



1号卷·A10联盟2021届高三开年考

理科数学

巢湖一中 合肥八中 淮南二中 六安一中 南陵中学 舒城中学 太湖中学 天长中学 屯溪一中 宣城中学 滁州中学 池州一中 阜阳一中 灵璧中学 宿城一中

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。满分150分，考试时间120分钟。请在答题卷上作答。

第Ⅰ卷（选择题 共60分）

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

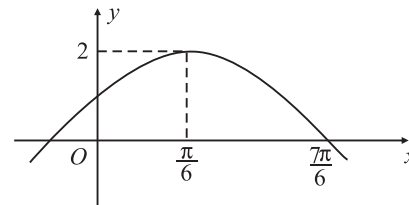
1. 已知集合 $A = \{x | -2 \leq x < 2\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} | x^2 + 2x - 8 \leq 0\}$, 则 $A \cap B$ 的真子集个数为 ()
A. 3 B. 4 C. 7 D. 8
2. 若纯虚数 z 满足 $z \cdot (2 - 3i) = 5 + mi$, 则实数 m 的值为 ()
A. $-\frac{15}{2}$ B. $\frac{15}{2}$ C. $-\frac{10}{3}$ D. $\frac{10}{3}$
3. “共享单车，绿色出行”是近年来火爆的广告词，现对某市10名共享单车用户一个月内使用共享单车的次数进行统计，得到数据如下所示，下列关于该组数据的说法错误的是 ()

1	7
2	3 5 6 7
3	2 4 4
4	9
5	3

- A. 极差为36 B. 众数为34
C. 中位数为27 D. 平均数为32
4. “ $m < 4$ ”是“函数 $f(x) = 2x^2 - mx + \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增”的 ()
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 若 $\sin \alpha (2 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos \alpha (\sin^2 \alpha + 1)$, 则 $\tan\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) =$ ()
A. -7 B. 7 C. $-\frac{1}{7}$ D. $\frac{1}{7}$

6. 已知 $x = 3^{\frac{1}{2}}$, $y = 0.5^{0.3}$, $z = \log_{0.2} 0.5$, 则 ()
A. $y < z < x$ B. $x < z < y$
C. $y < x < z$ D. $z < y < x$
7. 已知抛物线 $x^2 = 8y$ 的焦点为 F , 准线为 l , 过抛物线上一点 P 作 $PQ \perp l$, 垂足为 Q , 若 $|PF| = 4$, 则 $\angle FQP =$ ()
A. 30° B. 45° C. 60° D. 75°
8. 2020年是全面建成小康社会的目标实现之年，也是全面打赢脱贫攻坚战的收官之年。为更好地将“精准扶贫”落到实处，某地安排7名干部（3男4女）到三个贫困村调研走访，每个村安排男、女干部各1名，剩下1名干部负责统筹协调，则不同的安排方案有 ()
A. 72种 B. 108种 C. 144种 D. 210种
9. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2，点 P 在棱 AD 上，过点 P 作该正方体的截面，当截面平行于平面 B_1D_1C 且面积为 $\sqrt{3}$ 时，线段 AP 的长为 ()
A. $\sqrt{2}$ B. 1 C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
10. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足：①图象关于原点对称；
② $f(x) = f\left(\frac{3}{2} - x\right)$ ；③当 $x \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$ 时， $f(x) = \log_2(x+1) + m$. 若 $f(2020) = \log_2 3$, 则 $m =$ ()
A. -1 B. 1 C. -2 D. 2
11. 将函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ $\left(\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到的部分图象如图所示，有下列四个结论：
① $f(0) = 1$ ；② $y = f(x) - \sqrt{3}$ 在 $[0, \pi]$ 上有两个零点；③ $f(x)$

的图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{6}$ 对称；④ $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$ 上单调递减，其中所有正确结论的个数为 ()



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
12. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过点 F_1 的直线 l 与 C 的两支分别交于点 A, B , 若点 M 满足 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, $|\overrightarrow{MF_2}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| = 2a$, 则双曲线 C 的渐近线方程为 ()
A. $y = \pm x$ B. $y = \pm \sqrt{2}x$
C. $y = \pm \sqrt{3}x$ D. $y = \pm 2x$

第Ⅱ卷（非选择题 共90分）

本卷包括必考题和选考题两部分。第13题~第21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22题~第23题为选考题，考生根据要求作答。

二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分。）

13. 若实数 x, y 满足 $\begin{cases} x - 3y \geq 0 \\ x + y \leq 4 \\ y + 1 \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = 3x - y$ 的最大值为 _____.
14. 若平面向量 m, n 满足 $|m| = 2$, $|n| = 3$, 且 $|3m - 2n| = 6$, 则 m 与 n 夹角的大小为 _____.
15. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $c \sin A + \sqrt{3}a \sin\left(C + \frac{\pi}{2}\right) = 0$, $c = \sqrt{3}b = 6$, 且点 M 满足 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$, 则 CM 的长为 _____.
16. 在正三棱锥 $S - ABC$ 中， $AB = BC = CA = 6$, 点 D 是 SA 的中点，若 $SB \perp CD$, 则该三棱锥外接球的表面积为 _____.

三、解答题（本大题共6小题，共70分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。）

17. （本小题满分12分）

已知首项为4的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且

$$\frac{S_{n+1}}{3} = \frac{S_n + 2a_n}{3} + 2^{n+1}.$$

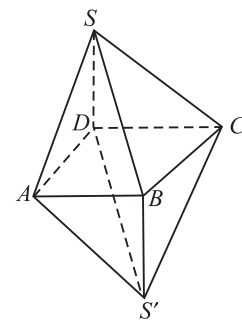
- （Ⅰ）求证：数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 为等差数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；
- （Ⅱ）若 $b_n = a_{n+1}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. （本小题满分12分）

已知多面体 $SABCD S'$ 如图所示，四边形 $ABCD$ 为梯形，
 $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$, $SD \perp$ 平面 $ABCD$, $SD \parallel S'B$,

$$AB = SD = \frac{\sqrt{2}}{2} S'A = 3, \quad AD = CD = 4.$$

- （Ⅰ）求证： $DS' \parallel$ 平面 BCS ；
- （Ⅱ）求平面 ABS' 与平面 CDS' 所成锐二面角的余弦值.



19.（本小题满分 12 分）

某高校为了加快打造一流名校步伐，生源质量不断改善. 据统计，该校 2014 年到 2020 年所招的学生高考成绩不低于 600 分的人数 y 与对应年份代号 x 的数据如下：

年份	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
年份代号 x	1	2	3	4	5	6	7
不低于 600 分 的人数 y (单位：人)	29	33	36	44	48	52	59

- (I) 若 y 关于 x 具有较强的线性相关关系，求 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ，并预测 2021 年该校所招的学生高考成绩不低于 600 分的人数；
- (II) 今有 A ， B ， C ， D 四位同学报考该校，已知 A ， B ， C 被录取的概率均为 $\frac{1}{3}$ ， D 被录取的概率为 $\frac{1}{2}$ ，且每位同学是否被录取相互不受影响，用 X 表示此 4 人中被录取的人数，求 X 的分布列与数学期望.

参考公式: $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ ， $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$.

参考数据: $\sum_{i=1}^7 y_i = 301$ ， $\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 140$.

20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，且过点

$$P\left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

- (I) 求椭圆 C 的方程；
- (II) 若直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + m$ ($m \neq 0$ 且 $m \neq -\sqrt{3}$) 交椭圆 C 于 A, B 两点，记直线 PA, PB 的斜率分别为 k_1, k_2 ，探究: $k_1 k_2$ 是否为定值，若是，求出该值；若不是，请说明理由.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x) = (x - m)^{\frac{1}{2}} - \sin x$ ，其中 $m < -\frac{1}{4}$.

- (I) 当 $m = -1$ 时，求曲线 $y = f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程；
- (II) 求证: $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上有唯一极小值点.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 注意: 只能做选定的题目，如果多做，则按所做的第一题记分，解答时请写清题号.

22.（本小题满分 10 分）选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为
$$\begin{cases} x = 1 + \cos \alpha \\ y = \sqrt{3} + \sin \alpha \end{cases} \quad (\alpha \text{ 为参数}),$$
 以坐标原点为极点， x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\theta = \theta_0$ ($\rho \in \mathbf{R}$).

- (I) 求曲线 C 的极坐标方程；
- (II) 当 $\theta_0 \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，设直线 l 与曲线 C 相交于 M, N 两点，求 $|OM| + |ON|$ 的取值范围.

23.（本小题满分 10 分）选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = \log_2 (|2x - 1| + |x - 4| - m)$ ($m \in \mathbf{R}$).

- (I) 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，求 m 的取值集合 M ；
- (II) 在 (I) 的条件下，正数 a, b 满足 $a, b \in M$ ，求证:

$$\frac{a+b}{4ab+49} < \frac{1}{14}.$$