

# 1号卷·A10联盟2021届高三开年考

## 文科数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| 答案 | B | D | C | A | B | D | C | A | C | A  | B  | D  |

1. B 由题意得， $B = \{x \in \mathbf{N} \mid (x-2)(x+4) < 0\} = \{0, 1\}$ ， $\therefore A \cap B = \{0, 1\}$ . 故选 B.

2. D 由题意得， $\frac{3i-5}{2+3i} = \frac{(3i-5)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{6i+9-10+15i}{13} = -\frac{1}{13} + \frac{21}{13}i$ ，故其虚部为

$\frac{21}{13}$ ，故选 D.

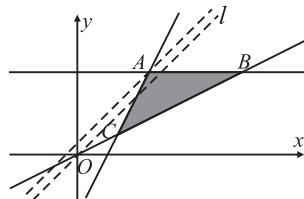
3. C 该组数据的极差为 34，中位数为 29.5，平均数为

$30 + \frac{1}{10} \times (-12 - 7 - 5 - 4 - 3 + 2 + 3 + 5 + 19 + 22) = 32$ ，观察可知，①③正确，故选 C.

4. A 若  $f(x) = 2x^2 - mx + \ln x$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增，则  $f'(x) = 4x - m + \frac{1}{x} \geq 0$ ，即  $4x + \frac{1}{x} \geq m$ ，则  $m \leq 4$ ，故选 A.

5. B 作出不等式组所表示的平面区域如图阴影部分所示，

其中  $A\left(\frac{7}{2}, 4\right)$ ， $B(8, 4)$ ， $C(2, 1)$ ，作直线  $l: y = x$ ，



平移直线  $l$ ，当其经过点  $A$  时， $z$  有最小值，即  $z_{\min} = \frac{7}{2} - 4 = -\frac{1}{2}$ ，故选 B.

6. D  $\because x = \sqrt{3} > 1$ ， $0.5 < y = 0.5^{0.3} < 0.5^0 = 1$ ， $z = \log_{0.2} 0.5 = \log_5 2 < \log_5 \sqrt{5} = 0.5$ ， $\therefore z < y < x$ ，故选 D.

7. C 运行该程序，第一次， $S = 8, a = 3, b = 8, n = 3$ ；第二次， $S = 19, a = 8, b = 19, n = 2$ ；第三次， $S = 46, a = 19, b = 46, n = 1$ ；第四次， $S = 111, a = 46, b = 111, n = 0$ ，此时输出  $S$ ，故判断框中可以填  $n < 1$ ，故选 C.

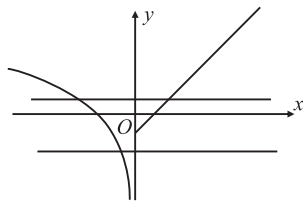
8. A  $\because \alpha$  是第三象限角， $3\cos 2\alpha + \sin \alpha = 2$ ， $\therefore 3(1 - 2\sin^2 \alpha) + \sin \alpha = 2$ ，

$\therefore 6\sin^2 \alpha - \sin \alpha - 1 = 0$ ，解得  $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$  或  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ （舍去），

$\therefore \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ， $\therefore \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ，故选 A.

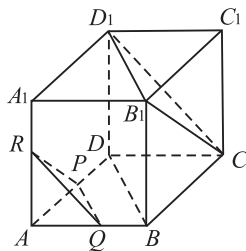
9. C 令  $f(x)=t$ , 当  $f(t)=0$  时, 解得  $t=\frac{1}{2}$  或  $t=-1$ . 在

同一直角坐标系中分别作出  $y=f(x), y=-1, y=\frac{1}{2}$  的图象如图所示, 观察可知,  $y=f(x)$  与  $y=-1$  有



1 个交点,  $y=f(x)$  与  $y=\frac{1}{2}$  有 2 个交点, 则  $y=f(f(x))$  的零点个数为 3, 故选 C.

10. A 如图, 过点  $P$  作  $D_1B_1, B_1C$  的平行线, 分别交棱  $AB, AA_1$  于点  $Q, R$ , 连接  $QR, BD$ , 易知  $\triangle PQR$  是等边三角形, 且为截面, 则  $\frac{1}{2}PQ^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ , 解得  $PQ=2$ ,  $\therefore AP = \frac{\sqrt{2}}{2}PQ = \sqrt{2}$ . 故选 A.



11. B 由题意得,  $|MF_2| + |MN| = |MF_1| + 2a + |MN| \geq |F_1N| + 2a = b + 2a$ , 当且仅当  $M, F_1, N$  三点共线时取等号,  $\therefore |MF_2| + |MN|$  的最小值为  $b + 2a = 10$ ,

$\therefore 10 \geq 2\sqrt{2ab}$ , 即  $ab \leq \frac{25}{2}$ , 当且仅当  $b = 2a = 5$  时, 等号成立,

$\therefore S_{\triangle F_1NF_2} = 2S_{\triangle F_1NO} = 2 \times \frac{1}{2}|NF_1| \cdot |NO| = ab \leq \frac{25}{2}$ , 故选 B.

12. D 由题意得,  $2a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ , 故  $\frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = \frac{\frac{a_{n+1} + a_n - a_{n+1}}{2}}{a_{n+1} - a_n} = -\frac{1}{2}$ , 且

$a_2 - a_1 = -9$ , 故  $a_{n+1} - a_n = -9 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ , 则

$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1$

$$= -9 \times \left[ \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^0 \right] + 6 = -9 \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} + 6 = 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

则  $\{a_n\}$  是首项为 6, 公比为  $-\frac{1}{2}$  的等比数列, 故

$$S_n = 6 \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 4 \left[ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right], \text{ 则 } S_{2020} = 4 \left[ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{2020} \right] = 4 - \frac{1}{2^{2018}},$$

故选 D.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 将答案填写在题中的横线上.）

13. -30

由题意得， $12 = -3\lambda$ ，解得  $\lambda = -4$ ，故  $\mathbf{a} + \mathbf{c} = (6, -2)$ ，故  $(\mathbf{a} + \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} = -30$ .

14. -2

对  $y = a - \ln x$  求导得  $y' = -\frac{1}{x}$ ， $\therefore$  曲线  $y = a - \ln x$  在点  $(1, a)$  处的切线方程为

$y - a = -(x - 1)$ ，即  $y = -x + a + 1$ . 设  $y = -x + a + 1$  与  $y = -e^x$  相切于点

$(x_0, -e^{x_0})$ ，对  $y = -e^x$  求导得  $y' = -e^x$ ， $\therefore -e^{x_0} = -1$ ， $\therefore x_0 = 0$ ，即切点为  $(0, -1)$ ，

它在切线  $y = -x + a + 1$  上， $\therefore a + 1 = -1$ ， $\therefore a = -2$ .

15.  $120^\circ$ （或  $\frac{2\pi}{3}$ ）

由题意得， $|MF| = 4$ ，由抛物线的定义知  $|PQ| = |PF| = y_P + 2 = \frac{8}{3}$ ， $\therefore y_P = \frac{2}{3}$ ，

$\therefore x_P = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$ ，在  $\text{Rt}\triangle FMQ$  中， $|FQ|^2 = |FM|^2 + |MQ|^2 = \frac{64}{3}$ .  $\therefore \triangle PFQ$  为等腰三角

形， $\therefore \cos \angle QPF = \frac{|PF|^2 + |PQ|^2 - |FQ|^2}{2|PF| \cdot |PQ|} = -\frac{1}{2}$ ， $\therefore \angle QPF = 120^\circ$ .

16.  $54\pi$

设  $\triangle ABC$  的中心为  $G$ ，连接  $SG, BG$ ， $\therefore SG \perp$  平面  $ABC$ ， $\therefore SG \perp AC$ ，又

$AC \perp BG$ ， $\therefore AG \perp$  平面  $SBG$ ， $\therefore AC \perp SB$ ，又  $SB \perp CD$ ， $\therefore SB \perp$  平面  $ACS$ .

$\therefore S-ABC$  为正三棱锥， $\therefore SA, SB, SC$  两两垂直，故外接球直径为

$3\sqrt{2} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{6}$ ，故三棱锥  $S-ABC$  外接球的表面积为  $4\pi \times \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2 = 54\pi$ .

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分 12 分）

（I） $K^2 = \frac{800 \times (300 \times 150 - 150 \times 200)^2}{500 \times 300 \times 450 \times 350} \approx 7.619 < 10.828$ ，.....4 分

$\therefore$  没有 99.9% 的把握认为佩戴口罩的态度与性别有关. ....6 分

（II）男性中认为冬季佩戴口罩十分必要抽取 3 人，记为  $a, b, c$ ，男性中认为冬季佩戴口罩没有必要抽取 2 人，记为  $A, B$ ，故随机抽取 2 人，所有基本事件为：

$(a, b), (a, c), (a, A), (a, B), (b, c), (b, A), (b, B), (c, A), (c, B), (A, B)$ ，.....9 分

其中事件“恰有 1 人认为冬季佩戴口罩十分必要”包含的基本事件为：

$(a, A), (a, B), (b, A), (b, B), (c, A), (c, B)$ ，

故所求概率  $P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ . ....12 分

18. (本小题满分 12 分)

(I)  $\because c \sin A + \sqrt{3}a \sin\left(C + \frac{\pi}{2}\right) = 0, \therefore c \sin A + \sqrt{3}a \cos C = 0,$   
 $\therefore \sin C \sin A + \sqrt{3} \sin A \cos C = 0, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$   
 $\because \sin A \neq 0, \therefore \tan C = -\sqrt{3}, \because 0 < C < \pi, \therefore C = \frac{2\pi}{3}, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$   
 $\therefore \triangle ABC$  外接圆的半径  $R = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{\sin C} = \frac{1}{2} \times \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$   
 $\therefore \triangle ABC$  外接圆的面积为  $12\pi. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(II) 由正弦定理得,  $\sin B = \frac{b \sin C}{c} = \frac{b \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}b} = \frac{1}{2}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$   
 $\because 0 < B < \frac{\pi}{3}, \therefore B = \frac{\pi}{6}, \therefore A = \pi - B - C = \frac{\pi}{6}. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$   
在  $\triangle ACM$  中, 由余弦定理得,  $CM^2 = AM^2 + AC^2 - 2AM \cdot AC \cdot \cos A,$   
解得  $CM = 2, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$   
则  $\triangle ACM$  的周长为  $4 + 2\sqrt{3}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

19. (本小题满分 12 分)

(I)  $\because \triangle DAC$  为等边三角形, 且  $E$  为  $DA$  的中点,  $\therefore CE \perp DA. \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$   
 $\because$  平面  $DAB \perp$  平面  $DAC$ , 平面  $DAB \cap$  平面  $DAC = DA, CE \subset$  平面  $DAC,$   
 $\therefore CE \perp$  平面  $DAB, \because AB \subset$  平面  $DAB, \therefore AB \perp CE. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$   
又  $AB \perp AC, CE \cap AC = C, AC, CE \subset$  平面  $DAC,$   
 $\therefore AB \perp$  平面  $DAC, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$   
 $\because AD \subset$  平面  $DAC, \therefore AB \perp AD. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(II)  $\because AB \perp AC, AB \perp AD, AC \cap AD = A, \therefore AB \perp$  平面  $ACD. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$   
 $\because AB \perp AC, AC = 2, \tan \angle CBA = \frac{1}{2}, \therefore AB = 2AC = 4. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$   
 $\because \triangle DAC$  是边长为 2 的等边三角形, 且  $E$  为  $DA$  的中点,  
 $\therefore CE \perp DA, CE = DC \sin 60^\circ = \sqrt{3},$   
 $\therefore \triangle DEC$  的面积  $S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2} DE \cdot CE = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$   
由 (I) 知,  $CE \perp$  平面  $DAB, \because BE \subset$  平面  $DAB, \therefore CE \perp BE,$   
 $\therefore \triangle BEC$  的面积为  $S_{\triangle ECB} = \frac{1}{2} CE \cdot BE = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{17} = \frac{\sqrt{51}}{2}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

设点  $D$  到平面  $BCE$  的距离为  $h,$

$$\because V_{B-CDE} = V_{D-BEC}, \therefore \frac{1}{3} S_{\triangle CDE} \cdot AB = \frac{1}{3} S_{\triangle ECB} \cdot h, \text{ 即 } \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{51}}{2} \times h,$$

$$\text{解得 } h = \frac{4\sqrt{17}}{17}, \text{ 即点 } D \text{ 到平面 } BCE \text{ 的距离为 } \frac{4\sqrt{17}}{17}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. (本小题满分 12 分)

$$(I) \text{ 由题意得, } \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases},$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(II) \text{ 联立 } \begin{cases} y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + m \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } x^2 - \sqrt{3}mx + m^2 - 1 = 0,$$

$$\text{其中 } \Delta = 3m^2 - 4(m^2 - 1) = -m^2 + 4 > 0, \text{ 解得 } -2 < m < 2,$$

$$\text{又 } m \neq 0 \text{ 且 } m \neq -\sqrt{3}, \therefore -2 < m < -\sqrt{3} \text{ 或 } -\sqrt{3} < m < 0 \text{ 或 } 0 < m < 2. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则 } x_1 + x_2 = \sqrt{3}m, x_1x_2 = m^2 - 1,$$

$$\begin{aligned} \therefore k_1 \cdot k_2 &= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + m + \frac{\sqrt{3}}{2}}{x_1 + 1} \cdot \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + m + \frac{\sqrt{3}}{2}}{x_2 + 1} \\ &= \frac{\frac{3}{4}x_1x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(m + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x_1 + x_2) + \left(m + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{x_1x_2 + (x_1 + x_2) + 1} \\ &= \frac{\frac{3}{4}(m^2 - 1) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(m + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \sqrt{3}m + \left(m + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{m^2 - 1 + \sqrt{3}m + 1} \\ &= \frac{\frac{1}{4}m^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}m}{m^2 + \sqrt{3}m} = \frac{1}{4}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\text{即 } k_1k_2 \text{ 是定值, 且定值是 } \frac{1}{4}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. (本小题满分 12 分)

(I) 由题意得,  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $f'(x) = a + 1 + \frac{1}{x} = \frac{(a+1)x+1}{x}$ .

当  $a \geq -1$  时,  $f'(x) > 0$  恒成立,  $\therefore f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增. .... 2 分

当  $a < -1$  时, 令  $f'(x) > 0$ , 解得  $x < -\frac{1}{a+1}$ ; 令  $f'(x) < 0$ , 解得  $x > -\frac{1}{a+1}$ ,

$\therefore f(x)$  在  $\left(0, -\frac{1}{a+1}\right)$  上单调递增, 在  $\left(-\frac{1}{a+1}, +\infty\right)$  上单调递减. .... 5 分

(II) 方法一: 要证  $\frac{2e^x}{xe^2} + 1 + (a+1)x > f(x)$ , 即证  $\frac{2}{e^2} \cdot \frac{e^x}{x} - \ln x > 0$ . .... 6 分

令  $g(x) = \frac{2}{e^2} \cdot \frac{e^x}{x} - \ln x$ , 则  $g'(x) = \frac{2(x-1)e^x - e^2 x}{e^2 x^2}$ . .... 7 分

令  $r(x) = 2(x-1)e^x - e^2 x$ , 则  $r'(x) = 2xe^x - e^2$ ,

易得  $r'(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 且  $r'(1) = 2e - e^2 < 0$ ,  $r'(2) = 3e^2 > 0$ ,

$\therefore$  存在唯一的实数  $x_0 \in (1, 2)$ , 使得  $r'(x_0) = 0$ ,

$\therefore r(x)$  在  $(0, x_0)$  上单调递减, 在  $(x_0, +\infty)$  上单调递增. .... 9 分

$\because r(0) < 0$ ,  $r(2) = 0$ ,  $\therefore$  令  $r(x) > 0$ , 解得  $x > 2$ ; 令  $r(x) < 0$ , 解得  $0 < x < 2$ ,

$\therefore g(x)$  在  $(0, 2)$  上单调递减, 在  $(2, +\infty)$  上单调递增,

$\therefore g(x) \geq g(2) = 1 - \ln 2 > 0$ . .... 11 分

综上,  $\frac{2}{e^2} \cdot \frac{e^x}{x} - \ln x > 0$ , 即  $\frac{2e^x}{xe^2} + 1 + (a+1)x > f(x)$ . .... 12 分

方法二: 要证  $\frac{2e^x}{xe^2} + 1 + (a+1)x > f(x)$ , 即证  $\frac{2}{e^2} \cdot \frac{e^x}{x} > \ln x$ ,

即证  $\frac{2}{e^2} \cdot \frac{e^x}{x^2} > \frac{\ln x}{x}$ . .... 7 分

令  $g(x) = \frac{e^x}{x^2}$ , 则  $g'(x) = \frac{e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$ ,

易得  $g(x)$  在  $(0, 2)$  上单调递减, 在  $(2, +\infty)$  上单调递增,

$\therefore g(x)_{\min} = g(2) = \frac{e^2}{4}$ ,  $\therefore \frac{2}{e^2} \cdot \frac{e^x}{x^2} \geq \frac{2}{e^2} \times \frac{e^2}{4} = \frac{1}{2}$ . .... 9 分

令  $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ , 则  $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ,

易得  $h(x)$  在  $(0, e)$  上单调递增, 在  $(e, +\infty)$  上单调递减,

$\therefore h(x)_{\max} = h(e) = \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$ . .... 11 分

综上,  $\frac{2}{e^2} \cdot \frac{e^x}{x^2} > \frac{\ln x}{x}$ , 即  $\frac{2e^x}{xe^2} + 1 + (a+1)x > f(x)$ . .....12分

请考生从第 22、23 题中任选一题作答. 注意: 只能做选定的题目, 如果多做, 则按所做的第一题记分, 解答时请写清题号.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

(I)  $\because$  曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 1 + \cos \alpha \\ y = \sqrt{3} + \sin \alpha \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数),

消去  $\alpha$ , 得  $(x-1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 1$ , 即  $x^2 + y^2 - 2x - 2\sqrt{3}y + 3 = 0$ ,

将  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$  代入上式得  $\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 2\sqrt{3}\rho \sin \theta + 3 = 0$ ,

即为曲线  $C$  的极坐标方程. ....5分

(II) 将  $\theta = \theta_0$  代入曲线  $C$  的极坐标方程,

得  $\rho^2 - 2\rho \cos \theta_0 - 2\sqrt{3}\rho \sin \theta_0 + 3 = 0$ . ....6分

设  $M(\rho_1, \theta_0), N(\rho_2, \theta_0)$ , 则  $\rho_1 + \rho_2 = 2 \cos \theta_0 + 2\sqrt{3} \sin \theta_0$ , ....7分

$\therefore |OM| + |ON| = \rho_1 + \rho_2 = 2 \cos \theta_0 + 2\sqrt{3} \sin \theta_0 = 4 \sin \left( \theta_0 + \frac{\pi}{6} \right)$ . ....8分

$\because \theta_0 \in \left( \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right)$ ,  $\therefore \theta_0 + \frac{\pi}{6} \in \left( \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right)$ ,  $\therefore 4 \sin \left( \theta_0 + \frac{\pi}{6} \right) \in (2\sqrt{3}, 4]$ ,

即  $|OM| + |ON|$  的取值范围为  $(2\sqrt{3}, 4]$ . ....10分

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

(I)  $\because$  函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,

$\therefore |2x-1| + |x-4| - m > 0$ , 即  $m < |2x-1| + |x-4|$  在  $x \in \mathbf{R}$  上恒成立.

设  $g(x) = |2x-1| + |x-4|$ , 则  $g(x) = \begin{cases} -3x+5, & x < \frac{1}{2} \\ x+3, & \frac{1}{2} \leq x \leq 4 \\ 3x-5, & x > 4 \end{cases}$

结合函数  $g(x)$  的图象可知  $g(x)_{\min} = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}$ ,

$\therefore m < \frac{7}{2}$ , 即集合  $M = \left\{ m \mid m < \frac{7}{2} \right\}$ . ....5分

(II) 由题意得,  $0 < a < \frac{7}{2}$ ,  $0 < b < \frac{7}{2}$ , 要证  $\frac{a+b}{4ab+49} < \frac{1}{14}$ ,

即证  $4ab+49 > 14(a+b)$ , 即证  $4ab+49-14(a+b) > 0$ ,

即证  $(2a-7)(2b-7) > 0$  , .....8 分

又  $0 < a < \frac{7}{2}$  ,  $0 < b < \frac{7}{2}$  ,  $\therefore (2a-7)(2b-7) > 0$  ,

故  $\frac{a+b}{4ab+49} < \frac{1}{14}$  得证. ....10 分