

1号卷·A10联盟2021届高三摸底考

数学(理科)参考答案

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	D	B	C	D	A	D	C	C	B	A

1. B 由题意得, $A = \{x | 0 < x < 6\}$, $\therefore A \cup B = (0, +\infty)$. 故选 B.

2. A 由题意得, $\frac{m-3i}{3+5i} = \frac{(m-3i)(3-5i)}{(3+5i)(3-5i)} = \frac{3m-15}{34} - \frac{9+5m}{34}i$, $\therefore \begin{cases} \frac{3m-15}{34} = 0 \\ \frac{9+5m}{34} \neq 0 \end{cases}$,

$\therefore m = 5$. 故选 A.

3. D 若 $m \parallel n$, 且 $m \subset \alpha$, 则不能推出 $m \parallel \alpha$; 反之, 若 $m \parallel \alpha$, $n \subset \alpha$, 直线 m, n 平行或异面, 故 “ $m \parallel n$ ” 是 “ $m \parallel \alpha$ ” 的既不充分也不必要条件. 故选 D.

4. B 由雷达图得, 甲同学物理、历史、地理科目的分数高于年级平均分, 生物科目的分数等于年级平均分, 但物理、历史中只能选择 1 科为考试科目, 甲同学物理比历史更有优势, 则甲同学较为理想的选科为物理+生物+地理. 故选 B.

5. C $\because \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AM} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{4}\overrightarrow{MC}$, 即 $\frac{3}{4}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{MC} = \mathbf{0}$,
 $\therefore \frac{|\overrightarrow{MB}|}{|\overrightarrow{MC}|} = \frac{1}{3}$. 故选 C.

6. D 由题意得, $\sin \theta = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos \theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, 则 $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta = -\frac{3}{5}$,
 $\therefore \cos\left(2\theta - \frac{3\pi}{2}\right) = -\sin 2\theta = \frac{3}{5}$. 故选 D.

7. A $\because f(-x) = \frac{(-x) \cdot \sin(-x)}{3} - \frac{|-x|}{6} = f(x)$, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 为偶函数, 则其图象关于 y 轴对称, 排除 D; $f(\pi) = -\frac{\pi}{6} < 0$, 排除 C; $\because f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{36}\left(\sin \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\right) < 0$, 排除 B. 故选 A.

8. D 设圆 $C: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, 则
$$\begin{cases} 34 + 5D + 3E + F = 0 \\ 8 - 2D + 2E + F = 0 \\ 26 - D - 5E + F = 0 \end{cases}$$
, 解得 $D = -4$,

$E = 2$, $F = -20$, $\therefore$ 圆 C 的标准方程为 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$, $\therefore$ 圆心到直线 l 的距离 $d = \frac{|3 \times 2 + 4 \times (-1) + 8|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2 < 5$. 故选 D.

9. C $\because f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且 $0 < \varphi < 2\pi$, $\therefore \varphi = \pi$,

$\therefore f(x) = -2\sin \omega x$. $\because f\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = f\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, $\therefore f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对

称, $\therefore \frac{\omega\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, $\therefore \omega = 2 + 4k (k \in \mathbf{Z})$, $\because \omega > 0$, $\therefore \omega$ 的最小值为 2,

$\therefore$ 当 $\omega = 2$ 时, $f(x) = -2\sin 2x$, $\therefore f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$ 上单调递

减. $\because f(x)$ 在区间 $[-m, m]$ 上是单调函数, $\therefore 0 < m \leq \frac{\pi}{4}$, 则 m 的最大值为 $\frac{\pi}{4}$. 故
选 C.

10. C $\because \cos\left(B + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $\therefore 2\sin C \left(\frac{1}{2}\sin B + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right) = \sqrt{3}\sin A$,

$$\therefore \sin B \sin C + \sqrt{3} \cos B \sin C = \sqrt{3} \sin A = \sqrt{3} (\sin B \cos C + \cos B \sin C),$$

$$\therefore \sin B \sin C = \sqrt{3} \sin B \cos C, \text{ 又 } \sin B \neq 0, \therefore \sin C = \sqrt{3} \cos C, \therefore \tan C = \sqrt{3},$$

$$\text{又 } C \in (0, \pi), \therefore C = \frac{\pi}{3}. \because \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = ab \cos C = 20, \therefore ab = 40, \text{ 则}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}. \text{ 故选 C.}$$

11. B 不妨设点 $M(x, y)$ 在第一象限, 联立
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases}$$
, 得 $x^2 = \frac{9a^2b^2}{9b^2 - 16a^2}$, 则

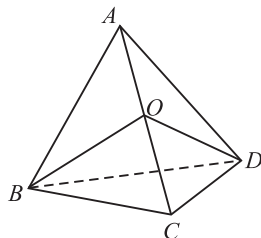
$$y^2 = \frac{16a^2b^2}{9b^2 - 16a^2}. \text{ 又 } |MN| = |F_1F_2|, \therefore x^2 + y^2 = c^2, \text{ 则}$$

$$\frac{9a^2b^2}{9b^2 - 16a^2} + \frac{16a^2b^2}{9b^2 - 16a^2} = c^2, \text{ 整理得 } 9b^4 - 32a^2b^2 - 16a^4 = 0, \text{ 即}$$

$$9\left(\frac{b}{a}\right)^4 - 32\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 16 = 0, \text{ 解得 } \frac{b^2}{a^2} = 4, \text{ 即 } \frac{b}{a} = 2, \therefore \text{双曲线 } C \text{ 的渐近线方程}$$

为 $y = \pm 2x$. 故选 B.

12. A 由题意可得, $\triangle ABC \cong \triangle ADC$, $\therefore AD \perp CD$. 取 AC 中点 O , 连接 OB, OD , 则 $OA = OB = OC = OD = \frac{1}{2}AC$, 故 O 为三棱锥 $A-BCD$ 外接球的球心. 又球 O 的体积为 $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$, 故 $\frac{4\pi}{3} \times OA^3 = \frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$, 解得 $OA = \sqrt{2}$, $\therefore AC = 2\sqrt{2}$, $\therefore BA^2 + BC^2 = 8$, $\therefore BA + BC \leq \sqrt{2(BA^2 + BC^2)} = 4$ (当且仅当 $BA = BC = 2$ 时取等号), 故 $BA + AC + CD = BA + BC + AC \leq 4 + 2\sqrt{2}$. 故选 A.



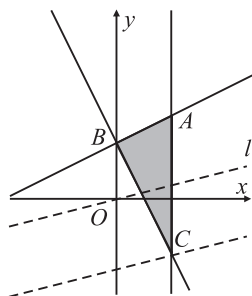
二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.)

13. 10

作出不等式组所表示的平面区域如图阴影部分所示, 其中

$A(2,3)$, $B(0,2)$, $C(2,-2)$, 作直线 $l: y = \frac{1}{4}x$, 平移直线

l , 当其经过点 C , z 取得最大值, 即 $z_{\max} = 2 - 4 \times (-2) = 10$.



14. 50

由题意得, x^5 的系数为 $2 \times C_6^2 \times (-1)^2 - 1 \times C_6^3 \times (-1)^3 = 30 + 20 = 50$.

15. $\frac{9}{2}$

当 $0 < 2p < 3$ 时, 画图可知不满足题意; 当 $2p > 3$ 时, 由 $S_{\triangle PQN} = 2S_{\triangle PQO}$, 得

$\frac{|MN|}{|MO|} = 2$, $\therefore y_M = \frac{1}{3}y_N$, 设直线 l 的方程为 $y = kx$, 分别代入 $y^2 = 3x$, $y^2 = 2px$

中, 解得 $y_M = \frac{3}{k}$, $y_N = \frac{2p}{k}$, 代入 $y_M = \frac{1}{3}y_N$ 中, 解得 $p = \frac{9}{2}$.

16. $\left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, e-1\right)$

令 $t = |f(x)|$, 故 $2t^2 - (2m+7)t + 5(m+1) = 0$, 解得 $t_1 = \frac{5}{2}$, $t_2 = m+1$, 观察函数

$y = |f(x)|$ 的图象知, 方程 $2t^2 - (2m+7)t + 5(m+1) = 0$ 在 $(2, e)$ 上有两个不同的实

数根, $\therefore \begin{cases} 2 < m+1 < e \\ m+1 \neq \frac{5}{2} \end{cases}$, 解得 $m \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, e-1\right)$.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

(I) 若 p 为真，则 $\begin{cases} 2(a+1)-1 > 0 \\ 3(a+1)-1 > 0 \end{cases}$ ，解得 $a > -\frac{1}{2}$. ……2 分

若 q 为真，则 $\Delta = a^2 - 4 > 0$ ，解得 $a < -2$ 或 $a > 2$ ；

$\therefore p \wedge q$ 是真命题， $\therefore p, q$ 同真， $\therefore a > 2$ ，即 a 的取值范围为 $(2, +\infty)$. ……5 分

(II) $\therefore p \wedge (\neg q)$ 为假， $p \vee (\neg q)$ 为真， $\therefore p, \neg q$ 一真一假， $\therefore p, q$ 同真或同假. ……6 分
当 p, q 同真时，由 (I) 知， $a > 2$ ；

当 p, q 同假时，则 $\begin{cases} a \leq -\frac{1}{2} \\ -2 \leq a \leq 2 \end{cases}$ ， $\therefore -2 \leq a \leq -\frac{1}{2}$ ，……9 分

综上所述， $-2 \leq a \leq -\frac{1}{2}$ 或 $a > 2$ ，即 a 的取值范围是 $\left[-2, -\frac{1}{2}\right] \cup (2, +\infty)$. 10 分

18. (本小题满分 12 分)

(I) 由题意得， $x^2 - 14x + 13 = 0$ 的两根分别为 $x = 1$ 或 $x = 13$ ，

$\therefore a_2 = 1, a_5 = 13$ 或 $a_2 = 13, a_5 = 1$. ……2 分

当 $a_2 = 1, a_5 = 13$ 时，则公差 $d = \frac{a_5 - a_2}{5 - 2} = 4$ ， $\therefore a_1 = a_2 - d = -3$ ，

$\therefore a_n = 4n - 7$ ；……4 分

当 $a_2 = 13, a_5 = 1$ 时，则公差 $d = \frac{a_5 - a_2}{5 - 2} = -4$ ， $\therefore a_1 = a_2 - d = 17$ ，

$\therefore a_n = 21 - 4n$. ……6 分

(II) $\therefore a_{n+1} > a_n$ ， $\therefore 3^n \cdot a_n = (4n - 7) \cdot 3^n$ ，……7 分

则 $S_n = -3 \times 3^1 + 1 \times 3^2 + 5 \times 3^3 + \cdots + (4n - 7) \cdot 3^n$ ，

$3S_n = -3 \times 3^2 + 1 \times 3^3 + 5 \times 3^4 + \cdots + (4n - 7) \cdot 3^{n+1}$ ，

两式相减得， $-2S_n = -21 + 4 \times 3^1 + 4 \times 3^2 + \cdots + 4 \cdot 3^n - (4n - 7) \cdot 3^{n+1}$ ，……10 分

化简可得， $S_n = \left(2n - \frac{9}{2}\right) \cdot 3^{n+1} + \frac{27}{2}$. ……12 分

19. (本小题满分 12 分)

(I) 证明：过点 S 作 $SO \perp AD$ ，垂足为 O ，连接 OB, OC 。

$\therefore$ 平面 $SAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $SAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$ ，

$\therefore SO \perp$ 平面 $ABCD$ ， $\therefore SO \perp BD$. ……2 分

$\therefore \triangle SDA$ 是等边三角形， $\therefore OD = \frac{1}{2} AD = BC = DC$ ，

又 $OD \parallel BC$ ， $\angle BCD = 90^\circ$ ， $\therefore$ 四边形 $OBCD$ 是正方形， $\therefore BD \perp OC$ 。

又 $OC \cap SO = O$, $\therefore BD \perp$ 平面 SOC , $\therefore BD \perp SC$5 分

(II) 由 (I) 知, OS , OA , OB 两两垂直, 以 O 为坐标原点, 分别以 OA , OB , OS 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$.

不妨设 $BC = 1$, 则 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(-1, 1, 0)$, $S(0, 0, \sqrt{3})$,

$$M\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \therefore \overrightarrow{BM} = \left(\frac{2}{3}, -1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \overrightarrow{BC} = (-1, 0, 0). \text{7 分}$$

$$\text{设平面 } MBC \text{ 的法向量为 } \mathbf{m} = (x, y, z), \text{ 则 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \frac{2}{3}x - y + \frac{\sqrt{3}}{3}z = 0 \\ -x = 0 \end{cases},$$

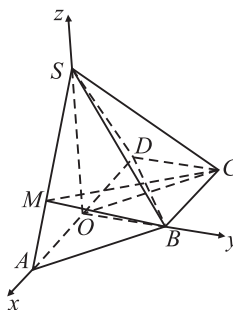
$$\text{令 } z = 1, \text{ 得 } \mathbf{m} = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right),$$

易知平面 BCD 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$, 10 分

$$\therefore \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

由图可知, 二面角 $M-BC-D$ 为锐角,

$\therefore$ 二面角 $M-BC-D$ 的大小为 30°12 分



20. (本小题满分 12 分)

(I) 由题意得, $0.05 + 0.1 + 0.15 + 0.3 + 10a + 0.15 + 0.05 = 1$,

解得 $a = 0.020$3 分

(II) 由题意得, 尺寸在 $[40, 50)$ 和 $[70, 80)$ 内的零件应分别抽取 4 个和 8 个.

则至少有 2 个零件的尺寸在 $[40, 50)$ 内的概率 $P = \frac{C_4^2 C_8^1}{C_{12}^3} + \frac{C_4^3}{C_{12}^3} = \frac{13}{55}$7 分

(III) 由题意得, $X \sim B\left(4, \frac{2}{5}\right)$,8 分

$$\text{则 } P(X=0) = \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625}, P(X=1) = C_4^1 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{216}{625},$$

$$P(X=2) = C_4^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{216}{625}, P(X=3) = C_4^3 \left(\frac{3}{5}\right) \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{96}{625},$$

$$P(X=4) = \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625},$$

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{81}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$

.....10 分

$$\therefore E(X) = 4 \times \frac{2}{5} = \frac{8}{5}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. (本小题满分 12 分)

(I) 由 $n > 1$ 得, 点 N 在圆 M 内, $|QN| + |QM| = |QP| + |QM| = 2n > |MN| = 2$,

故曲线 C 是以 M, N 为焦点, $2n$ 为长轴长的椭圆, 方程为 $\frac{x^2}{n^2} + \frac{y^2}{n^2 - 1} = 1$, $\dots 3 \text{ 分}$

$\therefore \triangle QMN$ 面积有最大值为 $\sqrt{3}$, $\therefore \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{n^2 - 1} = \sqrt{3}$, 解得 $n = 2$,

故曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(II) 设直线 l 的方程为 $x = ty + 1 (t \neq 0)$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $D(x_2, -y_2)$,

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ x = ty + 1 \end{cases}$, 得 $(3t^2 + 4)y^2 + 6ty - 9 = 0$, $\Delta > 0$ 恒成立,

$\therefore y_1 + y_2 = -\frac{6t}{3t^2 + 4}, y_1 y_2 = -\frac{9}{3t^2 + 4}$. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

直线 AD 的方程为 $y - y_1 = \frac{y_1 + y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$.

令 $y = 0$, 得 $x = \frac{x_2 y_1 + x_1 y_2}{y_1 + y_2} = \frac{2ty_1 y_2}{y_1 + y_2} + 1 = \frac{-18t}{3t^2 + 4} + 1 = 4$,

故直线 AD 过定点 $(4, 0)$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

22. (本小题满分 12 分)

(I) $\therefore f(x) = \frac{\ln x}{1-x} (x > 0 \text{ 且 } x \neq 1)$,

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1-x) + \ln x}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x \ln x}{x(1-x)^2}$. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

令 $\varphi(x) = 1 - x + x \ln x$, 则 $\varphi'(x) = \ln x$,

$\therefore$ 当 $x > 1$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 故 $\varphi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore \varphi(x) > \varphi(1) = 0$,

故 $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增;

当 $0 < x < 1$ 时, $\varphi'(x) < 0$, 故 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, $\therefore \varphi(x) > \varphi(1) = 0$,

故 $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增;

综上, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, 1)$, $(1, +\infty)$; 无单调递减区间. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(II) 由 (I) 知, 函数 $f(x) = \frac{\ln x}{1-x}$ 在 $(1,2)$ 上单调递增. $\because x, y \in (1,2)$, 且 $x+y=3$,

当 $1 < x \leq \frac{3}{2}$ 时, $f(x) \leq f\left(\frac{3}{2}\right) = -2\ln\frac{3}{2}$, 而 $2x-3 \leq 0$,

$\therefore (2x-3)f(x) \geq -2(2x-3)\ln\frac{3}{2}$8 分

当 $\frac{3}{2} \leq x < 2$ 时, $f(x) \geq f\left(\frac{3}{2}\right) = -2\ln\frac{3}{2}$, 而 $2x-3 \geq 0$,

$\therefore (2x-3)f(x) \geq -2(2x-3)\ln\frac{3}{2}$,10 分

综上, 对于 $\forall x \in (1,2)$, $(2x-3)f(x) \geq -2(2x-3)\ln\frac{3}{2}$ 恒成立,

$$\begin{aligned}\therefore (2x-3)f(x) + (2y-3)f(y) &\geq -2(2x-3)\ln\frac{3}{2} - 2(2y-3)\ln\frac{3}{2} \\ &= -2(2x+2y-6)\ln\frac{3}{2} = 0,\end{aligned}$$

即不等式 $(2x-3)f(x) + (2y-3)f(y) \geq 0$ 得证.12 分