

2019 年北京大学博雅计划笔试试题

1. 金字塔的底座为边长是 200 米的正方形。如果一个游客处于距离底座中心 200 米的圆周上, 则游客可以同时看到金字塔两个塔面的概率为_____。

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 以上答案都不对

2. 已知 $f(x) = a \sin x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. 其中 $a > 0$. 若 $f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 有两个交点, 则实数 a 的取值范围是_____。

- A. $0 < a < 1$ B. $1 < a < \frac{\pi}{2}$ C. $\frac{2}{\pi} < a < \frac{\pi}{2}$ D. 以上答案都不对

3. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1-x^2}{1+x^2}$ 的取值范围是_____。

- A. $(-2, 1]$ B. $(-2, \frac{9}{8}]$ C. $(-2, \frac{9}{8})$ D. 以上答案都不对

4. 四面体 $P-ABC$ 的底面是边长为 2 的正三角形 ABC , PC 垂直于面 ABC , $PC = 1$. M, N 分别为 AB, BC 的中点, 则异面直线 PN, CM 的夹角的正弦值为_____。

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{4}$ D. 以上答案都不对

5. 已知函数 $f(x)$ 满足对任意的 $x \neq 0$ 或 1, 均有 $f(x) + f(\frac{1}{1-x}) = x$. 求 $f(2)$.

6. 已知点 $A(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 关于直线 $y = kx$ 的对称点 A' 落在圆 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 上, 则 k 的值为_____。

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. 1 D. 以上答案都不对

7. 已知 x, y, z 均为正实数。则 $f(x, y, z) = \frac{xyz}{(1+4x)(9x+y)(4y+z)(9z+1)}$ 的最大值为_____。

- A. $\frac{1}{576}$ B. $\frac{1}{1024}$ C. $\frac{1}{1296}$ D. 以上答案都不对

8. 已知 a, b, z 均为复数, 对任意的 $|z| = 1$, 均有 $|z^4 + az^2 + b| = 1$. 则 ab 的值为_____。

- A. i B. $-i$ C. 1 D. 以上答案都不对

9. 从 6 名男员工和 4 名女员工中各抽取 2 人, 组成羽毛球混合双比赛。则一共有_____种排列方式。

- A. 60 B. 90 C. 180 D. 以上答案都不对

10. 满足 $(y^2 + 4x^2 - 1)(x^2 + 4y^2 - 4) \leq 0$ 的所有点 (x, y) 组成的平面图形的面积为_____。

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. $\frac{3\pi}{2}$ D. 以上答案都不对

11. 满足 $n^3 + 2n^2 + 8n - 5 = a^3$ 的自然数组 (n, a) 的对数是_____。

- A. 0 B. 1 C. 3 D. 以上答案都不对

12. 已知复数 $|z_1 - 3i| = 2, |z_2 - 8| = 1$, 则 $z_1 - z_2$ 围成的图形面积为_____。
A. 8π B. 9π C. 10π D. 以上答案都不对
13. 已知 a, b, c 为实数, 正实数 x, y, z 满足 $x + y + z = 1$, 则 $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z}$ 的最小值为_____。
A. $3(a^2 + b^2 + c^2)$ B. $(a + b + c)^2$
C. $a^2 + b^2 + c^2$ D. 以上答案都不对
14. 当 $x \in (0, 1)$ 时, 比较 $\frac{\tan x}{x}, \frac{\tan^2 x}{x^2}, \frac{\tan x^2}{x^2}$ 的大小。
15. 已知 $x_i = 1$ 或 $-1, i = 0, 1, 2, \dots, 2019$, 且 $\sum_{i=0}^{2019} 2^i x_i = 2019$, 则 $\sum_{i=0}^{2019} x_i$ 的值为_____。
A. -2002 B. -2001 C. -2000 D. 以上答案都不对
16. 方程 $x^3 - [x] = 3$ 的解的个数为_____。
A. 0 B. 1 C. 2 D. 以上答案都不对
17. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ 的末位数字不可能为_____。
A. 2 B. 4 C. 6 D. 以上答案都不对
18. 平面四边形 $ABCD$ 中, $AB = BC = AC, \angle DAC = 10^\circ, \angle DCA = 20^\circ$. 则 $\angle BDC =$ _____。
A. 60° B. 70° C. 75° D. 以上答案都不对
19. 已知 $a > b > 0, a^3 - b^3 = a^2 - b^2$, 则 $a + b$ 的范围是_____。
A. $(0, \frac{4}{3})$ B. $(0, 1]$ C. $(0, \frac{4}{3}]$ D. 以上答案都不对
20. $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + 4 \times 4! + \dots + 672 \times 672!$ 被 2019 除的余数是_____。
A. 1 B. 2017 C. 2018 D. 以上答案都不对