

1号卷·A10联盟2021届高三开年考

理科数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	C	A	A	D	B	C	A	B	C	B

1. A 由题意得， $B = \{x \in \mathbf{N} | (x-2)(x+4) \leq 0\} = \{0, 1, 2\}$ ， $\therefore A \cap B = \{0, 1\}$ ， $\therefore A \cap B$ 的真子集个数为 $2^2 - 1 = 3$ ，故选 A.

2. D 由题意得， $z = \frac{5+mi}{2-3i} = \frac{(5+mi)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{10-3m}{13} + \frac{15+2m}{13}i$ ，则 $\begin{cases} 10-3m=0 \\ 15+2m \neq 0 \end{cases}$ ，解得 $m = \frac{10}{3}$ ，故选 D.

3. C 该组数据的极差为 36，众数为 34，中位数为 29.5，平均数为 $30 + \frac{1}{10} \times (-13 - 7 - 5 - 4 - 3 + 2 + 4 + 4 + 19 + 23) = 32$ ，观察选项可知，故选 C.

4. A 若 $f(x) = 2x^2 - mx + \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，则 $f'(x) = 4x - m + \frac{1}{x} \geq 0$ ，即 $4x + \frac{1}{x} \geq m$ ，则 $m \leq 4$ ，故选 A.

5. A 由题意得， $\tan \alpha = 2$ ， $\therefore \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{4}{1-4} = -\frac{4}{3}$ ， $\therefore \tan\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = \frac{1 - \tan 2\alpha}{1 + \tan 2\alpha} = -7$. 故选 A.

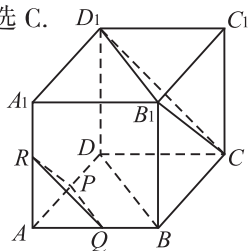
6. D $\because x = \sqrt{3} > 1$ ， $0.5 < y = 0.5^{0.3} < 0.5^0 = 1$ ， $z = \log_{0.2} 0.5 = \log_5 2 < \log_5 \sqrt{5} = 0.5$ ， $\therefore z < y < x$ ，故选 D.

7. B 由题意得， $F(0, 2)$ ， $|PQ| = |PF| = y_p + 2 = 4$ ， $\therefore y_p = 2$ ， $\therefore x_p = \pm 4$ ， $\therefore FP \perp PQ$ ， $\therefore \triangle PFQ$ 是等腰直角三角形， $\therefore \angle FQP = 45^\circ$. 故选 B.

8. C $\because$ 每个村男、女干部各 1 名， $\therefore$ 可先安排男干部，共 $A_3^3 = 6$ 种，再安排女干部，共有 $C_4^3 A_3^3 = 24$ 种， $\therefore$ 共有 $6 \times 24 = 144$ 种不同的安排方案，故选 C.

9. A 如图，过点 P 作 D_1B_1, B_1C 的平行线，分别交棱 AB, AA_1 于点 Q, R ，连接 QR, BD ，易知 $\triangle PQR$ 是等边三角形，

且为截面，则 $\frac{1}{2}PQ^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ ，解得 $PQ = 2$ ，



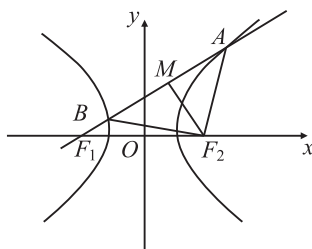
$\therefore AP = \frac{\sqrt{2}}{2} PQ = \sqrt{2}$. 故选 A.

10. B 由题意得, $f(x) = f\left(\frac{3}{2} - x\right) = -f\left(x - \frac{3}{2}\right)$, 故 $f(3+x) = -f\left(x + \frac{3}{2}\right) = f(x)$, 即函数 $f(x)$ 的周期为 3, $\therefore f(2020) = f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 \frac{3}{2} + m = \log_2 3$, 解得 $m = 1$, 故选 B.

11. C $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后得 $g(x) = 2\sin\left[\omega\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \varphi\right] = 2\sin\left(\omega x + \frac{\omega\pi}{2} + \varphi\right)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$), 由图象知 $g(x)$ 的周期 T 满足 $\frac{T}{4} = \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{6}$, $\therefore T = 4\pi$, $\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{2}$, 又 $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$, $\therefore \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$), 即 $\varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ ($k \in \mathbf{Z}$). 又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, $\therefore \varphi = \frac{\pi}{6}$, $\therefore f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$, $\therefore f(0) = 2\sin\frac{\pi}{6} = 1$. 令 $f(x) - \sqrt{3} = 0$, 则 $\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 又 $x \in [0, \pi]$, $\therefore \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$, $\therefore \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$, 即 $x = \frac{\pi}{3}$ 或 π , $\therefore y = f(x) - \sqrt{3}$ 在 $[0, \pi]$ 上有两个零点. 令 $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$), 解得 $x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$ ($k \in \mathbf{Z}$), $\therefore f(x)$ 的图象不关于直线 $x = -\frac{\pi}{6}$ 对称. 令 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$), 解得 $4k\pi + \frac{2\pi}{3} \leq x \leq 4k\pi + \frac{8\pi}{3}$ ($k \in \mathbf{Z}$), 即 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[4k\pi + \frac{2\pi}{3}, 4k\pi + \frac{8\pi}{3}\right]$, 令 $k = 0$, 得 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$ 上单调递减, 综上所述, ①②④正确, 故选 C.

12. B 不妨设 A 在 B 的右侧, 作出示意图如图, 由题意得, $|AB| = 4a$, $\angle AF_2B = 90^\circ$. 根据双曲线的定义得 $AF_1 - AF_2 = 2a$, $BF_2 - BF_1 = 2a$, 则 $BF_2 = BF_1 + 2a$, 且有 $AF_1 = AB + BF_1 = 4a + BF_1$, 代入可得 $AF_2 = 2a + BF_1$, 则 $BF_2 = AF_2$, $\therefore \angle AF_2B = 90^\circ$, 则 $\angle ABF_2 = \angle BAF_2 = 45^\circ$, 且 $AB^2 = AF_2^2 + BF_2^2$, 则 $BF_2 = AF_2 = 2\sqrt{2}a$, 则 $BF_1 = (2\sqrt{2} - 2)a$.

在 $\triangle BF_1F_2$ 中, $\angle F_1BF_2 = 135^\circ$,
 则 $\cos 135^\circ = \frac{BF_1^2 + BF_2^2 - F_1F_2^2}{2BF_1 \cdot BF_2}$,
 即 $-\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(20-8\sqrt{2})a^2 - 4c^2}{(16-8\sqrt{2})a^2}$,



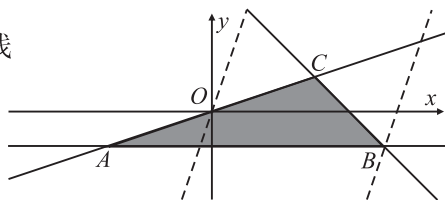
整理可得, $c = \sqrt{3}a$, $\therefore b = \sqrt{2}a$, 故渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{2}x$. 故选 B.

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 将答案填写在题中的横线上.)

13. 16

作出不等式组所表示的平面区域如图所示, 当直线

$z = 3x - y$ 过点 $B(5, -1)$ 时, z 取得最大值 16.



14. 60° (或填 $\frac{\pi}{3}$)

由题意得, $|3m - 2n|^2 = 9m^2 - 12m \cdot n + 4n^2 = 36$, 即

$36 = 36 - 12 \times 2 \times 3 \times \cos \langle m, n \rangle + 36$, 则 $\cos \langle m, n \rangle = \frac{1}{2}$, 故 $\langle m, n \rangle = 60^\circ$.

15. 2

$\therefore c \sin A + \sqrt{3}a \sin \left(C + \frac{\pi}{2} \right) = 0$, $\therefore c \sin A + \sqrt{3}a \cos C = 0$, $\therefore \sin C \sin A +$

$\sqrt{3} \sin A \cos C = 0$, 又 $\sin A \neq 0$, $\therefore \tan C = -\sqrt{3}$, $\therefore 0 < C < \pi$, $\therefore C = \frac{2\pi}{3}$.

由正弦定理得, $\sin B = \frac{b \sin C}{c} = \frac{b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}b} = \frac{1}{2}$, $\therefore 0 < B < \frac{\pi}{3}$, $\therefore B = \frac{\pi}{6}$, $\therefore A = \pi - B -$

$C = \frac{\pi}{6}$. 在 $\triangle ACM$ 中, 由余弦定理得, $CM^2 = AM^2 + AC^2 - 2AM \cdot AC \cdot \cos A$,

即 $CM^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \times 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$, 解得 $CM = 2$.

16. 54π

设 $\triangle ABC$ 的中心为 G , 连接 SG, BG , $\therefore SG \perp$ 平面 ABC , $\therefore SG \perp AC$, 又 $AC \perp GB$, $\therefore AC \perp$ 平面 SBG , $\therefore AC \perp BS$, 又 $BS \perp CD$, 故 $BS \perp$ 平面 ACS , 又 $S-ABC$ 为正三棱锥, $\therefore SA, SB, SC$ 两两垂直, 故外接球直径为 $3\sqrt{2} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{6}$, 故三棱锥 $S-ABC$ 外接球的表面积为 54π .

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 12 分)

(I) 由题意得, $a_{n+1} = 2a_n + 3 \cdot 2^{n+1}$, $\therefore \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = 3$, 2 分

故数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是以 2 为首项, 3 为公差的等差数列,4 分

$$\therefore \frac{a_n}{2^n} = 2 + 3(n-1) = 3n-1, \therefore a_n = (3n-1) \cdot 2^n. \text{6 分}$$

(II) 由题意得, $b_n = a_{n+1} = (3n+2) \cdot 2^{n+1}$,

$$\text{故 } T_n = 5 \times 2^2 + 8 \times 2^3 + 11 \times 2^4 + \cdots + (3n+2) \cdot 2^{n+1},$$

$$2T_n = 5 \times 2^3 + 8 \times 2^4 + 11 \times 2^5 + \cdots + (3n+2) \cdot 2^{n+2},$$

$$\begin{aligned} \therefore -T_n &= 5 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + 3 \times 2^4 + \cdots + 3 \cdot 2^{n+1} - (3n+2) \cdot 2^{n+2} \\ &= 3 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + 3 \times 2^4 + \cdots + 3 \cdot 2^{n+1} - (3n+2) \cdot 2^{n+2} + 8 \\ &= (1-3n) \cdot 2^{n+2} - 4, \text{11 分} \end{aligned}$$

$$\text{解得 } T_n = (3n-1) \cdot 2^{n+2} + 4. \text{12 分}$$

18. (本小题满分 12 分)

(I) $\because SD \perp$ 平面 $ABCD$, $SD \parallel S'B$, $\therefore S'B \perp$ 平面 $ABCD$,

$$\therefore S'B \perp AB, \therefore S'B = \sqrt{S'A^2 - AB^2} = 3, \therefore BS' = DS,$$

$\therefore$ 四边形 $BSDS'$ 为平行四边形, $\therefore DS' \parallel BS$,4 分

又 $DS' \not\subset$ 平面 BCS , $BS \subset$ 平面 BCS , $\therefore DS' \parallel$ 平面 BCS5 分

(II) 以 D 为原点, DA, DC, DS 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $D(0,0,0)$, $S'(4,3,-3)$, $C(0,4,0)$, $\therefore \overrightarrow{DC} = (0,4,0)$, $\overrightarrow{DS'} = (4,3,-3)$.

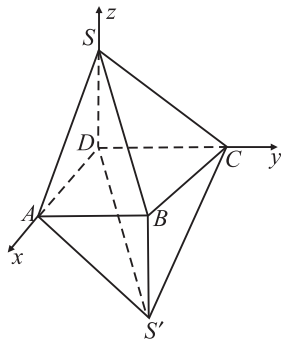
$$\text{设平面 } CDS' \text{ 的法向量为 } \mathbf{n} = (x, y, z), \text{ 则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DS'} = 0 \end{cases},$$

$$\text{即 } \begin{cases} 4y = 0 \\ 4x + 3y - 3z = 0 \end{cases}, \text{ 得 } \mathbf{n} = (3, 0, 4). \text{8 分}$$

又易知平面 ABS' 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (1, 0, 0)$9 分

设平面 ABS' 与平面 CDS' 所成锐二面角为 θ , 则 $|\cos \theta| = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{3}{5}$,

即平面 ABS' 与平面 CDS' 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{3}{5}$12 分



19. (本小题满分 12 分)

(I) 根据表中数据, 计算可得 $\bar{x} = 4$, $\bar{y} = 43$, $\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2 = 28$,2 分

$$\text{又 } \sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 140,$$

$$\therefore \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{140}{28} = 5, \text{ 则 } \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 43 - 5 \times 4 = 23,$$

$\therefore y$ 关于 x 的回归直线方程为 $\hat{y} = 5x + 23$,4 分

令 $x = 8$, 可得 $\hat{y} = 5 \times 8 + 23 = 63$,

即该高校 2021 年所招的学生高考成绩不低于 600 分的人数预测值为 63 人.5 分

(II) 由条件可知, X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 4,

$$P(X=0) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{27},$$

$$P(X=1) = C_3^1 \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{1}{2} = \frac{10}{27},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) + C_3^1 \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3},$$

$$P(X=3) = C_3^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) + C_3^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{7}{54},$$

$$P(X=4) = C_3^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{54}, \text{10 分}$$

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{4}{27}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{54}$	$\frac{1}{54}$

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{4}{27} + 1 \times \frac{10}{27} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{7}{54} + 4 \times \frac{1}{54} = \frac{3}{2}. \text{12 分}$$

20. (本小题满分 12 分)

$$(I) \text{ 由题意得, } \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1, \text{ 解得 } \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$$

∴ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$4 分

$$(II) \text{ 联立 } \begin{cases} y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + m \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } x^2 - \sqrt{3}mx + m^2 - 1 = 0,$$

其中 $\Delta = 3m^2 - 4(m^2 - 1) = -m^2 + 4 > 0$, 解得 $-2 < m < 2$,

又 $m \neq 0$ 且 $m \neq -\sqrt{3}$, ∴ m 的取值范围是 $(-2, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, 0) \cup (0, 2)$6 分

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \sqrt{3}m$, $x_1x_2 = m^2 - 1$,

$$\begin{aligned} \therefore k_1 \cdot k_2 &= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + m + \frac{\sqrt{3}}{2}}{x_1 + 1} \cdot \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + m + \frac{\sqrt{3}}{2}}{x_2 + 1} \\ &= \frac{\frac{3}{4}x_1x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(m + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x_1 + x_2) + \left(m + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{x_1x_2 + (x_1 + x_2) + 1} \\ &= \frac{\frac{3}{4}(m^2 - 1) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(m + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \sqrt{3}m + \left(m + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{m^2 - 1 + \sqrt{3}m + 1} \\ &= \frac{\frac{1}{4}m^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}m}{m^2 + \sqrt{3}m} = \frac{1}{4}, \text{11 分} \end{aligned}$$

即 k_1k_2 是定值, 且定值是 $\frac{1}{4}$12 分

21. (本小题满分 12 分)

(I) 当 $m = -1$ 时, $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}} - \sin x$, 则 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \cos x$,

$$\therefore f'(0) = -\frac{1}{2}, \text{ 又 } f(0) = 1,$$

∴ 所求切线方程为 $y - 1 = -\frac{1}{2}x$, 即 $x + 2y - 2 = 0$4 分

(II) 由题意得, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-m}} - \cos x$.

$$\text{令 } g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-m}} - \cos x, \text{ 则 } g'(x) = -\frac{1}{4(x-m)^{\frac{3}{2}}} + \sin x,$$

$\because m < -\frac{1}{4}$, $\therefore g'(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增.6 分

又 $g'(0) < 0$, $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4\left(\frac{\pi}{2} - m\right)^{\frac{3}{2}}} > 0$, $\therefore$ 存在唯一实数 $t_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

使得 $g'(t_0) = 0$, 则当 $x \in (0, t_0)$ 时, $g'(x) < 0$, 函数 $g(x)$ 单调递减;

当 $x \in \left(t_0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x) > 0$, 函数 $g(x)$ 单调递增.8 分

又 $m < -\frac{1}{4}$, 则 $-m > \frac{1}{4}$, 即 $\sqrt{-m} > \frac{1}{2}$, 即 $2\sqrt{-m} > 1$,

$\therefore g(0) = \frac{1}{2\sqrt{-m}} - 1 < 0$, $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{3} - m}} - \frac{1}{2} < 0$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2} - m}} > 0$,

$\therefore$ 存在唯一实数 $x_0 \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$, 使得 $g(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0 - m}} - \cos x_0 = 0$,10 分

$\therefore$ 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) = g(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in \left(x_0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f'(x) = g(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增,

$\therefore f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上有唯一极小值点 x_012 分

请考生从第 22、23 题中任选一题作答. 注意: 只能做选定的题目, 如果多做, 则按所做的第一题记分, 解答时请写清题号.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

(I) $\because$ 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \cos \alpha \\ y = \sqrt{3} + \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数),

消去 α , 得 $(x-1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 1$, 即 $x^2 + y^2 - 2x - 2\sqrt{3}y + 3 = 0$,

将 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ 代入上式, 得 $\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 2\sqrt{3}\rho \sin \theta + 3 = 0$,

即为曲线 C 的极坐标方程.5 分

(II) 将 $\theta = \theta_0$ 代入曲线 C 的极坐标方程,

得 $\rho^2 - 2\rho \cos \theta_0 - 2\sqrt{3}\rho \sin \theta_0 + 3 = 0$6 分

设 $M(\rho_1, \theta_0)$, $N(\rho_2, \theta_0)$, 则 $\rho_1 + \rho_2 = 2 \cos \theta_0 + 2\sqrt{3} \sin \theta_0$,7 分

$\therefore |OM| + |ON| = \rho_1 + \rho_2 = 2 \cos \theta_0 + 2\sqrt{3} \sin \theta_0 = 4 \sin \left(\theta_0 + \frac{\pi}{6}\right)$8 分

$$\because \theta_0 \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right), \therefore \theta_0 + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right), \therefore 4\sin\left(\theta_0 + \frac{\pi}{6}\right) \in (2\sqrt{3}, 4],$$

即 $|OM| + |ON|$ 的取值范围为 $(2\sqrt{3}, 4]$10 分

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

(I) $\because$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$\therefore |2x-1| + |x-4| - m > 0$, 即 $m < |2x-1| + |x-4|$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 上恒成立.

$$\text{设 } g(x) = |2x-1| + |x-4|, \text{ 则 } g(x) = \begin{cases} -3x+5, & x < \frac{1}{2} \\ x+3, & \frac{1}{2} \leq x \leq 4 \\ 3x-5, & x > 4 \end{cases}$$

结合函数 $g(x)$ 的图象可知 $g(x)_{\min} = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}$,

$\therefore m < \frac{7}{2}$, 即集合 $M = \left\{m \mid m < \frac{7}{2}\right\}$5 分

(II) 由题意得, $0 < a < \frac{7}{2}$, $0 < b < \frac{7}{2}$, 要证 $\frac{a+b}{4ab+49} < \frac{1}{14}$,

即证 $4ab+49 > 14(a+b)$, 即证 $4ab+49-14(a+b) > 0$,

即证 $(2a-7)(2b-7) > 0$,8 分

又 $0 < a < \frac{7}{2}$, $0 < b < \frac{7}{2}$, $\therefore (2a-7)(2b-7) > 0$,

故 $\frac{a+b}{4ab+49} < \frac{1}{14}$ 得证.10 分