

1号卷 · A10联盟2021年高考最后一卷

理科数学参考答案

一、选择题(本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	B	C	D	B	C	A	D	B	A	D

1. C $\because z = \frac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3+i}{2}, \therefore z^2 = \frac{4+3i}{2}, \therefore |z^2| = \frac{5}{2}$. 故选 C.

2. B 由题意得, $B = \{x | x \geq 1\}$, 若 $A \cup B = \mathbf{R}$, 则 $a \geq 1$, 故选 B.

3. B 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 显然 $q \neq 1$. $\because S_4 = a_5 - 1$, 则 $\frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = a_1q^4 - 1$,
即 $\frac{q^4-1}{q-1} = q^4 - 1$, 又 $q > 0$, 得 $q-1=1$, 即 $q=2$, $\therefore a_6 = a_1q^5 = 32$, 故选 B.

4. C $y' = 2x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{2}$, 即直线 l 的斜率 $k \geq 2\sqrt{2}$, 故直线 $y = \sqrt{2}x - 1$ 不可能与 l 平行. 故选 C.

5. D 易知 $f(x) = x + \ln|x|$ 是非奇非偶函数, 所以排除选项 A, C. 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x + \ln x$ 单调递增, 所以排除选项 B. 故选 D.

6. B 由题意得, MN 的最小值为平面 A_1BD 到平面 B_1CD_1 的距离. $\because$ 正方体

$$ABCD - A_1B_1C_1D_1 \text{ 的体积为 } 64, \text{ 易得 } AC_1 = 4\sqrt{3}, \text{ 则 } MN_{\min} = \frac{1}{3}AC_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

故选 B.

7. C 由图(1)可知, 2020年下半年生产资料出厂价格环比涨幅先下降后上升, 故①错误; 由图(2)中的环比折线可知, 生活资料出厂价格的环比涨跌幅后一个月与前一个月的差介于 $-0.2\% \sim 0.4\%$ 之间, 由于 2021年1月环比的涨幅为 0.2% , 故可以预测在市场平稳的前提下, 2021年2月生活资料出厂价格的环比可能为正数, 故②正确; 从 2020年1月~12月生活资料出厂价格同比的数据中随机抽取 3 个, 恰有 2 个是正数的概率 $P = \frac{C_8^2 C_4^1}{C_{12}^3} = \frac{28}{55}$, 故③正确; 将 2020年1月~2021年1月生产资料出厂价格的环比涨跌幅从小到大排列后, 所得的中位数为 0.2% , 故④正确. 故选 C.

8. A $\because a = 0.3^{-\log_{0.3} e} = \frac{1}{e} < \frac{1}{2}, b = \log_3 2 > \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}, \therefore a < b; \because b = \log_3 2 = \frac{\lg 2}{\lg 3},$

$$c = \frac{\lg 20}{\lg 30} = \frac{1 + \lg 2}{1 + \lg 3}, \therefore c - b = \frac{1 + \lg 2}{1 + \lg 3} - \frac{\lg 2}{\lg 3} = \frac{\lg 3 - \lg 2}{\lg 3(1 + \lg 3)} > 0, \therefore b < c,$$

$\therefore a < b < c$, 故选 A.

9. D $\because f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \left|\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\right| + \left|\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\right| = |\cos 2x| + |\sin 2x| = f(x), \therefore \frac{\pi}{4}$ 是

$f(x)$ 的一个周期, 故 A 错误; 要使 $f(x) = 2$, 即 $|\sin 2x| + |\cos 2x| = 2$, 即

$$|\sin 2x| = |\cos 2x| = 1, \text{ 显然不成立, 故 B 错误; 当 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ 时,}$$

$$f(x) = \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right), \frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}, \therefore f(x) \text{ 在 } \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

上先增后减, 故 C 错误; $\because f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right| + \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right| = |\cos 2x| + |\sin 2x| = f(x)$, 故 D 正确. 故选 D.

10. B 令 $x = 0$, 则 $2f(0) + 0 > 0, \therefore f(0) > 0$, 则 D 错误; 令 $g(x) = x^2 f(x)$, 则

$$g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x), \text{ 当 } x > 0 \text{ 时, } \because 2f(x) + xf'(x) > x^2,$$

$$\therefore 2xf(x) + x^2 f'(x) > x^3 > 0, \text{ 则 } g(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增, } \therefore g(5) > g(1),$$

$$\text{即 } 25f(5) > f(1) = f(-1), \text{ 故 B 正确, C 错误; } \because f(x) \text{ 是偶函数, } \therefore g(x) \text{ 也是}$$

$$\text{偶函数, } \therefore g(x) \text{ 在 } (-\infty, 0) \text{ 上单调递减, } \therefore g(-2) > g(-1), \text{ 即 } 4f(-2) > f(-1),$$

故 A 错误. 故选 B.

11. A 当 $x = c$ 时, $\frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 解得 $y = \pm \frac{b^2}{a}$, 不妨设点 A 在第一象限, 则 $A\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$.

$$\text{由 } \angle F_1 AB \text{ 是钝角, 可得 } \overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AB} < 0, \text{ 即 } -2c^2 + \frac{b^4}{a^2} < 0, \therefore b^2 < \sqrt{2}ac,$$

$$\therefore c^2 - a^2 < \sqrt{2}ac, \text{ 整理得 } e^2 - \sqrt{2}e - 1 < 0, \therefore 1 < e < \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}. \text{ 故选 A.}$$

12. D $\because a_{n+1}(a_{n+1} - 1) = a_n(a_n + 1), \therefore a_{n+1}^2 - a_n^2 = a_{n+1} + a_n$, 即

$$(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) = a_{n+1} + a_n, \because a_n > 0, \therefore a_{n+1} + a_n > 0, \therefore a_{n+1} - a_n = 1,$$

$$\therefore a_1 = 1, \therefore \text{数列 } \{a_n\} \text{ 是首项为 1、公差为 1 的等差数列, } \therefore a_n = n,$$

$$\therefore S_n = \frac{n(1+n)}{2}, \therefore \frac{(n+1)^2}{2S_n} = \frac{(n+1)^2}{n(1+n)} = \frac{n+1}{n},$$

$$\therefore b_n = \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{2S_n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{n} \right\rfloor = \begin{cases} 2, n=1 \\ 1, n \geq 2 \end{cases},$$

$$\therefore T_{2021} = 2 + \underbrace{1+1+\cdots+1}_{2020 \text{ 个}} = 2 + 2020 = 2022. \text{ 故选 D.}$$

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

13. $-\frac{4}{5}$

由题意得， $\mathbf{ka} - \mathbf{b} = (k-2, -2k-3)$ ，又 $(\mathbf{ka} - \mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$ ，则 $k-2+2(2k+3)=0$ ，解得 $k = -\frac{4}{5}$.

14. -25

展开式中常数项为 $x^2 \cdot C_6^4 x^2 \left(-\frac{1}{x}\right)^4 + 2C_6^3 x^3 \left(-\frac{1}{x}\right)^3 = -25$.

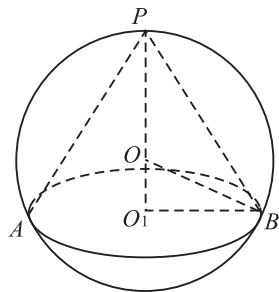
15. 3π

设 $O_1B = r$ ，球 O 的半径为 R ，则 $PB = 3r$ ，由球 O 的表

面积为 $4\pi R^2 = \frac{81\pi}{8}$ ，得 $R^2 = \frac{81}{32}$. 在 $\text{Rt}\triangle OO_1B$ 中，

$$R^2 = (PO_1 - R)^2 + r^2, \text{ 即 } R^2 = (2\sqrt{2}r - R)^2 + r^2,$$

解得 $r = 1$ ，故圆锥 PO_1 的侧面积为 $\pi r \cdot PB = 3\pi$.



16. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

点 $A(-4,0)$ 在抛物线 C 的准线 $x = -4$ 上，设点 P 在准线上的射影为 Q ，则

$\frac{|PF|}{|PA|} = \frac{|PQ|}{|PA|} = \sin \angle PAQ$ ，当直线 AP 与抛物线 C 相切时 $\angle PAQ$ 最小， $\sin \angle PAQ$ 也

最小. 设 PA 的方程为 $y = k(x+4)$ ，与 $y^2 = 16x$ 联立得 $k^2x^2 + (8k^2 - 16)x + 16k^2 =$

$$0, \text{ 由 } \Delta = (8k^2 - 16)^2 - 64k^4 = 0 \text{ 得 } k = \pm 1, \text{ 当 } k = \pm 1 \text{ 时, } \sin \angle PAQ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分 12 分）

（I）由题意得， $(\sin B + \sin C)^2 = \sin^2 A + 3\sin B \sin C$ ，

$$\therefore \sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 A + \sin B \sin C, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{由正弦定理可得 } b^2 + c^2 = a^2 + bc, \therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{又 } A \in (0, \pi), \therefore A = \frac{\pi}{3}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

（II）由 $a = \sqrt{6}$ ， $A = \frac{\pi}{3}$ 及正弦定理得 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = 2\sqrt{2}$ ，

$$\therefore b = 2\sqrt{2} \sin B, c = 2\sqrt{2} \sin C = 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right), \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore a+b+c=\sqrt{6}+2\sqrt{2}\sin B+2\sqrt{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)=2\sqrt{6}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{6}.\cdots 10 \text{ 分}$$

$$\text{由 } 0 < B < \frac{2\pi}{3} \text{ 得, } \frac{\pi}{6} < B + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6},$$

$$\therefore \text{当 } B + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } B = \frac{\pi}{3} \text{ 时, } (a+b+c)_{\max} = 3\sqrt{6}.\cdots\cdots 12 \text{ 分}$$

18. (本小题满分 12 分)

(I) 证明: 取 BC 中点 M , 连接 SM, AM ,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形且 $\angle CAD = 60^\circ$, $\therefore AM \perp BC$,

$\because SB = SC$, $\therefore SM \perp BC$. $\cdots\cdots 2 \text{ 分}$

又 $AM \cap SM = M$, $\therefore BC \perp$ 平面 SAM ,

$\because SA \subset$ 平面 SAM , $\therefore SA \perp BC$.

同理可证 $SA \perp DC$, $\because DC \cap BC = C$, $\therefore SA \perp$ 平面 $ABCD$. $\cdots\cdots 4 \text{ 分}$

又 $BD \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore SA \perp BD$. $\cdots\cdots 5 \text{ 分}$

(II) 取 CD 的中点 F , 以 A 为坐标原点, 直线 AF, AB, AS 分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系 $Axyz$.

不妨设 $AB = 2$, $\because SA \perp$ 平面 $ABCD$, $\therefore SA \perp AB$,

又 $\angle SBA = 45^\circ$, $\therefore SA = AB = 2$,

则 $A(0,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(\sqrt{3},1,0)$, $D(\sqrt{3},-1,0)$, $E(0,1,1)$,

$\therefore \overrightarrow{AC} = (\sqrt{3},1,0)$, $\overrightarrow{AE} = (0,1,1)$. $\cdots\cdots 8 \text{ 分}$

易得平面 SAC 的一个法向量为 $\overrightarrow{BD} = (\sqrt{3},-3,0)$, $\cdots\cdots 9 \text{ 分}$

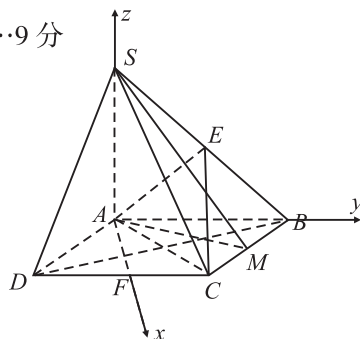
设平面 AEC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x,y,z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{AC} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \overrightarrow{AE} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \sqrt{3}x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases},$$

取 $y = 1$, 则 $\mathbf{n} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, -1\right)$. $\cdots\cdots 10 \text{ 分}$

由图可知, 二面角 $S-AC-E$ 为锐角,

$$\text{故二面角 } S-AC-E \text{ 的余弦值为 } |\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{BD} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BD}|}{|\mathbf{n}| \cdot |\overrightarrow{BD}|} = \frac{2\sqrt{7}}{7}. \cdots\cdots 12 \text{ 分}$$



19. (本小题满分 12 分)

(I) 这 100 人中“不满意”的人数为 $100 \times [1 - (0.02 + 0.04 + 0.02) \times 10] = 20$. $\cdots\cdots 2 \text{ 分}$

由频率分布直方图易得, 食堂得分的中位数为 $70 + \frac{0.5-0.4}{0.04} = 72.5$. $\cdots\cdots 4 \text{ 分}$

(II) (i) 若按满意度采用分层抽样的方法, 从这 100 名学生中抽取 15 人,

则“不满意”与“基本满意”的学生应抽取 $100 \times 0.8 \times \frac{3}{20} = 12$ (人),

“非常满意”的学生应抽取 $100 \times 0.2 \times \frac{3}{20} = 3$ (人),6分

$\therefore X$ 的取值为 0, 1, 2, 3,

$$P(X=0) = \frac{C_{12}^3}{C_{15}^3} = \frac{44}{91}, \quad P(X=1) = \frac{C_{12}^2 C_3^1}{C_{15}^3} = \frac{198}{455},$$

$$P(X=2) = \frac{C_{12}^1 C_3^2}{C_{15}^3} = \frac{36}{455}, \quad P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_{15}^3} = \frac{1}{455},$$

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{44}{91}$	$\frac{198}{455}$	$\frac{36}{455}$	$\frac{1}{455}$

.....9分

(ii) 由(i)得 $E(X) = 1 \times \frac{198}{455} + 2 \times \frac{36}{455} + 3 \times \frac{1}{455} = \frac{3}{5},$

则3人获得的现金总额 $Y = 200X + 100(3 - X) = 100X + 300,$

$$\therefore E(Y) = E(100X + 300) = 100E(X) + 300 = 360 \text{ (元)},$$

即3人获得的现金总额估计为360元.12分

20. (本小题满分12分)

(I) 由题意得, $2a = 4\sqrt{2}$, 则 $a = 2\sqrt{2}$, $\therefore N(2\sqrt{2}, 0).$

设 $P(x_0, y_0)$, 则 $\frac{0 + x_0 + 2\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$, $\therefore x_0 = \sqrt{2}$,2分

$$\therefore \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times |y_0| = \sqrt{6}, \quad \therefore |y_0| = \sqrt{3}, \quad \therefore \frac{2}{8} + \frac{3}{b^2} = 1, \quad \therefore b = 2,$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1. \text{5分}$$

(II) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2),$

$$\text{由余弦定理得, } |OM|^2 = |OA|^2 + |AM|^2 - 2|OA| \cdot |AM| \cdot \cos \angle OAM,$$

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA| \cdot |OB| \cdot \cos \angle AOB,$$

$$\text{两式相加得, } |OM|^2 + |AB|^2 = 2(|OA|^2 + |OB|^2). \text{8分}$$

$$\therefore k_{OA} \cdot k_{OB} = -\frac{1}{2}, \quad \therefore \frac{y_1 \cdot y_2}{x_1 \cdot x_2} = -\frac{1}{2}, \quad \therefore x_1 x_2 = -2y_1 y_2. \text{9分}$$

$$\therefore \text{点 } A, B \text{ 在椭圆 } C \text{ 上, } \therefore \frac{x_1^2}{8} + \frac{y_1^2}{4} = 1, \quad \frac{x_2^2}{8} + \frac{y_2^2}{4} = 1,$$

$$\therefore x_1^2 - 8 = -2y_1^2, \quad x_2^2 - 8 = -2y_2^2, \quad \therefore \begin{cases} (x_1^2 - 8)(x_2^2 - 8) = 4y_1^2 y_2^2 \\ (x_1^2 - 8) + (x_2^2 - 8) = -2(y_1^2 + y_2^2) \end{cases}, \quad (*)$$

$$\text{将 } x_1 x_2 = -2y_1 y_2 \text{ 代入 } (*) \text{ 式, 得 } \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 8 \\ y_1^2 + y_2^2 = 4 \end{cases},$$

$$\therefore |OM|^2 + |AB|^2 = 2(|OA|^2 + |OB|^2) = 2(x_2^2 + x_1^2 + y_1^2 + y_2^2) = 24,$$

$$\therefore |OM|^2 + |AB|^2 \text{ 是定值, 定值为 } 24. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. (本小题满分 12 分)

(I) 解法一: 由题意得, $f'(x) = e^x + \cos x$,

当 $x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ 时, 易得函数 $f'(x)$ 单调递增,

$$\text{而 } f'(-\pi) = e^{-\pi} - 1 < 0, \quad f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}} > 0,$$

故 $\exists x_0 \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$, $f'(x_0) = 0$, 当 $x \in [-\pi, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $x \in \left(x_0, -\frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f'(x) > 0$, 而 $f(-\pi) = e^{-\pi} - 1 < 0$, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}} - 2 < 0$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ 上无零点; $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

当 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f'(x) = e^x + \cos x > 0$, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增,

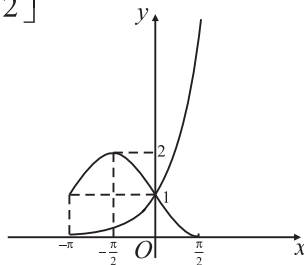
而 $f(0) = 0$, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上有 1 个零点.

综上所述, 函数 $f(x)$ 在 $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$ 上有 1 个零点. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

解法二: 由 $f(x) = 0$, 得 $e^x + \sin x - 1 = 0$, 则 $e^x = 1 - \sin x$.

在同一直角坐标系中, 作出 $y_1 = e^x$ 和 $y_2 = 1 - \sin x$ 的图象, $x \in \left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$,

由图象易知函数 $f(x)$ 在 $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$ 上只有一个零点. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$



(II) 令 $g(x) = f(x) + mx = e^x + \sin x + mx - 1$, $x \in [0, +\infty)$, 则 $g'(x) = e^x + \cos x + m$.

$\because g(0) = e^0 + \sin 0 + 0 \times m - 1 = 0$, $g'(0) = e^0 + \cos 0 + m = 2 + m$8 分

令 $h(x) = g'(x) = e^x + \cos x + m$, $\therefore h'(x) = e^x - \sin x > 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立,

则 $h(x)$ 为增函数, 即 $g'(x)$ 为增函数,

① 当 $m + 2 \geq 0$, 即 $m \geq -2$ 时, $g'(x) \geq g'(0) = 2 + m \geq 0$, $\therefore g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为增函数, $\therefore g(x) \geq g(0) = 0$, 即 $g(x) \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立;10 分

② 当 $m + 2 < 0$, 即 $m < -2$ 时, $g'(0) = 2 + m < 0$, $\therefore \exists x_0 \in (0, +\infty)$, 使 $g'(x_0) = 0$,

当 $x \in (x_0, +\infty)$, $g'(x_0) > 0$, $g(x)$ 为增函数;

当 $x \in [0, x_0)$, $g'(x_0) < 0$, $g(x)$ 为减函数,

$\therefore g(x_0) < g(0) = 0$, 与 $g(x) \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立相矛盾, $\therefore m < -2$ 不成立.

综上所述, 实数 m 的取值范围是 $[-2, +\infty)$12 分

请考生从第 22、23 题中任选一题作答. 注意: 只能做选定的题目, 如果多做, 则按所做的第一题记分, 解答时请写清题号.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

(I) $\because$ 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho(1 - \cos \theta) = 2$, $\therefore \rho^2 = (\rho \cos \theta + 2)^2$,

将 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ 代入, 得 $y^2 = 4(x + 1)$,

$\therefore$ 曲线 C 的直角坐标方程为 $y^2 = 4(x + 1)$3 分

由题意得, 直线 l 的普通方程为 $y = \sqrt{3}x$5 分

(II) 解法一: 直线 l 的方程为 $\sqrt{3}x - y = 0$, $\therefore$ 直线 l 分成两条射线,

其极坐标方程分别为 $\theta = \frac{\pi}{3} (\rho \geq 0)$ 或 $\theta = \frac{4\pi}{3} (\rho \geq 0)$6 分

$$\text{联立} \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{3} \\ \rho(1 - \cos \theta) - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} \theta = \frac{4\pi}{3} \\ \rho(1 - \cos \theta) - 2 = 0 \end{cases},$$

分别解得 $\rho = 4$ 和 $\rho = \frac{4}{3}$, $\therefore |MN| = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$8 分

而 $A\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ 到 $\theta = \frac{\pi}{3} (\rho \in \mathbf{R})$ 的距离为 $2 \times \sin \frac{\pi}{6} = 1$,

$\therefore \triangle AMN$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times \frac{16}{3} \times 1 = \frac{8}{3}$10 分

解法二: 联立 $\begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ y^2 = 4(x + 1) \end{cases}$, 整理得 $3x^2 - 4x - 4 = 0$,6 分

设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{4}{3}$, $x_1 x_2 = -\frac{4}{3}$,

$$\therefore |MN| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \frac{16}{3}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

又点 $A(\sqrt{3}, 1)$ 到直线 l 的距离 $d = 1$,

$$\therefore S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} \times \frac{16}{3} \times 1 = \frac{8}{3}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

$$(I) \text{ 由题意得, } f(x) = |x-1| - 2|x-2| = \begin{cases} x-3, & x < 1 \\ 3x-5, & 1 \leq x \leq 2 \\ -x+3, & x > 2 \end{cases}, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$\therefore$ 当 $x \in (-\infty, 2]$ 时, $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f(x)$ 单调递减,

$$\therefore f(x)_{\max} = f(2) = 1, \therefore t = 1. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(II) 由 (I) 得, $2a + b + 2c = 3$, $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$\text{由柯西不等式得, } (a^2 + b^2 + c^2)(2^2 + 1^2 + 2^2) \geq (2a + b + 2c)^2,$$

当且仅当 $\frac{a}{2} = b = \frac{c}{2}$ 时取等号,

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 \geq 1, \text{ 即 } a^2 + b^2 + c^2 \geq t. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$