

2019 年清华大学领军计划笔试试题

- 满足方程 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{100}$ 的有序正整数组 (x, y) 的个数为_____。
A. 12 B. 13 C. 24 D. 25
- 已知不定方程 $x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_n^4 = 799$ 有正整数解, 则正整数 n 的最小值为_____。
A. 11 B. 13 C. 15 D. 17
- 在十进制数下, 设 a 是 4444^{4444} 的各位数字之和, b 是 a 的各位数字之和, 则 b 的各位数字之和为_____。
A. 5 B. 6 C. 7 D. 16
- 若集合 A, B 满足 $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{N}^*$, 则称 (A, B) 为 $\mathbb{N}^*$ 的一个二划分。则_____。
A. 设 $A = \{x | x = 3k, k \in \mathbb{N}^*\}$, $B = \{x | x = 3k \pm 1, k \in \mathbb{N}^*\}$, 则 (A, B) 是 $\mathbb{N}^*$ 的一个二划分;
B. 设 $A = \{x | x > 0, x \text{ 为质数}\}$, $B = \{x | x > 0, x \text{ 为合数}\}$, 则 (A, B) 是 $\mathbb{N}^*$ 的一个二划分;
C. 能找到 $\mathbb{N}^*$ 的一个二划分满足: A 中不存在三个成等差数列的数, 且 B 中不存在无穷项的等差数列;
D. 能找到 $\mathbb{N}^*$ 的一个二划分满足: A 中不存在三个成等比数列的数, 且 B 中不存在无穷项的等比数列。
- A, B, C, D, E, F 六名同学进行乒乓球比赛, 每两个人都要比赛一局, 若 A, B, C, D, E 已经赛过的局数分别为 1、2、3、4、5, 则 F 已经赛过的局数为_____。
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n^2 - 3a_n + 4$, 且 $a_1 = 3$. 则_____。
A. $\{a_n\}$ 是递增数列 B. $\{a_n\}$ 是无界数列
C. $a_{100} = 101$ D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_1-1} + \frac{1}{a_2-1} + \cdots + \frac{1}{a_n-1} \right) = 1$
- 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{9}{10}\right)^n$, $b_n = a_{n+1} - a_n$. 则_____。
A. 数列 $\{a_n\}$ 的最大项为 a_9 B. 数列 $\{a_n\}$ 的最小项为 a_1
C. 数列 $\left\{\frac{b_{n+1}}{b_n}\right\}$ 的最大项为 $\frac{27}{10}$ D. 数列 $\left\{\frac{b_{n+1}}{b_n}\right\}$ 的最小项为 $-\frac{9}{10}$
- 对正整数 n , 整数 x_n, y_n 满足 $x_n + \sqrt{3}y_n = (2 + \sqrt{3})^n$. 则_____。
A. 对每个正整数 n , 都有 $x_{n+1} = 2x_n + 3y_n$
B. 对每个正整数 n , 都有 $y_{n+1} = x_n + 2y_n$
C. 存在正整数 n , 使得 $x_n = 2019$
D. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \sqrt{3}y_n = 0$
- 设 l_1, l_2 是直角坐标平面上两条不同直线, A_1, A_2 分别是 l_1, l_2 上的动点, P 是 A_1A_2 的中点. 则_____。

- A. 当 l_1, l_2 平行时, P 的轨迹是一条直线
 B. 当 l_1, l_2 平行时, P 的轨迹是一条射线
 C. 当 l_1, l_2 不平行时, P 能取遍平面上所有的点
 D. 当 l_1, l_2 不平行时, P 不能取遍平面上所有的点

10. 设 x 是实数, z 是辐角为 $\frac{\pi}{4}$ 的复数. 则 $|2+i-x| + |2+i-z| + |x-z|$ 的最小值为_____。

- A. $2\sqrt{2}$ B. 3 C. $\sqrt{10}$ D. $\sqrt{11}$

11. 设 $z_k = \cos \frac{2(k-1)\pi}{5} + i \sin \frac{2(k-1)\pi}{5}$, ($k = 1, 2, 3, 4, 5$), 记

$$a_i = \prod_{j \neq i, 1 \leq j \leq 5} (z_i - z_j), i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

则_____。

- A. $a_1 = 5$ B. $a_3 a_4 = 5^2$ C. $a_2 a_4 a_5 = 5^3$ D. $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = 5^5$

12. 设 $z_1, z_2, \dots, z_4$ 是多项式方程 $x^4 + 2x^3 + 2 = 0$ 的四个不同复数解, 则 $(z_1 z_2 + z_3 z_4)(z_1 z_3 + z_2 z_4)(z_1 z_4 + z_2 z_3) =$ _____。

- A. -6 B. 6 C. -8 D. 8

13. 若正数 a, b 满足 $ab(a+8b) = 20$, 则 $a+3b$ 的最小值为_____。

- A. 4 B. 5 C. $\sqrt[3]{60}$ D. $\frac{4\sqrt[3]{60}}{3}$

14. 设函数 $f(x) = 9^x - 3^{x+1} + a$ (a 为常数), 则_____。

A. 若对任意 $x \in (0, 1)$, 都有 $f(x) < 0$, 则 a 的取值范围是 $(-\infty, 3)$;

B. 若存在 $x \in (0, 1)$ 使得 $f(x) < 0$ 成立, 则 a 的取值范围是 $(-\infty, \frac{9}{4})$;

C. 当方程 $f(x) = a \cdot 3^x$ 在 $[0, 1]$ 上有唯一解时, a 的取值范围是 $(-\infty, 0]$;

D. 当方程 $f(x) = a \cdot 3^x$ 在 $[0, 1]$ 上有解时, a 的取值范围是 $(-\infty, 0]$.

15. 设 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上, 若对任意实数 c , 总存在实数 a, b 使得 $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$,

则称函数 $f(x)$ 具有性质 T . 下列函数中不具有性质 T 的是_____。

- A. $f(x) = \sin(2x-1)$ B. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

- C. $f(x) = e^{x+1}$ D. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

16. 设实数 x, y 满足 $x^3 + 27y^3 + 9xy = 1$, 则_____。

- A. $x^3 y$ 的最大值为 $\frac{1}{3}$ B. $x^3 y$ 的最大值为 $\frac{27}{64}$

- C. $x^3 y$ 的最小值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $x^3 y$ 无最小值

17. 设 $u = \frac{x+\sqrt{3}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $D = \{(x, y) | x^2 + (y-2)^2 \leq 1\}$, 则当 $(x, y) \in D$ 时, _____。

- A. u 的最小值为 1 B. u 的最大值为 2

- C. u 的最小值为 0 D. u 的最大值为 3

18. 设 P 是 $x^2 + y^2 = 1$ 上的动点, $M(0, -1), N(0, 2)$, 则 $|PM|^2 \cdot |PN|$ 的最大值为

_____。

- A. $3\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{3}$ C. 6 D. 8

19. 设 a 为实数, 若直线 $l_1: ax + y + 1 = 0, l_2: x + y + a = 0, l_3: (a^2 + a - 5)x + 3ay + 5 = 0$ 两两相交, 且交点恰是直角三角形的三个顶点, 则这样的 l_1, l_2, l_3 有_____。

- A. 2 组 B. 3 组 C. 4 组 D. 5 组

20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$, 直线 l 过点 $F(2, 0)$, 且与 C 交于 A, B 两点, P 为直线 $x = 3$ 上一点, 若 $\triangle PAB$ 为正三角形, 则 $\triangle PAB$ 的面积为_____。

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. $2\sqrt{3}$

21. 圆 $x^2 + y^2 = 4$ 在点 (x_0, y_0) 处的切线与抛物线 $y^2 = 8x$ 相交于 A, B 两点, 若 $\angle AOB = 90^\circ$, 则 $x_0 =$ _____。

- A. 2 B. 1 C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

22. 已知 AB 是圆 O 的直径, C 是圆弧 AB 的中点, M 是 AC 的中点, $CH \perp BM$ 于 H , 则_____。

- A. $\triangle AMH \sim \triangle BMA$ B. $\triangle BOH \sim \triangle BMA$
C. $OH = \frac{1}{2}AH$ D. $OH = \frac{1}{2}AM$

23. 已知三棱锥 $A - BCD$ 满足: $AB = AC = AD = BD = CD = 6, BC = 9$, 则三棱锥 $A - BCD$ 的外接球半径为_____。

- A. $\sqrt{21}$ B. $\frac{\sqrt{21}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{210}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{210}}{6}$

24. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1, 棱 AA_1 的中点为 E , AC 与 BD 交于点 O , 若平面 α 过 E 且与 OC_1 垂直, 则 α 截该正方体所得截面的面积为_____。

- A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

25. 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = 6, BC = CC_1 = 3\sqrt{2}, \angle ABC = 90^\circ$, 点 P 在线段 B_1C 上, 则 $A_1P + BP$ 的_____。

- A. 最小值为 $3 + \sqrt{10}$ B. 最小值为 $3\sqrt{10}$
C. 最大值为 $6 + 3\sqrt{2}$ D. 最大值为 $9\sqrt{2}$

26. $\min_{a, b \in \mathbb{R}} \max_{x \in [0, 4]} \{|(x - 2)^3 + ax + b|\} =$ _____。

- A. 1 B. 2 C. $\frac{2\sqrt{3}}{27}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{27}$

27. 函数 $f(x) = |x - 1| + |x - 3| + 2e^x$ 的最小值为_____。

- A. $3 \ln 2$ B. $4 \ln 2$ C. 5 D. 6

28. 已知函数 $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$, 则_____。

A. 不等式 $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{e^2}$ 的解集是 $\{x|x \geq 1\}$

B. 不等式 $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{e^2}$ 的解集是 $\{x|1 \leq x \leq 2\}$

C. 直线 $y = 2x - 1$ 与曲线 $y = f(x)$ 只有一个交点

D. 直线 $y = \frac{1}{3}(x - 1)$ 与曲线 $y = f(x)$ 只有一个交点

29. 已知 X 是含有 15 个元素的集合, Y 是含 5 个元素的集合, 设 f 是从 X 到 Y 的映射, 则满足条件 $f(x_1) = f(x_2)$ ($x_1, x_2 \in X$) 的有序对 (x_1, x_2) 的数目的最小值为_____。

A. 30

B. 45

C. 60

D. 75

30. 在 $\triangle ABC$ 内, 若 $\sin^2 A - \sin^2 C = \sin A \sin B - \sin^2 B$, 且 $c = 2$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为_____。

A. $\sqrt{3}$

B. 2

C. $\sqrt{5}$

D. $2\sqrt{2}$

31. 下列等式中, 成立的有_____。

A. $\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{6\pi}{7} = 1$

B. $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$

C. $\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ = \frac{1}{16}$

D. $\cos 6^\circ \cos 42^\circ \cos 66^\circ \cos 78^\circ = \frac{1}{16}$

32. 在一次知识竞赛结束后, 五位同学的答案分别是:

同学甲: 第三题是 A, 第二题是 C

同学乙: 第四题是 D, 第二题是 E

同学丙: 第一题是 D, 第五题是 B

同学丁: 第四题是 B, 第三题是 E

同学戊: 第二题是 A, 第五题是 C

结果他们的这些答案中各有一个是正确的。则一定正确的是_____。

A. 第一题是 D, 第五题是 C

B. 第二题是 E, 第三题是 B

C. 第三题是 A, 第四题是 B

D. 第四题是 C, 第五题是 B

33. $\int_{-1}^1 (1 - \sin x)x^2 dx =$ _____。

A. 0

B. 1

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{2}{3}$

34. 随机地将 1、2、3、4、5、6 这六个数分成 A, B 两组, 每组三个数, A 中最小的为 a_1 , 最大的为 a_2 , B 中最小的为 b_1 , 最大的为 b_2 . 记 $X = a_2 - a_1, Y = b_2 - b_1$, 则_____。

A. $\mathbb{E}X = \frac{7}{2}$

B. $\mathbb{E}Y = \frac{7}{3}$

C. $\mathbb{P}(X = Y) = \frac{2}{5}$

D. $\mathbb{P}(X = Y) = \frac{3}{10}$

35. 已知平面向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影为 $\frac{1}{2}$, $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot$

$(\vec{b} - \vec{c}) = 0, |\vec{d} - \vec{c}| = 1$, 则 $|\vec{d}|$ 的最大值为_____。

A. $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{4+\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

D. $\frac{4+\sqrt{5}}{2}$