}{4} = 3.5,$$

线性回归方程是 $\hat{y} = b\bar{x} + 5.25,$

$$\therefore 3.5 = b \times 2.5 + 5.25, \therefore b = -0.7.$$

7. D 【解析】根据题意, 向量 $\mathbf{a} = (x, 2), \mathbf{b} = (2, 1),$ 若 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 则有 $x = 2 \times 2 = 4,$ 即 $\mathbf{a} = (4, 2), \mathbf{c} = (3, 4),$ 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 4 \times 3 + 2 \times 4 = 20,$ 故选 D.

8. D 【解析】画出不等式组表示的可行域(如图阴影部分所示).

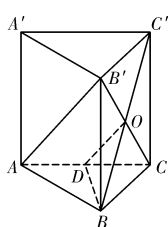


由 $z = x + y,$ 得 $y = -x + z.$ 平移直线 $y = -x + z,$ 结合图形可得, 当直线(图中的虚线)经过可行域内的点 A 时, 直线在 y 轴上的截距最大, 此时 z 取得最大值.

由 $\begin{cases} y=2, \\ x-2y+2=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=2, \end{cases}$ 故点 A 的坐标为 (2, 2).

$\therefore z_{\max} = 2 + 2 = 4,$ 即目标函数 $z = x + y$ 的最大值为 4. 选 D.

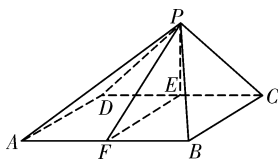
9. C 【解析】如图, 取 AC 的中点 D, 对角线 BC' 与 $B'C$ 相交于点 O, 根据中位线定理有 $OD \parallel AB',$ 故 $\angle BOD$ 即为所求角. 设 $AB = 1, AA' = 2,$ 故在 $\triangle OBD$ 中, $OB = OD = \frac{1}{2} AB' = \frac{\sqrt{5}}{2}, BD = \frac{\sqrt{3}}{2},$ 由余



$$\text{弦定理得 } \cos \angle BOD = \frac{\frac{5}{4} + \frac{5}{4} - \frac{3}{4}}{2 \times \frac{5}{4}} = \frac{7}{10}.$$

10. C 【解析】由三视图得几何体是如图所示的四棱

锥 $P-ABCD,$



其中 E, F 分别是 CD, AB 的中点, $PE \perp$ 平面 ABCD,

底面 ABCD 是矩形, $AB = 4, BC = 2, \triangle PCD$ 是等腰三角形, $PD = PC = 3,$

$$\therefore PE = \sqrt{5}, PF = \sqrt{PE^2 + EF^2} = \sqrt{5 + 4} = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} \times CD \times PE = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5},$$

$$S_{\triangle PAD} = S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} \times BC \times PC = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3,$$

$$S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \times AB \times PF = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6.$$

$\therefore$ 四棱锥 $P-ABCD$ 的四个侧面中面积最大的是 6, 故选 C.

11. B 【解析】由图象, 得函数 $y = \log_b(x-a) (b > 0$ 且 $b \neq 1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 且过点 (2, 0), 则 $b > 1$ 且 $f(2) = \log_b(2-a) = 0,$ 即 $a = 1.$

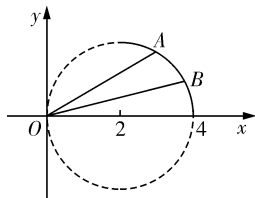
令 $g(x) = 1 + \sin bx,$ 则 $g(0) = 1 > 0,$

所以排除 A, C;

$$\because b > 1, \therefore T = \frac{2\pi}{b} < 2\pi, \text{ 排除 D,}$$

故选 B.

12. C 【解析】令 $y = \sqrt{4 - (x-2)^2}, x \in [2, 4],$ 化简得 $(x-2)^2 + y^2 = 4,$ 其中 $x \in [2, 4], y \geq 0,$ 得函数的图象是以 (2, 0) 为圆心, 半径为 2 的圆的上半圆的右半部分, 如图所示.



观察图象, 可得在图象上任意取两点 $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2)).$

对于 ① ②, 注意到 x_1, x_2 都是正数, 不等式 $x_2 f(x_1) > x_1 f(x_2)$ 等价于 $\frac{f(x_1)}{x_1} > \frac{f(x_2)}{x_2},$ 结合 2

$< x_1 < x_2 < 4$, 可得 A, B 两点与原点的连线斜率满足 $k_{OA} > k_{OB}$, ②正确, ①错误;

对于③④, 由于函数 $y = \sqrt{4 - (x-2)^2}$ 在 $x \in [2, 4]$ 上为减函数, 可得当 $x_1 < x_2$ 时, $f(x_2) < f(x_1)$, 所以 $(x_2 - x_1)[f(x_2) - f(x_1)] < 0$, 故③正确, ④错误.

故选 C.

13. $\frac{2}{9}$ 【解析】当 $x-3 \leq 0$ 时, $x \leq 3$,

则概率为 $\frac{3-1}{10-1} = \frac{2}{9}$.

14. $\frac{15}{8}$ 【解析】依次运行程序可得

第一次: $S = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $a = 2$, $b = \frac{3}{2}$, $n = 2$, 满足条件, 继续运行;

第二次: $S = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$, $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{8}{3}$, $n = 3$, 满足条件, 继续运行;

第三次: $S = \frac{3}{2} + \frac{3}{8} = \frac{15}{8}$, $a = \frac{8}{3}$, $b = \frac{15}{8}$, $n = 4$, 不满足条件, 停止运行, 输出 $\frac{15}{8}$.

15. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 【解析】由余弦定理可得, $\cos \angle ABC = \frac{1}{2}$,

$\therefore \angle ABC = \frac{\pi}{3}$, $\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中, BD 为 $\angle ABC$ 的平分线, $\therefore \angle ABD = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{\pi}{6}$,

$\therefore \tan \angle ABD = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

16. $[-1, +\infty)$ 【解析】若 $f(x) < x^2$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

则等价于 $\ln x - a < x^2$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

即 $\ln x - x^2 < a$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

设 $h(x) = \ln x - x^2$,

则 $h'(x) = \frac{1}{x} - 2x = \frac{1-2x^2}{x}$,

当 $x > 1$ 时, $h'(x) < 0$, 即 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为减函数,

则当 $x > 1$ 时, $h(x) < h(1) = 0 - 1 = -1$,

则 $a \geq -1$,

故答案为 $[-1, +\infty)$.

17. 【解析】(1) $\begin{cases} 3x+4y-2=0, \\ 2x+y+2=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=-2, \\ y=2, \end{cases}$ 则点 P

的坐标为 $(-2, 2)$.

又所求直线 l 与直线 $x-2y-1=0$ 垂直,

可设所求直线 l 的方程为 $2x+y+c=0$.

将点 P 的坐标代入得 $2 \times (-2) + 2 + c = 0$, 解得 $c = 2$.

故所求直线 l 的方程为 $2x+y+2=0$.

(2) 由直线 l 的方程知它在 x 轴, y 轴上的截距分别是 $-1, -2$,

所以直线 l 与两坐标轴围成的三角形的面积 $S = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$.

18. 【解析】(1) 由 $S_{n+1} = 4a_n + 2$ 成立,

则有 $S_n = 4a_{n-1} + 2 (n \geq 2)$,

两式相减得 $a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}$, 变形为 $a_{n+1} - 2a_n = 2(a_n - 2a_{n-1})$, 即 $b_n = 2b_{n-1} (n \geq 2)$,

由 $S_2 = a_1 + a_2 = 4a_1 + 2$ 得 $a_2 = 5$,

于是 $b_1 = a_2 - 2a_1 = 3$,

所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 3 公比是 2 的等比数列.

(2) 解法一: 由 (1) 得 $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, 即 $a_{n+1} - 2a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$,

所以 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{3}{4}$, 且 $\frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}$,

于是数列 $\left\{ \frac{a_n}{2^n} \right\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$, 公差为 $\frac{3}{4}$ 的等差数列,

所以 $\frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2} + (n-1) \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4} (3n-1)$,

即 $a_n = (3n-1)2^{n-2} (n \in \mathbf{N}^*)$.

解法二: 由 (1) 得 $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, 即 $a_{n+1} - 2a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$,

$a_n = (a_n - 2a_{n-1}) + 2(a_{n-1} - 2a_{n-2}) + 2^2(a_{n-2} - 2a_{n-3}) + \cdots + 2^{n-2}(a_2 - 2a_1) + 2^{n-1}a_1$,
 $= 3 \cdot 2^{n-2} + 3 \cdot 2^{n-2} + \cdots + 3 \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}$
 $= 3(n-1) \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}$
 $= (3n-1)2^{n-2}$.

19. 【解析】(1) 当直线 l 的斜率不存在时, $x = 2$, 满足题意;

当直线 l 的斜率存在时, 设 l 的方程为 $y = k(x -$

2), 即 $kx - y - 2k = 0$,

又圆 C 的圆心为 $(3, -2)$, $r = 3$,

由 $\frac{|3k + 2 - 2k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1$, 得 $k = -\frac{3}{4}$,

所以直线 l 的方程为 $3x + 4y - 6 = 0$.

综上, 直线 l 的方程为 $x = 2$ 或 $3x + 4y - 6 = 0$.

(2) 弦心距 $d = \sqrt{r^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{5}$, 设直线 AB 的方程为 $y = k(x - 2)$,

则圆心到直线 AB 的距离为 $\frac{|3k + 2 - 2k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{5}$, 解

得 $k = \frac{1}{2}$,

所以直线 AB 的方程为 $x - 2y - 2 = 0$,

由 $\begin{cases} x - 2y - 2 = 0, \\ x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0 \end{cases}$ 联立得 $5y^2 - 4 = 0$,

所以 AB 中点的纵坐标为 0, 所以 P 为 AB 中点,

则所求圆的半径为 $\frac{1}{2}|AB| = 2$, 所求圆的方程为 $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

20. 【解析】(1) 甲厂这批轮胎宽度的平均值为

$$\bar{x}_{\text{甲}} = \frac{195 + 194 + 196 + 193 + 194 + 197 + 196 + 195 + 193 + 197}{10}$$

$= 195(\text{mm})$.

乙厂这批轮胎宽度的平均值为

$$\bar{x}_{\text{乙}} = \frac{195 + 196 + 193 + 192 + 195 + 194 + 195 + 192 + 195 + 193}{10}$$

$= 194(\text{mm})$.

(2) 甲厂这批轮胎宽度在 $[194, 196]$ 内的数据为

195, 194, 196, 194, 196, 195,

$$\textcircled{1} P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

② 甲厂标准轮胎的平均数为 195, 方差为 $\frac{2}{3}$.

乙厂这批轮胎宽度都在 $[194, 196]$ 内的数据为

195, 196, 195, 194, 195, 195,

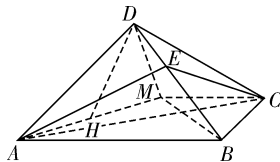
平均数为 195, 方差为 $\frac{1}{3}$.

由于两厂标准轮胎宽度的平均数相等, 但乙的方差更小, 所以乙厂的轮胎相对更好.

21. 【解析】(1) 设 $AB = 2AD = 2$, $\because M$ 是 DC 的中点,

$\therefore AM = BM = \sqrt{2}$, 在 $\triangle ABM$ 中, $AM^2 + BM^2 = AB^2$, $\therefore AM \perp BM$, 又 $AD \perp BM$, $AD \cap AM = A$, $\therefore MB \perp$ 平面 ADM , 又 $\because BM \subset$ 平面 $ABCM$, $\therefore$ 平面 $ADM \perp$ 平面 $ABCM$.

(2) 取 AM 的中点 H , 连接 DH , 由题意知, $DH \perp AM$.



又由(1)知平面 $ADM \perp$ 平面 $ABCM$, $\therefore DH \perp$ 平面 $ABCM$, $\because AM = 2$, $\therefore DH = 1$, $AD = \sqrt{2}$, $AB = 2\sqrt{2}$,

$$V_{D-ABC} = \frac{1}{3} \cdot DH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot$$

$$\sqrt{2} = \frac{2}{3}, \therefore BE = 2DE, \therefore V_{E-ABC} = \frac{2}{3} V_{D-ABC} = \frac{4}{9}.$$

22. 【解析】(1) 令 $F(x) = f(x) - (x - 1)$, $x \in$

$(0, +\infty)$, 则 $F(x) = \ln x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$, $F'(x)$

$$= \frac{1 - x^2}{x},$$

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $F'(x) < 0$,

所以 $F(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

故当 $x > 1$ 时, $F(x) < F(1) = 0$,

即当 $x > 1$ 时, $f(x) < x - 1$.

(2) 由(1)知, 当 $k = 1$ 时, 不存在 $x_0 > 1$ 满足题意,

当 $k > 1$ 时, 对于 $x > 1$, 有 $f(x) < x - 1 < k(x - 1)$, 则 $f(x) < k(x - 1)$, 从而不存在 $x_0 > 1$ 满足题意;

当 $k < 1$ 时,

令 $G(x) = f(x) - k(x - 1)$, $x \in (0, +\infty)$,

$$\text{则 } G(x) = \ln x - \frac{x^2}{2} + (1 - k)x + k - \frac{1}{2},$$

$$G'(x) = \frac{1}{x} - x + 1 - k$$

$$= \frac{-x^2 + (1 - k)x + 1}{x},$$

由 $G'(x) = 0$ 得, $x^2 - (1 - k)x - 1 = 0$,

$$\text{解得 } x_1 = \frac{1 - k - \sqrt{(1 - k)^2 + 4}}{2} < 1,$$

$$x_2 = \frac{1-k+\sqrt{(1-k)^2+4}}{2} > 1,$$

当 $x \in (1, x_2)$ 时, $G'(x) > 0$, 故 $G(x)$ 在 $(1, x_2)$ 内单调递增,

从而当 $x \in (1, x_2)$ 时, $G(x) > G(1) = 0$,

即 $f(x) > k(x-1)$,

综上, k 的取值范围是 $(-\infty, 1)$.

(十七)

1. A 【解析】 $m + \frac{10}{3+i} = m + 3 - i$, 因为是纯虚数, 所以 $m + 3 = 0$, $\therefore m = -3$, 故选 A.

2. C 【解析】抛物线 $y = ax^2$ 的标准方程为: $x^2 = \frac{1}{a}y$, 所以准线方程为: $y = -\frac{1}{4a} = -2$.

所以 $a = \frac{1}{8}$, 故选 C.

3. C 【解析】若曲线 C 为双曲线, 则 $m(2m-1) < 0$, 解得 $0 < m < \frac{1}{2}$.

若 $0 < m < \frac{1}{2}$, 则 $m(2m-1) < 0$,

所以命题 p 为真命题.

若曲线 C 为椭圆, 则 $m > \frac{1}{2}$ 且 $m \neq 1$,

所以命题 q 为假命题.

因而 $p \wedge (\neg q)$ 为真命题.

所以选 C.

4. B 【解析】 $\because S_8 = \frac{8(a_3 + a_6)}{2} = 12$, $\therefore a_3 + a_6 = \frac{12}{4} = 3$, 则 $a_3 = 0$, $\therefore d = \frac{a_6 - a_3}{6-3} = 1$, 故选 B.

5. B 【解析】设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, C 的横坐标为 x_0 , 则 $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$,

因为 AB 是抛物线 $y^2 = 2x$ 的一条焦点弦,

所以 $|AB| = x_1 + x_2 + p = x_1 + x_2 + 1 = 4$,

所以 $x_1 + x_2 = 3$, 故 $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3}{2}$.

故选 B.

6. D 【解析】由题可知, 双曲线的离心率为 $\sqrt{5}$, 即 $\frac{c}{a} = \sqrt{5}$,

$$\text{又 } \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{a^2}} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1} = 2,$$

所以双曲线的渐近线方程为 $y = \pm 2x$,

故选 D.

7. C 【解析】由题意, 将 $A(c, y_1)$ 代入椭圆方程得:

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \text{ 由此求得 } y_1^2 = \frac{b^4}{a^2}, \text{ 所以 } |AB| = 3 =$$

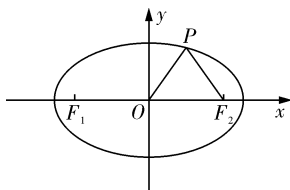
$$\frac{2b^2}{a}, \text{ 因为 } c=1, \text{ 根据 } a^2 - b^2 = c^2 \text{ 可得 } a^2 - \frac{3}{2}a - 1$$

$$= 0, \text{ 解得 } a=2, \text{ 所以 } b^2=3, \text{ 所以椭圆 } C \text{ 的方程为:}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

8. A 【解析】由 $\triangle POF_2$ 为等边三角形, 可知:

$$P\left(\frac{1}{2}c, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}c\right),$$



又点 P 在椭圆 C 上,

$$\therefore \left(\frac{1}{2}c\right)^2 + \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2 = 1, \text{ 即 } e^4 - 8e^2 + 4 = 0,$$

$$\therefore e^2 = 4 \pm 2\sqrt{3}, e = \sqrt{3} - 1 \text{ 或 } \sqrt{3} + 1 (\text{舍去}),$$

$$\therefore e = \sqrt{3} - 1,$$

故选 A.

9. C 【解析】左、右焦点分别为 F_1, F_2 的双曲线 C :

$$\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0) \text{ 过点 } \left(\sqrt{15}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right), \text{ 可得: } \frac{15}{a^2} -$$

$$\frac{6}{9} = 1, \text{ 解得 } a=3, b=1, c=\sqrt{10}, a+c > 3, \text{ 点 } P \text{ 在}$$

双曲线 C 上, 若 $|PF_1| = 3$, 可得点 P 在双曲线的左支上, 则 $|PF_2| = 2a + |PF_1| = 6 + 3 = 9$.

故选 C.

10. B 【解析】由圆的方程 $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$, 可知圆心坐标为 $(2, 1)$,

因为直线 l 将圆平分, 所以直线 l 过圆心 $(2, 1)$, 又由直线 l 不经过第四象限,

所以直线 l 的斜率的最小值为 0, 斜率的最大值为

$$k_{\max} = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2},$$

所以直线 l 的斜率的取值范围是 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, 故选 B.

11. A 【解析】由题意, 抛物线 M 与圆 C 的其中一个交点为原点 O , 设另一个交点为 $A(x_1, y_1)$,

因为 $|OA| = \sqrt{6}$,

$$\text{所以 } \cos \angle AOC = \frac{|OA|}{2|OC|} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{则 } \angle AOC = \frac{\pi}{4},$$

可得点 A 坐标为 $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$, 代入抛物线方程 $y^2 = 2px (p > 0)$, 得 $(\sqrt{3})^2 = 2p \times \sqrt{3}$,

解得 $p = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即抛物线 M 的焦点到其准线的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 故选 A.

12. B 【解析】当 $x < 1$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, $f(x) < 2 + a$,

当 $x \geq 1$ 时, 令 $f(x) = 0$ 得 $x = -a$ 或 $x = -2a$.

①若 $2 + a \leq 0$, 即 $a \leq -2$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上无零点, 此时 $-2a > -a \geq 2$,

$\therefore f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上有两个零点, 符合题意;

②若 $2 + a > 0$, 即 $a > -2$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上有 1 个零点,

$\therefore f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上只有 1 个零点,

若 $-2 < a < 0$, 则 $-2a > -a$,

$$\therefore -a < 1 \leq -2a, \text{ 解得 } -1 < a \leq -\frac{1}{2};$$

若 $a = 0$, 则 $-a = -2a = 0 \notin [1, +\infty)$,

$\therefore f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上无零点, 不符合题意;

若 $a > 0$, 则 $0 > -a > -2a$,

$\therefore f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上无零点, 不符合题意;

综上, a 的取值范围是 $(-\infty, -2] \cup (-1, -\frac{1}{2}]$.

选 B

13. 3 【解析】双曲线 $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{3m} = 1$ 的一个焦点为

$$(2\sqrt{3}, 0), \text{ 即 } c = \sqrt{m+3m} = 2\sqrt{3},$$

解得 $m = 3$, 故答案为 3.

14. 2 020 【解析】依题意可知第 n 行有 $2n-1$ 个数字,

前 n 行的数字个数为 $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$ 个, 可得前 44 行共 44^2 个,

$\therefore 44^2 = 1\,936$, 即第 44 行最后一个数为 1 936,

$\therefore$ 第 45 行第 84 列出现的数字是 $1\,936 + 84 =$

2 020,

故答案为 2 020.

15. 6 【解析】 $\because |PF_1| + |PF_2| = 2a = 8$,

$$\therefore |PF_1| = 8 - 3 = 5, \text{ 又 } |F_1F_2| = 2c = 4,$$

$$\therefore PF_2 \perp F_1F_2,$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} |PF_2| |F_1F_2| = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6.$$

16. 5 【解析】设圆 $(x+4)^2 + y^2 = 4$ 和 $(x-4)^2 + y^2 = 1$ 的圆心分别为 A, B , 半径分别为 r_1, r_2 ,

$|PM| - |PN|$ 取得最大值时, $|PM|$ 有最大值, $|PN|$ 有最小值,

$$\text{此时有: } |PM| - |PN| = (|PA| + r_1) - (|PB| - r_2) = (|PA| - |PB|) + 3 = 2a + 3 = 5,$$

即 $|PM| - |PN|$ 的最大值为 5.

17. 【解析】(1) 化 $y = \frac{1}{4}x^2$ 为标准方程 $x^2 = 4y$,

由此, 可知抛物线的焦点 F 的坐标为 $(0, 1)$, 准线方程为 $y = -1$.

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

由抛物线的定义知 $|AF| = y_1 + 1, |BF| = y_2 + 1$,

于是 $|AB| = y_1 + y_2 + 2$,

又 $|AB| = 8$, 所以 $y_1 + y_2 = 6$,

由(1)得, 抛物线的焦点为 $(0, 1)$,

设直线 l 的方程为 $y = kx + 1$,

所以 $kx_1 + 1 + kx_2 + 1 = 6, k(x_1 + x_2) = 4$,

$$\text{由直线 } l \text{ 的方程与抛物线方程联立得 } kx + 1 = \frac{x^2}{4},$$

$$\text{即 } x^2 - 4kx - 4 = 0, \Delta = 16k^2 + 16 > 0,$$

所以 $x_1 + x_2 = 4k$,

代入 $k(x_1 + x_2) = 4$, 得 $k^2 = 1, k = \pm 1$.

18. 【解析】(1) $\because 2b \sin A - \sqrt{3}a = 0$,

由正弦定理得 $2 \sin B \sin A - \sqrt{3} \sin A = 0$,

$$\therefore \sin A \neq 0, \therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

又 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, $\therefore B = \frac{\pi}{3}$.

(2) 由面积为 $\sqrt{3}$ 可得 $ac = 4$,

又 $a + c = 6 - b$,

根据余弦定理有 $b^2 = (a+c)^2 - 2ac - 2accos B$

将以上数据代入, 得 $b^2 = (6-b)^2 - 12$.

解得 $b = 2$.

19. 【解析】(1) 设双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$.

由已知得: $a = \sqrt{3}, c = 2$, 再由 $a^2 + b^2 = c^2$, 得 $b^2 = 1$,

$\therefore$ 双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$.

(2) 设 $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$, 将 $y = kx + \sqrt{2}$ 代入

$$\frac{x^2}{3} - y^2 = 1,$$

$$\text{得: } (1 - 3k^2)x^2 - 6\sqrt{2}kx - 9 = 0.$$

$$\text{由题意知 } \begin{cases} 1 - 3k^2 \neq 0, \\ \Delta = 36(1 - k^2) > 0, \\ x_A + x_B = \frac{6\sqrt{2}k}{1 - 3k^2} < 0, \text{ 解得 } \frac{\sqrt{3}}{3} < k < 1, \\ x_A x_B = \frac{-9}{1 - 3k^2} > 0, \end{cases}$$

$\therefore$ 当 $\frac{\sqrt{3}}{3} < k < 1$ 时, l 与双曲线的左支有两个交点.

20. 【解析】(1) 设椭圆的焦距为 $2c$, 则

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1, \therefore \begin{cases} a^2 = 4, \\ b^2 = 3, \end{cases} \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases}$$

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

$$\text{则 } \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1, \frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{3} = 1,$$

$$\therefore \frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{4} + \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{3} = 0,$$

$$\text{又 } x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = 2, \therefore k_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{3}{4}.$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 方程为 } y - 1 = -\frac{3}{4}(x - 1), \text{ 即 } 3x + 4y - 7 = 0.$$

21. 【解析】(1) 将 $\triangle PCD$ 沿 CD 折起过程中, $CD \perp$ 平面 P_1DA 恒成立.

证明: $\because D$ 是 PA 中点, $\therefore DP = DA = 2$,

在 $\triangle PDC$ 中, 由余弦定理得,

$$CD^2 = PC^2 + PD^2 - 2PC \cdot PD \cdot \cos 45^\circ = 8 + 4 -$$

$$2 \times 2\sqrt{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4.$$

$$\therefore CD = 2 = PD,$$

$$\therefore CD^2 + DP^2 = 8 = PC^2,$$

$\therefore \triangle PDC$ 为等腰直角三角形且 $CD \perp PA$,

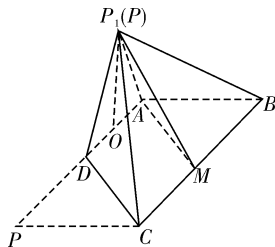
$\therefore CD \perp DA, CD \perp P_1D, P_1D \cap AD = D$,

$\therefore CD \perp$ 平面 P_1DA .

(2) $\because DP_1 = DA = P_1A = 2$,

$\therefore \triangle P_1DA$ 为等边三角形,

取 AD 中点 O , 连结 P_1O , 则 $P_1O = \sqrt{3}, P_1O \perp AD$,



由(1)知 $CD \perp$ 平面 $P_1DA, CD \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore$ 平面 $P_1DA \perp$ 平面 $ABCD$,

$\therefore P_1O \perp$ 平面 $ABCD$,

$\therefore$ 三棱锥 P_1-ABM 的高 $h = P_1O = \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} \therefore M \text{ 为 } BC \text{ 中点, } \therefore BM = 2, S_{\triangle ABM} &= \frac{1}{2} BM \times CD \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore V_{\text{三棱锥 } B-P_1AM} &= V_{\text{三棱锥 } P_1-ABM} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABM} \cdot h = \frac{1}{3} \\ &\times 2 \times \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

22. 【解析】(1) 依题意, $p = 4$, 注意到直线 l 过抛物线 C 的焦点 $(0, 2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x^2 = 8y, \\ x = 4 - 2y, \end{cases} \text{ 解得 } y^2 - 6y + 4 = 0,$$

由抛物线定义可知, 所求弦长为 $6 + 4 = 10$.

(2) 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 易知 $F(0, \frac{p}{2})$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = k_1x + \frac{p}{2}, \\ x^2 = 2py, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得 } x^2 - 2pk_1x - p^2 =$$

$$0, \therefore x_1 + x_2 = 2pk_1, x_1 \cdot x_2 = -p^2,$$

由 $y = \frac{1}{2p}x^2$ 得 $y' = \frac{1}{p}x$, 过点 M, N 的切线方程

分别为 $y = \frac{x_1}{p}x - \frac{1}{2p}x_1^2, y = \frac{x_2}{p}x - \frac{1}{2p}x_2^2$,

联立 $\begin{cases} y = \frac{x_1}{p}x - \frac{1}{2p}x_1^2, \\ y = \frac{x_2}{p}x - \frac{1}{2p}x_2^2 \end{cases}$ 得点 P 的坐标

为 $(pk_1, -\frac{p}{2})$,

所以 $k_2 = \frac{-\frac{p}{2} - \frac{p}{2}}{pk_1 - 0} = -\frac{1}{k_1}, \therefore -\frac{1}{k_1} + k_1 = \frac{3}{2}$,

$\therefore k_1 = 2$ 或 $-\frac{1}{2}$,

所以直线 MN 的斜率为 $k_1 = 2$ 或 $k_1 = -\frac{1}{2}$.

(十八)

1. C 【解析】解一元二次不等式 $x^2 < 2$, 得 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, 又 $x \in \mathbf{Z}$, 所以 $N = \{-1, 0, 1\}$, 所以 $M \cap N = \{0\}$.

2. A 【解析】由椭圆的标准方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 可得, b

$= \sqrt{3}$,

所以椭圆的短轴长为 $2b = 2\sqrt{3}$.

故选 A.

3. B 【解析】 $\because x > 0, \therefore x + \frac{1}{4x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{4x}} = 1$,

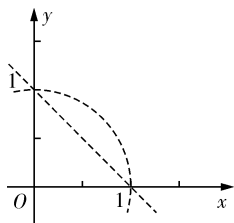
当且仅当 $x = \frac{1}{4x}$ 时取等号, 此时 $x = \frac{1}{2}$, 故选 B.

4. D 【解析】因为 $PF_2 \perp F_1F_2, \angle PF_1F_2 = 30^\circ$, 所以

$PF_1 = 2PF_2, F_1F_2 = \sqrt{3}PF_2, \therefore 2a = PF_1 + PF_2 =$

$3PF_2, 2c = \sqrt{3}PF_2, e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 选 D.

5. B 【解析】在第一象限中, 画出 $x + y > 1$ 和 $x^2 + y^2 > 1$ 的范围如下图所示, 由图可知前者的范围包含后者的范围, 故前者是后者的必要不充分条件. 故选 B.



6. B 【解析】由正视图的定义可知: 点 A, B, B_1 在后面的投影点分别是点 D, C, C_1 , 线段 AN 在后面的投影面上的投影是以 D 为端点且与线段 CC_1 平行且相等的线段, 即正视图为正方形, 另外线段 AM 在后面的投影线要画成实线, 被遮挡的线段 DC_1 要画成虚线, 正视图为②, 侧(左)视图为③, 俯视图为④, 故选 B.

7. C 【解析】由于双曲线一条渐近线的倾斜角为 60° ,

故 $\frac{b}{a} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$, 抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点坐标为 $(2, 0)$,

故 $c = 2$,

由 $\begin{cases} \frac{b}{a} = \sqrt{3}, \\ c = 2, \\ c^2 = a^2 + b^2, \end{cases}$ 解得 $a = 1, b = \sqrt{3}$,

故双曲线方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$,

故选 C.

8. A 【解析】设 $M(x, y)$, 由题意可得 $k_{AM} = \frac{y}{x+1}$,

$k_{BM} = \frac{y}{x-1}$,

因为直线 AM 与 BM 的斜率的商是 $\lambda (\lambda \neq 1)$,

所以 $\frac{\frac{y}{x+1}}{\frac{y}{x-1}} = \lambda$, 化简得 $x = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}$, 为一条直线, 故

选 A.

9. A 【解析】不妨取点 P 在双曲线的右支上, 由双曲线

的定义可得 $|PF_1| - |PF_2| = 2\sqrt{3}$,

又 $|PF_1| + |PF_2| = 2\sqrt{5}$,

两式联立得: $|PF_1| = \sqrt{5} + \sqrt{3}, |PF_2| = \sqrt{5} - \sqrt{3}$,

又 $|F_1F_2| = 4$,

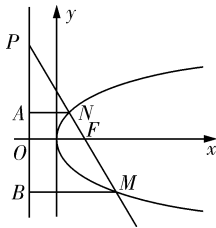
所以 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2$,

即 $\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形,

所以 $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} |PF_1| |PF_2| = 1$.

故选 A.

10. C 【解析】由 $PM = 2PN$ 可知: N 为线段 PM 的中点,



过 N, M 点分别引准线的垂线, 垂足分别为 A, B ,

不妨设 $|FN|=n, |FM|=m$,

由抛物线定义可知: $|AN|=|FN|=n, |BM|=|FM|=m$,

又 N 为线段 PM 的中点,

$\therefore m=2n$,

$\therefore$ 在 $\triangle ANP$ 中, $|AN|=n, |PN|=m+n=3n$,

$\therefore \tan \angle PNA = 2\sqrt{2}$, 即直线的斜率为 $-2\sqrt{2}$,

由抛物线的对称性可知, 直线 l 的斜率为 $\pm 2\sqrt{2}$.

故选 C.

11. C 【解析】由双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$,

设直线 AB 方程为 $x = -c$,

则 $A(-c, y_0), B(-c, -y_0)$,

所以 $\frac{c^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$,

解之得 $y_0 = \frac{b^2}{a}$, 得 $|AF| = \frac{b^2}{a}$,

因为双曲线的右顶点 $M(a, 0)$ 在以 AB 为直径的圆内,

所以 $|MF| < |AF|$, 即 $a + c < \frac{b^2}{a}$,

所以 $a^2 + ac < b^2 = c^2 - a^2$,

所以 $c^2 - ac - 2a^2 > 0$, 即 $(c+a)(c-2a) > 0$, 即 $c > 2a$,

所以离心率 $e = \frac{c}{a} > 2$.

故选 C.

12. A 【解析】当 $x \in [2, 3]$ 时, $f(x) = -2x^2 + 12x - 18 = -2(x-3)^2$, 图象为开口向下且顶点为 $(3, 0)$ 的抛物线,

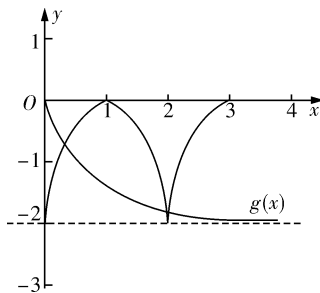
$\therefore$ 函数 $y = f(x) - \log_a(|x| + 1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上至少有 3 个零点,

令 $g(x) = \log_a(|x| + 1)$,

因为 $f(x) \leq 0$,

所以 $g(x) \leq 0$, 可得 $0 < a < 1$,

如图所示, 要使函数 $y = f(x) - \log_a(|x| + 1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上至少有 3 个零点,



则要求 $g(2) > f(2)$, $\log_a(2+1) > f(2) = -2 \Rightarrow \log_a 3 > -2$,

可得 $3 < \frac{1}{a^2} \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} < a < \frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以 $0 < a < \frac{\sqrt{3}}{3}$,

故选 A.

13. $\frac{1}{3}$ 【解析】由 $\sin(\pi + \alpha) = \frac{1}{3}$ 可得由 $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$,

而 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

故答案为 $\frac{1}{3}$.

14. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 【解析】渐近线方程为 $y = \frac{b}{a}x$, 点 $(4, 2)$ 在渐近线上, $\therefore 2 = \frac{b}{a} \times 4$, $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$,

又 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

15. $\frac{5}{2}$ 【解析】抛物线的焦点坐标为 $(0, \frac{1}{2})$,

直线 l 的方程为 $y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x$,

即 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$\therefore \begin{cases} x^2 = 2y, \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \end{cases}$

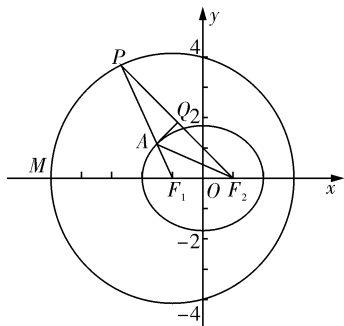
则 $x^2 = x + 1$, 即 $x^2 - x - 1 = 0$,

$x_1 + x_2 = 1, x_1 x_2 = -1$,

$$\begin{aligned}
 |AB| &= \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \times \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} \\
 &= \frac{\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{5} \\
 &= \frac{5}{2}.
 \end{aligned}$$

故答案为 $\frac{5}{2}$.

- 16.5 【解析】取 F_2P 的中点 Q , 连接 AQ , $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AF_2} = 2\overrightarrow{AQ}$,



则 $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{F_2P} = 0$, 可知 $|AP| = |AF_2|$,

由椭圆定义可知 $|AF_1| + |AF_2| = |AF_1| + |AP| = |F_1P| = 4$,

则点 P 的轨迹是以 F_1 为圆心, 以 4 为半径的圆, 由图可知当点 P 和点 M 重合时, 到 y 轴距离最大, 值为 5.

故答案为 5.

17. 【解析】(1) 由正弦定理可得

$$\begin{aligned}
 2\sin A \cos B + \sin B &= 2\sin C = 2\sin(A+B) \\
 &= 2\sin A \cos B + 2\cos A \sin B,
 \end{aligned}$$

$$\therefore \sin B = 2\cos A \sin B,$$

$$\because B \in (0, \pi), \therefore \sin B \neq 0,$$

$$\therefore \cos A = \frac{1}{2}.$$

$$\because A \in (0, \pi), \therefore A = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) \text{ 在 } \text{Rt}\triangle ABD \text{ 中, } AD = \frac{BD}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2, AB =$$

$$\sqrt{4-3} = 1,$$

$$\because D \text{ 为 } AC \text{ 的中点, } \therefore AC = 2AD = 4,$$

$$\begin{aligned}
 \text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } BC^2 &= 4^2 + 1^2 - 2 \times 4 \times 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} \\
 &= 13,
 \end{aligned}$$

$$\therefore BC = \sqrt{13}.$$

18. 【解析】(1) 双曲线 C_1 的焦点坐标为 $(\sqrt{5}, 0)$, $(-\sqrt{5}, 0)$,

设双曲线 C_2 的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$,

$$\text{则 } \begin{cases} a^2 + b^2 = 5, \\ \frac{16}{a^2} - \frac{3}{b^2} = 1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a^2 = 4, \\ b^2 = 1. \end{cases}$$

$$\therefore \text{双曲线 } C_2 \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{4} - y^2 = 1.$$

(2) 双曲线 C_1 的渐近线方程为 $y = 2x, y = -2x$.

设 $A(x_1, 2x_1), B(x_2, -2x_2)$.

$$\text{由 } \begin{cases} y = 2x, \\ y = x + m \end{cases} \text{ 可得 } A(m, 2m),$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = -2x, \\ y = x + m \end{cases} \text{ 可得 } B\left(-\frac{m}{3}, \frac{2m}{3}\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{m^2}{3} + \frac{4m^2}{3} = m^2,$$

$$\therefore m^2 = 3, \text{ 即 } m = \pm\sqrt{3}.$$

19. 【解析】(1) 由已知得: $\begin{cases} a_1 + 7d = 1, \\ 2a_1 + 15d = 3, \end{cases}$

$$\therefore a_1 = -6, d = 1,$$

$$a_n = -6 + (n-1) \cdot 1 = n-7.$$

$$(2) \text{ 由已知得: } \begin{cases} b_1 + b_4 = 9, \\ b_1 \cdot b_4 = 8, \end{cases}$$

又 $\{b_n\}$ 是递增的等比数列,

$$\text{解得: } b_1 = 1, b_4 = 8, q = 2,$$

$$\therefore b_n = 2^{n-1},$$

$$\therefore (a_1 + b_1) + (a_3 + b_3) + (a_5 + b_5) + \cdots + (a_{2n-1} + b_{2n-1})$$

$$= (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}) + (b_1 + b_3 + \cdots + b_{2n-1})$$

$$= (-6 - 4 - 2 + \cdots + 2n - 8) + (1 + 4 + 16 + \cdots + 4^{n-1})$$

$$= \frac{n(-6 + 2n - 8)}{2} + \frac{1 - 4^n}{1 - 4}$$

$$= n^2 - 7n + \frac{4^n - 1}{3}.$$

20. 【解析】(1) 易知直线与抛物线的交点坐标为 $(4, -4)$,

$$\therefore (-4)^2 = 2p \times 4, \therefore p = 2,$$

$$\therefore \text{抛物线方程为 } y^2 = 4x.$$

(2) 由不过原点直线 l_2 与 l_1 垂直, 故可设直线 l_2 : $x=y+m(m \neq 0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 且直线 l_2 与 x 轴的交点为 M .

由 $\begin{cases} y^2=4x, \\ x=y+m \end{cases}$ 得 $y^2-4y-4m=0$, $\Delta=16+16m>0$, $\therefore m>-1$.

$$y_1+y_2=4, y_1 \cdot y_2=-4m, \therefore x_1 x_2 = \frac{y_1^2 y_2^2}{16} = m^2.$$

由题意可知 $OA \perp OB$, 即 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = m^2 - 4m = 0$, $\therefore m=4$ 或 $m=0$ (舍),

$\therefore$ 直线 $l_2: x=y+4, M(4, 0)$.

$$\text{故 } S_{\triangle FAB} = S_{\triangle FMB} + S_{\triangle FMA} = \frac{1}{2} \cdot |FM| \cdot |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} \times 3 \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = 6\sqrt{5}.$$

21. 【解析】(1) 由椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{2} = 1$ 过点 $P(2, 1)$, 可得 $a^2=8$.

$$\text{所以 } c^2 = a^2 - 2 = 8 - 2 = 6,$$

$$\text{所以椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1,$$

$$\text{离心率 } e = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(2) 直线 AB 与直线 OP 平行. 证明如下:

设直线 $PA: y-1=k(x-2)$, $PB: y-1=-k(x-2)$,

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1, \\ y = kx - 2k + 1 \end{cases} \text{ 得 } (4k^2 + 1)x^2 + 8k(1-2k)x + 16k^2 - 16k - 4 = 0,$$

$$\therefore 2x_1 = \frac{16k^2 - 16k - 4}{4k^2 + 1},$$

$$\therefore x_1 = \frac{8k^2 - 8k - 2}{1 + 4k^2},$$

$$\text{同理 } x_2 = \frac{8k^2 + 8k - 2}{4k^2 + 1},$$

$$\text{所以 } x_1 - x_2 = -\frac{16k}{4k^2 + 1},$$

$$\text{由 } y_1 = kx_1 - 2k + 1, y_2 = -kx_2 + 2k + 1$$

$$\text{有 } y_1 - y_2 = k(x_1 + x_2) - 4k = -\frac{8k}{4k^2 + 1},$$

因为 A 在第四象限, 所以 $k \neq 0$, 且 A 不在直线 OP 上.

$$\therefore k_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2},$$

$$\text{又 } k_{OP} = \frac{1}{2}, \text{ 故 } k_{AB} = k_{OP},$$

所以直线 AB 与直线 OP 平行.

22. 【解析】(1) $\because |AD| = |AC|, EB \parallel AC$,

$$\therefore \angle EBD = \angle ACD = \angle ADC,$$

$$\therefore |EB| = |ED|,$$

$$\text{故 } |EA| + |EB| = |EA| + |ED| = |AD|.$$

$$\text{又圆 } A \text{ 的标准方程为 } (x+1)^2 + y^2 = 16,$$

$$\text{从而 } |AD| = 4.$$

$$\therefore |EA| + |EB| = 4.$$

$$\text{由题设得 } A(-1, 0), B(1, 0), |AB| = 2,$$

由椭圆定义可得点 E 的轨迹方程为: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ($y \neq 0$).

(2) 当 l 与 x 轴不垂直时, 设 l 的方程为 $y=k(x-1)$ ($k \neq 0$), $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$.

$$\text{由 } \begin{cases} y = k(x-1), \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 整理得}$$

$$(4k^2 + 3)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0,$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{4k^2 + 3}, x_1 x_2 = \frac{4k^2 - 12}{4k^2 + 3}.$$

$$\therefore |MN| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \frac{12(k^2 + 1)}{4k^2 + 3}.$$

过点 $B(1, 0)$ 且与 l 垂直的直线 m :

$$y = -\frac{1}{k}(x-1),$$

$$\text{圆心 } A \text{ 到直线 } m \text{ 的距离为 } \frac{2}{\sqrt{k^2 + 1}},$$

$$\therefore |PQ| = 2\sqrt{4^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{k^2 + 1}}\right)^2} = 4\sqrt{\frac{4k^2 + 3}{k^2 + 1}}.$$

故四边形 $MPNQ$ 的面积

$$S = \frac{1}{2} |MN| |PQ| = 12\sqrt{1 + \frac{1}{4k^2 + 3}}.$$

可得当 l 与 x 轴不垂直时, 四边形 $MPNQ$ 面积的取值范围为 $(12, 8\sqrt{3})$.

当 l 与 x 轴垂直时, 其方程为 $x=1$, $|MN|=3$, $|PQ|=8$, 四边形 $MPNQ$ 的面积为 12.

综上, 四边形 $MPNQ$ 面积的取值范围为 $[12, 8\sqrt{3})$.

(十九)

1. B 【解析】依题意, $z = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1-i$,

故 $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, 故选 B.

2. D 【解析】将极坐标方程 $\rho = 2\cos \theta$ 两边同乘 ρ , 得 $\rho^2 = 2\rho\cos \theta$,

化为直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = 2x$,

整理得 $(x-1)^2 + y^2 = 1$,

所表示圆的半径 $r=1$. 选 D.

3. D 【解析】由伸缩变换 $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x, \\ y' = 2y \end{cases}$ 可得: $\begin{cases} x = 3x', \\ y = \frac{1}{2}y', \end{cases}$

代入直线 $3x-2y-2=0$ 可得: $9x'-2 \times \frac{1}{2}y'-2=$

0 , 即 $9x'-y'-2=0$.

故选 D.

4. B 【解析】根据双曲线方程可知其渐近线方程为:

$y = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}x$, 而已知 $2x-y=0$ 是一条渐近线方程,

故有 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} = 2$, 即 $a = \frac{1}{2}$, 选 B.

5. D 【解析】 $i=0, s=1, x=-1$;

$x=2, s=2, i=1$;

$x=\frac{1}{2}, s=1, i=2$;

$x=-1, s=-1, i=3$;

$x=2, s=-2, i=4$;

$x=\frac{1}{2}, s=-1, i=5$;

$x=-1, s=1, i=6$;

$x=2, s=2, i=7$;

不难发现 6 次循环,

当 $i=2\ 020$ 时再次循环一次,

故 $2\ 021 \div 6 = 336 \cdots 5$,

$\therefore$ 输出的结果为 -1 , 故选 D.

6. D 【解析】求不等式 $(1+x)(1-|x|) > 0$ 的解集,

则分两种情况讨论:

情况 1: $\begin{cases} 1+x > 0, \\ 1-|x| > 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x > -1, \\ -1 < x < 1, \end{cases}$

则 $-1 < x < 1$.

情况 2: $\begin{cases} 1+x < 0, \\ 1-|x| < 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x < -1, \\ x < -1 \text{ 或 } x > 1, \end{cases}$

则 $x < -1$.

两种情况取并集得 $\{x | x < 1 \text{ 且 } x \neq -1\}$.

故选 D.

7. B 【解析】根据题意, 设直线的倾斜角为 θ ,

直线的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + t \sin 70^\circ, \\ y = 2 + t \cos 70^\circ, \end{cases}$ 则直线的普通

方程为: $y-2 = \tan 20^\circ(x-1)$,

则有 $\tan \theta = \tan 20^\circ$, 且 $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$, 则直线的倾斜角为 20° .

8. A 【解析】 $\because f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数;

$\therefore$ 由 $f\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right) < f(1)$ 得出 $\left|\frac{1}{x}\right| > 1$;

解得 $-1 < x < 1$, 且 $x \neq 0$;

$\therefore$ 实数 x 的取值范围为 $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

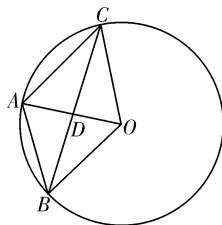
故选 A.

9. C 【解析】 $\because x+y = 4\cos \theta + 3\sin \theta = 5\sin(\varphi+\theta)$

$\left(\tan \varphi = \frac{4}{3}\right)$, 当 $\sin(\varphi+\theta) = 1$ 时, $x+y$ 取得最大值 5.

10. B 【解析】依题意有 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO}$, 根据向量加法的几何意义可知, 四边形 $ABOC$ 为平行四边形, 且为菱形, 对角线相互垂直, 且 $\triangle ABO, \triangle ACO$ 都为等边三角形, 故 $\overrightarrow{CA}$ 在 $\overrightarrow{CB}$ 方向上的投影为 CD ,

且 $CD = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.



11. C 【解析】由曲线 $C_1: \begin{cases} x = 2pt^2, \\ y = 2pt \end{cases}$ (t 为参数,) 化为

$y^2 = 2px$, $\therefore m^2 = 4p$.

由圆 $C_2: \begin{cases} x = \frac{p}{2} + 6\cos \theta, \\ y = 6\sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数) 消去参数 θ

化为 $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = 36$, 得到圆心 $B\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 半径 $r=6$,

由题意 $|AB| = r$, 可得 $\sqrt{\left(2 - \frac{p}{2}\right)^2 + (0-m)^2} =$

6 , 即 $\sqrt{4 + \frac{p^2}{4} - 2p + 4p} = 6$, 化为 $p^2 + 8p - 128 =$

0 , 又 $p > 0$, 解得 $p=8$. 故选 C.

12. D 【解析】 $\because a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = 2^{n^2} (n \in \mathbf{N}^*)$,

$$\therefore a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1} = 2^{(n-1)^2} (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2),$$

$$\text{两式相除得 } a_n = 2^{2n-1} (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2),$$

$$\therefore a_1 = 2^{1^2} = 2, a_1 = 2 \text{ 也满足 } a_n = 2^{2n-1},$$

$$\therefore a_n = 2^{2n-1} (n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\therefore t > \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}} =$$

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3 \times 2^{2n-1}},$$

$$\text{又 } \because \frac{2}{3} - \frac{1}{3 \times 2^{2n-1}} < \frac{2}{3},$$

$$\therefore t \geq \frac{2}{3}, \therefore t \text{ 的取值范围是 } \left[\frac{2}{3}, +\infty \right), \text{ 故选 D.}$$

13. 36 【解析】设 A, B, C 三所学校学生人数为: $3x$,

$$4x, 5x, \text{ 则总人数为 } 12x, \text{ 所以 } \frac{9}{3x} = \frac{n}{12x}, \text{ 解得: } n =$$

36. 故答案为 36.

14. $\left\{ x \mid x \geq \frac{3}{2} \right\}$ 【解析】当 $x \leq -1$ 时, 原不等式等

价于 $-x-1-(2-x) \geq 2$, 无解;

当 $-1 < x < 2$ 时, 原不等式等价于 $x+1-(2-x)$

$$\geq 2, \text{ 解得 } x \geq \frac{3}{2}, \text{ 所以 } \frac{3}{2} \leq x < 2;$$

当 $x \geq 2$ 时, 原不等式等价于 $x+1-(x-2) \geq 2$,
解得 $x \in \mathbf{R}$, 所以 $x \geq 2$.

综上: $\left\{ x \mid x \geq \frac{3}{2} \right\}$.

15. $\frac{3}{5}\sqrt{5}$ 【解析】直线 l 的普通方程为 $2x-y+1=0$,

圆 C 的直角坐标方程为 $(x-1)^2+y^2=1$,

$$\text{圆心到直线的距离 } d = \frac{|2-0+1|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}\sqrt{5}.$$

16. 2 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 【解析】若 $\overrightarrow{AF} = -2\overrightarrow{BF}$, 则由图 1 可知,

渐近线 OB 的斜率为 $-\frac{b}{a}$, $l \perp OB$, 在 $\text{Rt}\triangle OBA$

中, 由角平分线定理可得 $\left| \frac{OA}{OB} \right| = \left| \frac{FA}{FB} \right| = 2$, 所

以 $\angle AOB = 60^\circ$, $\angle xOA = 30^\circ$, 所以 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $e = \frac{c}{a}$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

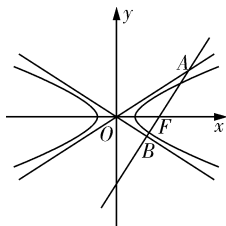


图1

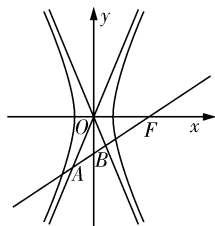


图2

若 $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{BF}$, 则由图 2 可知, 渐近线 OB 为 $\triangle AOF$ 边 AF 的垂直平分线, 故 $\triangle AOF$ 为等腰三

角形, 故 $\angle AOB = \angle BOF = 60^\circ$, $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$, $e = \frac{c}{a} =$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2} = 2.$$

故该双曲线的离心率为 2 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

17. 【解析】(1) 圆 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos \alpha, \\ y = 2 + 2\sin \alpha \end{cases}$ (α

为参数),

$$\text{可得 } \begin{cases} x = 2\cos \alpha, \\ y - 2 = 2\sin \alpha, \end{cases}$$

平方相加转换为直角坐标方程为: $x^2 + (y-2)^2 = 4$.

由圆 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 2\sqrt{2}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$,

$$\text{可得 } \rho^2 = 2\rho\cos\theta - 2\rho\sin\theta,$$

转换为直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = 2x - 2y$,

$$\text{即 } (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2.$$

(2) 由(1)知圆 C_1 的半径 $r_1 = 2$, 圆心坐标为 $(0, 2)$.

圆 C_2 的半径 $r_2 = \sqrt{2}$, 圆心坐标为 $(1, -1)$,

则圆心距 $d = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{10}$,

$$(r_1 + r_2)^2 = 6 + 4\sqrt{2} > 10 = d^2 > (r_1 - r_2)^2,$$

所以圆 C_1 与圆 C_2 相交.

18. 【解析】(1) 当 $a = 3$ 时, 不等式为 $|2x-1| + |2x+3| \geq 6$,

当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时, 不等式为 $4x+2 \geq 6$, 即 $x \geq 1$;

当 $-\frac{3}{2} \leq x < \frac{1}{2}$ 时, 不等式为 $4 \geq 6$, 无解;

当 $x < -\frac{3}{2}$ 时, 不等式为 $-2-4x \geq 6$, 即 $x \leq -2$.

综上可得不等式的解集为 $x \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$.

(2) 因为 $f(x) = |2x-1| + |2x+a| \geq |a+1|$,
而 $f(x) > 3-2a$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,
所以 $3-2a < |a+1|$,
于是 $a+1 > 3-2a$ 或 $a+1 < 2a-3$,
即 $a > \frac{2}{3}$ 或 $a > 4$, 故 $a > \frac{2}{3}$.

19. 【解析】(1) 可知曲线 C 的普通方程为 $(x-\sqrt{3})^2 + (y-1)^2 = 4$,

所以曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 - 2\sqrt{3}\rho\cos\theta - 2\rho\sin\theta = 0$,

即 $\rho = 4\sin(\theta + \frac{\pi}{3})$.

(2) 由(1)不妨设 $M(\rho_1, \theta), N(\rho_2, \theta + \frac{\pi}{2}), \rho_1 > 0, \rho_2 > 0$,

$S_{\triangle MON} = \frac{1}{2} |OM| |ON| = \frac{1}{2} |\rho_1 \rho_2|$

$= 8 \left| \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) \sin(\theta + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) \right|$

$= 4 \left| \sin(2\theta + \frac{2\pi}{3}) \right| \leq 4$,

所以 $\triangle MON$ 面积的最大值为 4.

20. 【解析】(1) 当 E 为 PA 中点时满足题意.

证明: 取 AD 的中点
为 F , 连结 BF, EF .

$\because AD=4, BC=2$,
 $\therefore BC \parallel FD$, 且 BC
 $= FD$,

$\therefore$ 四边形 $BCDF$ 是

平行四边形,

即 $BF \parallel CD$.

$\because BF \not\subset$ 平面 PCD ,

$\therefore BF \parallel$ 平面 PCD .

$\because E, F$ 分别是 PA, AD 的中点, $\therefore EF \parallel PD$,

$\because EF \not\subset$ 平面 PCD ,

$\therefore EF \parallel$ 平面 PCD .

$\because EF \cap BF = F$,

$\therefore$ 平面 $BEF \parallel$ 平面 PCD .

$\because BE \subset$ 平面 BEF ,

$\therefore BE \parallel$ 平面 PCD .

(2) 由已知易得 $AC=2\sqrt{2}, CD=2\sqrt{2}$.

$\because AC^2 + CD^2 = AD^2$,

$\therefore \angle ACD = 90^\circ$, 即 $AC \perp CD$.

又 $\because PA \perp$ 平面 $ABCD, CD \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore PA \perp CD$.

$\because PA \cap AC = A$,

$\therefore CD \perp$ 平面 PAC .

$\because PC \subset$ 平面 PAC ,

$\therefore CD \perp PC$.

(3) 由已知得 $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$,

所以 $V_{P-BCD} = \frac{1}{3} \times 2 \times \sqrt{10} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$.

又 $PA = \sqrt{10}$, 则 $PC = 3\sqrt{2}$, 由 $CD \perp PC$ 得 $S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 6$,

$\because V_{B-PCD} = V_{P-BCD}$,

$\therefore$ 点 B 到平面 PCD 的距离为 $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

21. 【解析】(1) $\because x+y+z=1, \therefore (x+y+z)^2 = 1, x^2$

$+ y^2 + z^2 - \frac{1}{3} = (x^2 + y^2 + z^2) - \frac{1}{3} (x+y+z)^2$

$= x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{3} (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz +$

$2zx) = \frac{1}{3} (2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx)$

$= \frac{1}{3} [(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] \geq 0$,

当且仅当 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时取等号,

$\therefore x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$.

(2) 要证: $(\frac{1}{x}-1)(\frac{1}{y}-1)(\frac{1}{z}-1) \geq 8$,

需证: $(\frac{x+y+z}{x}-1)(\frac{x+y+z}{y}-1)(\frac{x+y+z}{z}-1) \geq 8$,

即证: $\frac{y+z}{x} \cdot \frac{x+z}{y} \cdot \frac{x+y}{z} \geq 8$,

需证: $(y+z)(x+z)(x+y) \geq 8xyz$,

$\because x, y, z$ 为正数, 由基本不等式,

可得 $y+z \geq 2\sqrt{yz}, x+z \geq 2\sqrt{xz}, x+y \geq 2\sqrt{xy}$, 当且仅当 $x=y=z$ 时取等号,

将以上三个同向不等式相乘得 $(y+z)(x+z)(x+y) \geq 8\sqrt{x^2y^2z^2}$,

即 $(y+z)(x+z)(x+y) \geq 8xyz$,

所以原不等式 $(\frac{1}{x}-1)(\frac{1}{y}-1)(\frac{1}{z}-1) \geq 8$ 成立.

22. 【解析】(1) 设椭圆的标准方程为 $mx^2 + ny^2 = 1 (m > 0, n > 0, m \neq n)$, 椭圆 C 过点 A ,

$$\text{所以 } 4m + n = 1, \text{ ①}$$

将 $y = x + 3$ 代入椭圆方程化简得:

$$(m+n)x^2 + 6nx + 9n - 1 = 0,$$

因为直线 l 与椭圆 C 相切,

$$\text{所以 } \Delta = (6n)^2 - 4(m+n)(9n-1) = 0, \text{ ②}$$

$$\text{解①②可得, } m = \frac{1}{6}, n = \frac{1}{3},$$

$$\text{所以椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 设点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

$$\text{则有 } M\left(\frac{x_1+2}{2}, \frac{y_1+1}{2}\right), N\left(\frac{x_2+2}{2}, \frac{y_2+1}{2}\right),$$

由题意可知 $PQ \parallel MN$, 所以 $k_{PQ} = k_{MN} = 1$,

设直线 PQ 的方程为 $y = x + t$,

$$\text{代入椭圆方程并化简得: } 3x^2 + 4tx + 2t^2 - 6 = 0,$$

$$\text{由题意可知 } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{4t}{3}, \\ x_1 x_2 = \frac{2t^2 - 6}{3}, \end{cases} \text{ ③}$$

$$k_{OM} + k_{ON} = \frac{y_1+1}{x_1+2} + \frac{y_2+1}{x_2+2} = \frac{x_1+t+1}{x_1+2} + \frac{x_2+t+1}{x_2+2},$$

$$\text{通分后可变形得到 } k_{OM} + k_{ON} = \frac{2x_1x_2 + (t+3)(x_1+x_2) + 4t+4}{x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4},$$

$$\text{将③式代入分子得 } k_{OM} + k_{ON} = \frac{2(2t^2-6) + (t+3)(-4t) + 12t+12}{3x_1x_2 + 6(x_1+x_2) + 12}$$

$$= \frac{0}{3x_1x_2 + 6(x_1+x_2) + 12} = 0,$$

所以 OM, ON 斜率之和为定值 0.

(二十)

1. C 【解析】 $\because A = [0, 8]$, 又集合 $U = \{x | x \leq 8\}$,

$$\therefore \complement_U A = (-\infty, 0).$$

故选 C.

2. C 【解析】依题 $z_2 = -2 + i$, 从而 $\bar{z}_2 = -2 - i$, 于是

$$z_1 \cdot \bar{z}_2 = -3 - 4i, \text{ 故选 C.}$$

3. C 【解析】在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

$$\text{得 } \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以 $B = \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$, 故选 C.

4. C 【解析】直线必过点 $(0, 1)$, 而点 $(0, 1)$ 在椭圆的内部, 所以过椭圆内部的点的直线必与椭圆相交, 有 2 个交点, 故选 C.

5. D 【解析】设方格边长为 1, 在直角坐标系内, $a = (1, 2), b = (2, -1), c = (3, 4)$, 由 $c = xa + yb (x, y \in \mathbf{R})$ 得, $(3, 4) = x(1, 2) + y(2, -1), (3, 4) = (x + 2y, 2x - y)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2x - y = 4, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = \frac{11}{5}, \\ y = \frac{2}{5}, \end{cases} \text{ 所以 } x + y = \frac{13}{5},$$

选 D.

6. B 【解析】阅读流程图, 该程序运行过程如下:

第 1 次运行时: $y = x = 2, x = [x] - 1 = [2] - 1 = 1$, 此时 $x \geq 0$, 则 $x = \frac{y}{2} = 1$;

第 2 次运行时: $y = x = 1, x = [x] - 1 = [1] - 1 = 0$, 此时 $x \geq 0$, 则 $x = \frac{y}{2} = \frac{1}{2}$;

第 3 次运行时: $y = x = \frac{1}{2}, x = [x] - 1 = \left[\frac{1}{2}\right] - 1 = -1$, 此时 $x < 0$, 跳出循环,

$$\text{输出 } z = x + y = (-1) + \frac{1}{2} = -0.5.$$

故选 B.

7. C 【解析】设事件 A 为“该蚂蚁距离三角形的三个顶点的距离均超过 1”, 则基本事件的总体对应



的是三角形的面积, 大小为 $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$, 随机事件 A 对应的面积为三角形中去除阴影部分后的面积, 三个阴影部分的面积和为 $\frac{1}{2} \times \pi \times 1^2 = \frac{\pi}{2}$, 故

所求的概率为 $1 - \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\pi}{12}$, 选 C.

8. D 【解析】根据题意可知, $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$,

$$\text{当 } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 时, } 2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right],$$

所以函数 $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选 D.

9. D 【解析】由题意知: $|MN| = |NQ|$,

$$||NQ|-|NP||=||MN|-|NP||=|MP|=6,$$

$$\because Q(-4,0), P(4,0), |PQ|=8>6,$$

$$\therefore \text{点 } N \text{ 的轨迹为双曲线, } a=3, c=4, b=\sqrt{7},$$

$$\therefore \text{点 } N \text{ 的轨迹方程为 } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1.$$

故选 D.

10. A 【解析】依题意,将题中数据统计如下表所示:

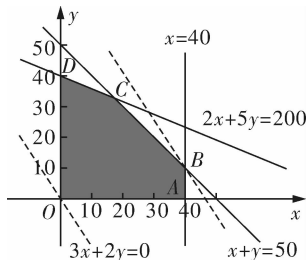
	A(吨)	B(吨)	染料最高用量(吨)
甲染料	1	1	50
乙染料	4	0	160
丙染料	2	5	200

设该公司一天内安排生产 A 产品 x 吨, B 产品 y 吨,所获利润为 z 元.

依据题意得目标函数为 $z=300x+200y$,约束条件

$$\text{件为} \begin{cases} x+y \leq 50, \\ 4x \leq 160, \\ 2x+5y \leq 200, \\ x \geq 0, y \geq 0, \end{cases} \quad \text{欲求目标函数 } z=300x+200y=100(3x+2y) \text{ 的最大值,}$$

先画出约束条件表示的可行域,如图中阴影部分所示,



则点 $A(40,0)$, $B(40,10)$, $C(\frac{50}{3}, \frac{100}{3})$, $D(0,40)$,

作直线 $3x+2y=0$,当移动该直线过点 $B(40,10)$ 时, $3x+2y$ 取得最大值,则 $z=300x+200y$ 也取得最大值(也可通过代入凸多边形端点进行计算,比较大小求得).故 $z_{\max}=300 \times 40 + 200 \times 10 = 14\,000$,所以工厂每天生产 A 产品 40 吨, B 产品 10 吨时,才可获得最大利润,为 14 000 元.选 A.

11. B 【解析】 $\because AB \parallel OD, \therefore \angle CDO$ 就是异面直线 CD 与 AB 所成的角,为 30° ,而 $OD=6, CO \perp$ 平面 $ABOD$,故 $CO=OD \tan 30^\circ = 2\sqrt{3}$,在直角梯形 $ABOD$ 中,可得 $OB=6$,以 OB, OC, OD 为相邻三

条棱补成一个长方体,则该长方体的外接球半径

$$\text{即为所求球的半径,即 } r = \frac{\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 6^2 + 6^2}}{2} =$$

$$\sqrt{21}, \text{ 则该球的表面积为 } 84\pi.$$

12. D 【解析】设点 $P(x_0, \ln x_0 - x_0) (x_0 > 0)$,

$$\therefore f(x) = \ln x - x,$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x},$$

$$\therefore f'(x_0) = \frac{1-x_0}{x_0},$$

$$\therefore \text{切线 } l_1 \text{ 的方程为 } y - (\ln x_0 - x_0) = \frac{1-x_0}{x_0}(x - x_0),$$

$$\text{令 } x=0, \text{ 得 } y = \ln x_0 - 1, \text{ 故 } A(0, \ln x_0 - 1),$$

$$\text{又点 } B(0, \ln x_0 - x_0),$$

设线段 AB 的中点 M 的纵坐标为 t ,则

$$t = \frac{1}{2}[(\ln x_0 - 1) + (\ln x_0 - x_0)]$$

$$= \frac{1}{2}(2\ln x_0 - x_0 - 1),$$

$$\text{设 } g(x) = \frac{1}{2}(2\ln x - x - 1) (x > 0),$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x} - 1\right) = \frac{2-x}{2x},$$

故当 $0 < x < 2$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增;

当 $x > 2$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减.

$$\therefore g(x)_{\max} = g(2) = \frac{1}{2}(2\ln 2 - 3) = \ln 2 - \frac{3}{2}.$$

选 D.

13. $(-1, \frac{3}{2})$ 【解析】由 $x-y=2$ 与 $cx+y=3$ 得交

$$\text{点 } (\frac{5}{1+c}, \frac{3-2c}{1+c}), \text{ 所以 } \frac{5}{1+c} > 0, \frac{3-2c}{1+c} > 0,$$

$$\therefore -1 < c < \frac{3}{2}.$$

14. $\frac{1}{5}$ 【解析】设每天的增加量为 d ,则 $15 \times 4 +$

$$\frac{15 \times 14}{2} \times d = 81, \text{ 解得 } d = \frac{1}{5}, \text{ 故答案为 } \frac{1}{5}.$$

15. $2\sqrt{2}$ 【解析】设抛物线上任意一点的坐标为 $(\frac{y^2}{4}, y)$,

$$\text{由两点间的距离公式得 } |PA| = \sqrt{\left(\frac{y^2}{4} - 3\right)^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{16}y^4 - \frac{1}{2}y^2 + 9},$$

当 $y^2 = -\frac{1}{2} = 4$, 即 $y = \pm 2$ 时, $|PA|$ 取得最

小值为 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

16. $\sqrt{2}$ 【解析】设 $B(x_2, y_2)$,

则椭圆 C_1 在点 B 处的切线方程为 $\frac{x_2}{2}x + y_2y = 1$,

令 $x=0, y_D = \frac{1}{y_2}$, 令 $y=0$, 可得 $x_C = \frac{2}{x_2}$,

所以 $S_{\triangle OCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y_2} \cdot \frac{2}{x_2} = \frac{1}{x_2 y_2}$,

又点 B 在椭圆的第一象限上,

所以 $x_2, y_2 > 0, \frac{x_2^2}{2} + y_2^2 = 1$,

即有 $\frac{1}{x_2 y_2} = \frac{\frac{x_2^2}{2} + y_2^2}{x_2 y_2} = \frac{x_2}{2y_2} + \frac{y_2}{x_2} \geq 2\sqrt{\frac{x_2}{2y_2} \cdot \frac{y_2}{x_2}} = \sqrt{2}$,

$S_{\triangle OCD} \geq \sqrt{2}$, 当且仅当 $\frac{x_2^2}{2} = y_2^2 = \frac{1}{2}$,

所以当 $B(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 时, $\triangle OCD$ 的面积取最小值 $\sqrt{2}$.

17. 【解析】(1) 由题设 $\frac{1}{1-a_{n+1}} - \frac{1}{1-a_n} = 1$, 得

$\left\{ \frac{1}{1-a_n} \right\}$ 是公差为 1 的等差数列,

又 $\frac{1}{1-a_1} = 1$,

故 $\frac{1}{1-a_n} = 1 + (n-1) \times 1 = n$,

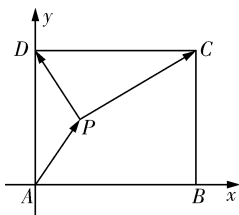
所以 $a_n = 1 - \frac{1}{n}$.

(2) 由 (1) 得 $b_n = \frac{1 - \sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$,

$S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 1$.

18. 【解析】(1) 如图, 以 A 为坐标原点建立平面直角坐标系,



则 $A(0,0), B(2,0), C(2,\sqrt{3}), D(0,\sqrt{3})$.

当 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 时, $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

则 $\overrightarrow{PC} = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{PD} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$\therefore \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD} = \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 0$.

(2) 由三角函数的定义可设 $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$,

则 $\overrightarrow{PC} = (2 - \cos \alpha, \sqrt{3} - \sin \alpha)$,

$\overrightarrow{PD} = (-\cos \alpha, \sqrt{3} - \sin \alpha)$,

$\overrightarrow{AP} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$,

从而 $\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = (2 - 2\cos \alpha, 2\sqrt{3} - 2\sin \alpha)$,

$\therefore (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) \cdot \overrightarrow{AP} = 2\cos \alpha - 2\cos^2 \alpha + 2\sqrt{3}\sin \alpha - 2\sin^2 \alpha = 4\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - 2$.

$\therefore 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

$\therefore$ 当 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 时, $(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) \cdot \overrightarrow{AP}$ 取得最大值为 2.

19. 【解析】(1) 2×2 列联表如下:

	年龄不低于 45 岁的人数	年龄低于 45 岁的人数	合计
了解人工智能	3	29	32
不了解人工智能	7	11	18
合计	10	40	50

$K^2 = \frac{50(3 \times 11 - 7 \times 29)^2}{10 \times 40 \times 32 \times 18} \approx 6.27 < 6.635$,

所以没有 99% 的把握认为以 45 岁为分界点对“了解人工智能”有差异.

(2) 设年龄在 $[45, 55)$ 中“了解人工智能”的 2 人分别为 A_1, A_2 , “不了解人工智能”的 3 人分别为 B_1, B_2, B_3 , 则从年龄在 $[45, 55)$ 的被调查人中随机选取两人所有可能的结果有 $(A_1, A_2), (A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_1, B_3), (A_2, B_1), (A_2, B_2), (A_2, B_3), (B_1, B_2), (B_1, B_3), (B_2, B_3)$, 共 10 种.

设“两人中恰好一人‘了解人工智能’”为事件 M , 则事件 M 所有可能的结果有 $(A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_1, B_3), (A_2, B_1), (A_2, B_2), (A_2, B_3)$, 共 6 种,

$$\text{所以 } P(M) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

所以对年龄在 $[45, 55]$ 的被调查人中随机选取两人进行调查,两人中恰好一人“了解人工智能”的概率为 $\frac{3}{5}$.

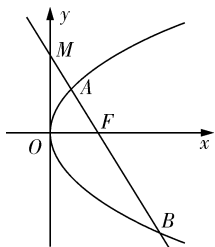
20.【解析】(1)据已知得椭圆 E 的右焦点为 $F(1, 0)$,

$\therefore \frac{p}{2} = 1, p = 2$, 故抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$, 易知直线 l 的方程为 $y = -x + 1$, 于是

$$\begin{cases} y = -x + 1, \\ y^2 = 4x \end{cases} \Rightarrow (-x + 1)^2 = 4x \Rightarrow x^2 - 6x + 1 = 0,$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6, \\ x_1 \cdot x_2 = 1, \end{cases}$

$\therefore |AB| = \sqrt{k^2 + 1} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} \Rightarrow |AB| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{36 - 4} = 8$ (或 $|AB| = p + x_1 + x_2 = 8$).



(2)根据题意知 l 的斜率必存在, 于是设 l 的方程为 $y = k(x - 1)$, 则点 M 的坐标为 $M(0, -k)$,

$\therefore A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 为 l 与抛物线 C 的交点,

$$\therefore \begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = k(x - 1) \end{cases} \Rightarrow k^2 x^2 - 2(k^2 + 2)x + k^2 = 0,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta = 16(k^2 + 1) > 0, \\ x_1 + x_2 = 2 + \frac{4}{k^2}, \\ x_1 \cdot x_2 = 1. \end{cases}$$

$$\text{又} \because \vec{MA} = m\vec{AF},$$

$$\therefore (x_1, y_1 + k) = m(1 - x_1, -y_1), \text{ 得 } m = \frac{x_1}{1 - x_1},$$

$$\text{同理 } n = \frac{x_2}{1 - x_2}.$$

$$\begin{aligned} \therefore m + n &= \frac{x_1}{1 - x_1} + \frac{x_2}{1 - x_2} \\ &= \frac{(x_1 + x_2) - 2x_1x_2}{1 - (x_1 + x_2) + x_1x_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2 + \frac{4}{k^2} - 2}{1 - 2 - \frac{4}{k^2} + 1} \\ &= -1. \end{aligned}$$

21.【解析】(1) $(x - \sqrt{3})^2 + (y + 1)^2 = 9$ 可化为 $x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x + 2y - 5 = 0$,

故其极坐标方程为 $\rho^2 - 2\sqrt{3}\rho\cos\theta + 2\rho\sin\theta - 5 = 0$.

(2)将 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 代入 $\rho^2 - 2\sqrt{3}\rho\cos\theta + 2\rho\sin\theta - 5 = 0$, 得 $\rho^2 - 2\rho - 5 = 0$,

$$\therefore \rho_1 + \rho_2 = 2, \rho_1\rho_2 = -5, \therefore |MN| = |\rho_1 - \rho_2| = \sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2 - 4\rho_1\rho_2} = 2\sqrt{6}.$$

22.【解析】(1)①当 $x \leq -\frac{1}{2}$ 时, $-1 - 2x + x \geq 2 \Rightarrow x \leq -3$, 所以 $x \leq -3$;

②当 $-\frac{1}{2} < x < 0$ 时, $2x + 1 + x \geq 2 \Rightarrow x \geq \frac{1}{3}$, 所以为 $\emptyset$;

③当 $x \geq 0$ 时, $x + 1 \geq 2 \Rightarrow x \geq 1$, 所以 $x \geq 1$.

综合①②③, 不等式的解集为 $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$.

$$(2) \text{ 即 } |2x + 1| - 2|x| \leq 2 + a \Rightarrow \left| x + \frac{1}{2} \right| - |x| \leq 1 + \frac{a}{2},$$

由绝对值的几何意义, 只需 $-\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a}{2} \Rightarrow a \geq -3$.

(二十一)

1. C 【解析】由集合 $M = \{4, 5, -3m\}, N = \{-9, 3\}$, 若 $M \cap N \neq \emptyset$, 则 $-3m = -9$ 或 $-3m = 3$, 即可得 $m = 3$ 或 $m = -1$. 故选 C.

2. A 【解析】 $(1 - ai)(3 + 2i) = 3 + 2a + (2 - 3a)i$, 由 $3 + 2a = 0$ 且 $2 - 3a \neq 0$ 得 $a = -\frac{3}{2}$, 故选 A.

3. A 【解析】第一次循环后, $i = 3, S = 9$; 第二次循环后, $i = 5, S = 13$; 第三次循环后, $i = 7, S = 17$; 第四次循环后, $i = 9, S = 21$, 此时 $i = 9 > 8$, 输出 $S = 21$, 故选 A.

4. D 【解析】设 $P(x, y)$, 由点 P 在 P_1P_2 的延长线上且 $|\overrightarrow{P_1P}| = 2|\overrightarrow{PP_2}|$, 可得 P_2 为 PP_1 的中点,

$\therefore P_1(2, -1), P_2(0, 5), \therefore 0 = x + 2, 10 = y - 1,$
 $\therefore x = -2, y = 11, \therefore P(-2, 11),$ 故选 D.

5. A 【解析】由 $f(x) = \sin(x + \varphi)$ 满足 $f(\frac{\pi}{3}) = 1,$

得 $\sin(\frac{\pi}{3} + \varphi) = 1,$ 即 $\frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

则 $\varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

$\therefore f(x) = \sin(x + \varphi) = \sin(x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi) =$
 $\sin(x + \frac{\pi}{6}).$

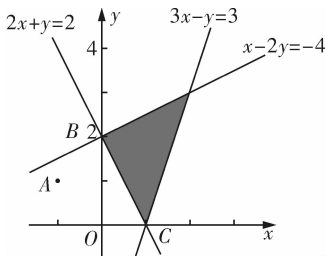
$\therefore f(\frac{5\pi}{6}) = \sin \pi = 0.$

故选 A.

6. B 【解析】由题意 $V = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi \times 2^3 + 2 \times 2 \times 3 =$

$\frac{16}{3} \pi + 12,$ 选 B.

7. D 【解析】作出可行域, 如图.



因为函数 $y = k(x + 1) + 1$ 的图象是过点 $A(-1, 1),$ 且斜率为 k 的直线 $l,$ 由图知, 当直线 l 过点 $B(0, 2)$ 时, k 取最大值 1, 当直线 l 过点 $C(1, 0)$ 时, k 取最小值 $-\frac{1}{2},$ 故 $k \in [-\frac{1}{2}, 1],$ 故选 D.

8. B 【解析】因为两条直线 $2x - y + 5 = 0$ 与 $2x - y - 5 = 0$ 平行, 故它们之间的距离为圆的直径, 即 $2r = \frac{|5 + 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 2\sqrt{5},$ 所以 $r = \sqrt{5}.$ 设圆心坐标为 $P(a, -a),$ 则满足点 P 到两条切线的距离都等于半径, 所以 $\frac{|3a + 5|}{\sqrt{5}} = \frac{|3a - 5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5},$ 解得 $a = 0,$ 故圆心为 $(0, 0),$ 所以圆的标准方程为 $x^2 + y^2 = 5,$ 故选 B.

9. B 【解析】根据题意有 $\sin \angle BAC = \sin(\angle BAD +$
 $\frac{\pi}{2}) = \cos \angle BAD = \frac{2\sqrt{2}}{3},$

根据余弦定理可知 $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD$

$$\cdot \cos \angle BAD = 18 + 9 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 3,$$

所以 $BD = \sqrt{3}.$

10. A 【解析】设双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} =$

$1(a > 0, b > 0),$

由题意知 $c = 3, a^2 + b^2 = 9,$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则有: } \begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \\ \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \end{cases}$$

$$\text{两式作差得: } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = \frac{-12}{-15} \times \frac{b^2}{a^2} = \frac{4b^2}{5a^2},$$

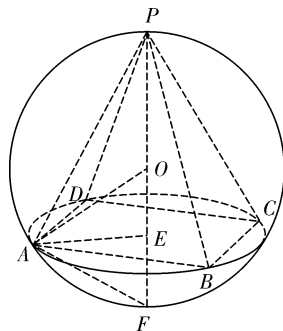
又 AB 的斜率是 $\frac{-15 - 0}{-12 - 3} = 1,$

所以将 $4b^2 = 5a^2$ 代入 $a^2 + b^2 = 9$ 得: $a^2 = 4, b^2 = 5.$

所以双曲线的标准方程是 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1,$

则双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x.$

11. B 【解析】如图, 正四棱锥 $P-ABCD$ 中, PE 为正四棱锥的高, 根据球的相关知识可知, 正四棱锥的外接球的球心 O 必在正四棱锥的高线 PE 所在的直线上, 延长 PE 交球面于点 $F,$ 连接 $AE, AF,$ 由球的性质可知 $\triangle PAF$ 为直角三角形且 $AE \perp PF,$ 根据平面几何中的射影定理可得: $PA^2 = PE \cdot PF,$



$$\therefore AE = \frac{\sqrt{AB^2 + BC^2}}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2}}{2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore PA = \sqrt{PE^2 + AE^2} = \sqrt{4^2 + 2} = 3\sqrt{2},$$

$$PF = 2R,$$

$$\therefore 18 = 2R \times 4, R = \frac{9}{4},$$

$$\therefore S = 4\pi R^2 = \frac{81\pi}{4}, \text{故选 B.}$$

12. C **【解析】**当 $a > 0$ 时, $y = e^x + \frac{a}{e^x}$ 在

$(-\infty, \frac{1}{2} \ln a]$ 上为减函数, 在 $[\frac{1}{2} \ln a, +\infty)$ 上为

增函数, 且 $y = e^x + \frac{a}{e^x} > 0$ 恒成立,

若函数 $f(x) = \left| e^x + \frac{a}{e^x} \right| (a \in \mathbf{R})$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调递增,

则 $y = e^x + \frac{a}{e^x}$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调递增,

则 $\frac{1}{2} \ln a \leq 0$, 解得 $a \in (0, 1]$;

当 $a = 0$ 时, $f(x) = \left| e^x + \frac{a}{e^x} \right| = e^x$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调递增, 满足条件;

当 $a < 0$ 时, $y = e^x + \frac{a}{e^x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 令 $y = e^x + \frac{a}{e^x} = 0$, 则 $x = \ln \sqrt{-a}$,

则 $f(x) = \left| e^x + \frac{a}{e^x} \right|$ 在 $(-\infty, \ln \sqrt{-a}]$ 上为减函数, 在 $[\ln \sqrt{-a}, +\infty)$ 上为增函数,

则 $\ln \sqrt{-a} \leq 0$, 解得 $a \geq -1$, 即 $a \in [-1, 0)$.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $[-1, 1]$, 故选 C.

13. 94.5 **【解析】**从茎叶图中可知 14 个数据排序为: 79 83 86 88 91 93 94 95 98 98 99 101 103 114, 中位数为 94 与 95 的平均数, 为 94.5.

14. $\frac{3}{8}$ **【解析】**由题意可知 $D = 4$,

由 $-1 \leq \log_{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{1}{2} \right) \leq 1$ 可得 $\frac{1}{2} \leq x + \frac{1}{2} \leq 2$,

即 $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$, 所以 $d = \frac{3}{2}$, 故所求事件的概率为

$$P = \frac{d}{D} = \frac{3}{8}, \text{应填答案 } \frac{3}{8}.$$

15. 1 010 **【解析】**当 $n = 2k - 1$ 时, $a_n = a_{2k-1} = (2k - 1) \cos \frac{2k-1}{2} \pi = 0$,

当 $n = 4k - 2$ 时, $a_n = a_{4k-2} = (4k - 2) \cos(2k - 1) \pi = -(4k - 2) = -n$,

当 $n = 4k$ 时, $a_n = 4k \cos(2k \pi) = 4k = n$,

$$\therefore S_{2\,020} = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2\,017} + a_{2\,018} + a_{2\,019} + a_{2\,020})$$

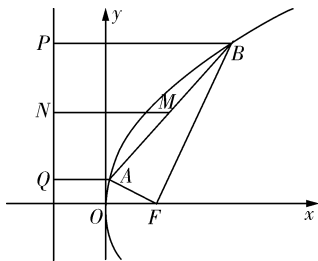
$$= -2 + 4 - 6 + 8 + \cdots - 2\,018 + 2\,020$$

$$= 1\,010.$$

16. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **【解析】**设 $|AF| = a$, $|BF| = b$, A, B 在准线

上的射影点分别为 Q, P , 连接 AQ, BP ,

由抛物线定义, 得 $|AF| = |AQ|$ 且 $|BF| = |BP|$,



在梯形 $ABPQ$ 中根据中位线定理, 得 $2|MN| = |AQ| + |BP| = a + b$.

由勾股定理得 $|AB|^2 = a^2 + b^2$, 配方得 $|AB|^2 = (a + b)^2 - 2ab$,

$$\text{又} \because ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2,$$

$$\therefore (a+b)^2 - 2ab \geq (a+b)^2 - 2 \times \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} (a + b)^2,$$

$$\text{得到 } |AB| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} (a + b).$$

$$\text{所以 } \frac{|MN|}{|AB|} \leq \frac{\frac{1}{2} (a+b)}{\frac{\sqrt{2}}{2} (a+b)} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{即 } \frac{|MN|}{|AB|} \text{ 的最大}$$

$$\text{值为 } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

17. **【解析】**(1) 由已知 $b_n = 2 - 2S_n$,

当 $n = 1$ 时, $b_1 = 2 - 2S_1 = 2 - 2b_1$, 得 $b_1 = \frac{2}{3}$;

当 $n \geq 2$ 时, $2S_n + b_n = 2$, $2S_{n-1} + b_{n-1} = 2$, 两式相

$$\text{减得: } 3b_n = b_{n-1} (n \geq 2) \Rightarrow \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{1}{3},$$

数列 $\{b_n\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 是以 $b_1 = \frac{2}{3}$ 为首项, 以 $\frac{1}{3}$ 为公

比的等比数列, 通项公式 $b_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^n$.

(2) 由已知 $c_n = \frac{n}{2} \cdot b_n = n \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^n$, 用错位相减

法求和 T_n ,

$$T_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

$$\frac{1}{3} T_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \cdots + n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1},$$

$$\text{所以 } \frac{2}{3} T_n = \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n - n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{2n+3}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

$$T_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

18. 【解析】(1) $\because PD \perp$ 平面 $ABCD$, $AC \subset$ 平面 $ABCD$,
 $\therefore AC \perp PD$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\therefore AC \perp BD$,

又 $\because PD \cap BD = D$, $\therefore AC \perp$ 平面 PBD .

而 $AC \subset$ 平面 EAC , $\therefore$ 平面 $EAC \perp$ 平面 PBD .

(2) $\because PD \parallel$ 平面 EAC , 平面

$EAC \cap$ 平面 $PBD = OE$,

$\therefore PD \parallel OE$,

$\because O$ 是 BD 中点, $\therefore E$ 是 PB

中点.

取 AD 中点 H , 连结 BH ,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\angle BAD = 60^\circ$,

$\therefore BH \perp AD$, 又 $BH \perp PD$, $AD \cap PD = D$,

$\therefore BH \perp$ 平面 PAD , $BH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \sqrt{3}$.

$$\therefore V_{P-EAD} = V_{E-PAD} = \frac{1}{2} V_{B-PAD}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times S_{\triangle PAD} \times BH = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

19. 【解析】(1) 由频率分布直方图可得该市居民每月的用水量的平均数为

$$\bar{x} = 1 \times 0.04 + 3 \times 0.08 + 5 \times 0.16 + 7 \times 0.20 + 9 \times 0.26 + 11 \times 0.16 + 13 \times 0.06 + 15 \times 0.04 = 7.96.$$

设中位数为 m ,

$$\text{则 } (0.02 + 0.04 + 0.08 + 0.10) \times 2 + (m - 8) \times 0.13 = 0.5,$$

解得 $m = 8.15$.

(2) 设居民月用水量为 t 吨, 相应的水费为 y 元,

则由题意得

$$y = \begin{cases} 4t, & 0 < t \leq 12, \\ 48 + (t - 12) \times 6.6, & 12 < t \leq 14, \\ 61.2 + (t - 14) \times 7.8, & 14 < t \leq 16, \end{cases}$$

$$\text{即 } y = \begin{cases} 4t, & 0 < t \leq 12, \\ 6.6t - 31.2, & 12 < t \leq 14, \\ 7.8t - 48, & 14 < t \leq 16. \end{cases}$$

(3) 设李某 2019 年 1~6 月份月用水费 y (元) 与月份 x 的对应点为 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), 它们的平均值分别为 $\bar{x}, \bar{y}$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 21 = 6\bar{x}, \bar{x} = 3.5,$$

又点 $(\bar{x}, \bar{y})$ 在直线 $y = 2x + 33$ 上,

所以 $\bar{y} = 40$,

因此 $y_1 + y_2 + \cdots + y_6 = 240$,

所以 7 月份的水费为 $294.6 - 240 = 54.6$ 元.

由 (2) 知, 当 $t = 13$ 时, $f(t) = 6.6 \times 13 - 31.2 = 54.6$,

所以李某 7 月份的用水吨数约为 13 吨.

20. 【解析】(1) 由题意得 $2b = 2$, $\therefore b = 1$,

$$\because \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, a^2 = b^2 + c^2, \therefore a = \sqrt{2}, c = 1,$$

$$\therefore \text{椭圆的方程为 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$

(2) ① 当直线 AB 斜率不存在时, 不妨取 $A\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), B\left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), C\left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$\therefore \triangle ABC$ 面积为 $S = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$, 不符合题意.

② 当直线 AB 斜率存在时, 设直线 $AB: y = k(x - 1)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = k(x - 1), \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \end{cases} \text{ 化简得 } (2k^2 + 1)x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 2 = 0,$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{2k^2 + 1}, x_1 x_2 = \frac{2k^2 - 2}{2k^2 + 1},$$

$$\begin{aligned} \therefore |AB| &= \sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]} \\ &= \sqrt{(1+k^2)\left[\left(\frac{4k^2}{2k^2+1}\right)^2 - \frac{4(2k^2-2)}{2k^2+1}\right]} \\ &= 2\sqrt{2} \cdot \frac{k^2+1}{2k^2+1}. \end{aligned}$$

$$\therefore \text{点 } O \text{ 到直线 } kx - y - k = 0 \text{ 的距离 } d = \frac{|-k|}{\sqrt{k^2 + 1}} \\ = \frac{|k|}{\sqrt{k^2 + 1}},$$

又 O 是线段 AC 的中点,

$$\therefore \text{点 } C \text{ 到直线 } AB \text{ 的距离为 } 2d = \frac{2|k|}{\sqrt{k^2 + 1}},$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 面积为 } S = \frac{1}{2} |AB| 2d$$

$$= \frac{1}{2} \left(2\sqrt{2} \cdot \frac{k^2 + 1}{2k^2 + 1} \right) \frac{2|k|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

$$= 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{k^4 + k^2}}{2k^2 + 1} = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore 4k^4 + 4k^2 - 3 = 0, \therefore (2k^2 + 3)(2k^2 - 1) = 0,$$

$$\therefore k^2 = \frac{1}{2}, \therefore k = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 或 } k = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的方程为 } y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-1) \text{ 或 } y = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1).$$

21. 【解析】(1) $f(x) = x \ln x, \therefore f'(x) = \ln x + 1$.

当 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增.

$$\textcircled{1} 0 < t < \frac{1}{e} \text{ 时, } f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e};$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{e} \leq t \text{ 时, } f(x) \text{ 在 } [t, t+2] \text{ 上单调递增, } f(x)_{\min} = f(t) = t \ln t.$$

$$\therefore f(x)_{\min} = \begin{cases} -\frac{1}{e}, & 0 < t < \frac{1}{e}, \\ t \ln t, & t \geq \frac{1}{e}. \end{cases}$$

(2) 对一切 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $\ln x > \frac{1}{e^x} - \frac{2}{e^x}$ 成立,

$$\therefore x \ln x > \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e}, \therefore f(x) > \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e},$$

由(1)可知 $f(x) = x \ln x (x \in (0, +\infty))$ 的最小值是 $-\frac{1}{e}$, 当且仅当 $x = \frac{1}{e}$ 时取到.

$$\text{设 } m(x) = \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e} (x \in (0, +\infty)), \text{ 则 } m'(x) = \frac{1-x}{e^x},$$

$\therefore x \in (0, 1)$ 时, $m'(x) > 0, x \in (1, +\infty)$ 时, $m'(x) < 0$,

$$\therefore m(x)_{\max} = m(1) = -\frac{1}{e},$$

从而对一切 $x \in (0, +\infty), \ln x > \frac{1}{e^x} - \frac{2}{e^x}$ 成立.

22. 【解析】(1) 曲线 C 的普通方程为 $x^2 + y^2 = 4$.

当 $m=1$ 时, 直线 l 的普通方程为 $x - \sqrt{3}y - 1 = 0$.

设圆心到直线 l 的距离为 d ,

$$\text{则 } d = \frac{|-1|}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2}.$$

从而直线 l 交曲线 C 所得的弦长为 $2 \times \sqrt{2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{15}$.

(2) 直线 l 的普通方程为 $x - \sqrt{3}y - m = 0$.

则圆心到直线 l 的距离 $d = \frac{|m|}{2}$.

$\therefore$ 由题意知 $\frac{|m|}{2} - 2 = 1, \therefore m = \pm 6$.

$$23. \text{【解析】(1) } f(x) = \begin{cases} -3, & x < -1, \\ 2x-1, & -1 \leq x \leq 2, \\ 3, & x > 2, \end{cases}$$

当 $x < -1$ 时, $f(x) \geq 1$ 无解;

当 $-1 \leq x \leq 2$ 时, 由 $f(x) \geq 1$ 得, $2x-1 \geq 1$, 解得 $1 \leq x \leq 2$;

当 $x > 2$ 时, 由 $f(x) \geq 1$ 解得 $x > 2$.

所以 $f(x) \geq 1$ 的解集为 $\{x | x \geq 1\}$.

(2) 由 $f(x) \geq x^2 - x + m$ 得 $m \leq |x+1| - |x-2| - x^2 + x$,

$$\text{而 } |x+1| - |x-2| - x^2 + x \leq |x| + 1 + |x| - 2 - x^2 + x = -\left(|x| - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \leq \frac{5}{4}.$$

且当 $x = \frac{3}{2}$ 时, $|x+1| - |x-2| - x^2 + x = \frac{5}{4}$,

故 m 的取值范围为 $\left(-\infty, \frac{5}{4}\right]$.