



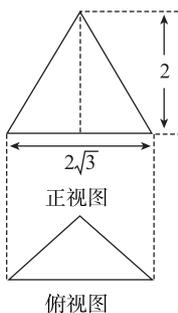
## 数学(文科)

(本试卷满分 150 分,建议用时:120 分钟)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案												

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 【研发题】设集合  $A = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$ , 则  $A \cap \mathbf{N}^*$  中元素的个数是 ( )  
A. 无数个                      B. 3  
C. 4                                D. 5
- 【研发题】设复数  $\bar{z} = \frac{5i^{2020}}{1-2i^{2019}}$ , 则  $|z| =$  ( )  
A.  $\sqrt{5}$     B. 1                      C. -2                      D. 2
- 【细磨题】已知三棱锥的底面是等腰三角形, 其正视图与俯视图如图所示, 且俯视图是顶角为  $120^\circ$  的等腰三角形, 则其侧视图的面积为 ( )



- A. 1                      B. 2                      C.  $\sqrt{3}$                       D.  $2\sqrt{3}$
- 【细磨题】二次函数  $f(x) = x^2 + bx + c$  满足  $f(2-x) = f(4+x)$ , 则满足  $f(2-a) > f(4)$  的实数  $a$  的取值范围是 ( )  
A.  $(-2, 0)$   
B.  $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$   
C. 由  $b$  的范围决定  
D. 由  $b, c$  的范围共同决定
- 【细磨题】若  $F$  为双曲线  $C: -x^2 + 4y^2 = 16$  的一个焦点, 则点  $F$  到曲线  $C$  的一条渐近线距离为 ( )  
A. 16                      B. 4                      C. 2                      D.  $2\sqrt{5}$

- 【细磨题】在区间  $[-1, 11]$  上随机取一实数  $x$ , 则该实数  $x$  满足不等式  $0 \leq \log_3 x \leq 2$  的概率为 ( )  
A.  $\frac{1}{6}$                       B.  $\frac{1}{3}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{2}{3}$

- 【研发题】已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n^2 = a_{n-1} a_{n+1}, n \geq 2, a_n < 0$ , 若  $a_2 a_6 + 2a_4 a_6 + a_3 a_9 = 36$ , 则  $a_4 + a_6$  的值为 ( )  
A. -6                      B. 6                      C. 18                      D.  $\pm 18$
- 【细磨题】如果数据  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的平均数是 5, 标准差是 4, 则  $2x_1 - 3, 2x_2 - 3, \dots, 2x_n - 3$  的平均数和方差分别是 ( )  
A. 5 和 8                      B. 7 和 8  
C. 7 和 16                      D. 7 和 64
- 【细磨题】若函数  $f(x) = -x^3 + tx^2 - 3x + 8$  不是  $\mathbf{R}$  上的单调函数, 则实数  $t$  的取值范围是 ( )  
A.  $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$   
B.  $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$   
C.  $(-3, 3)$   
D.  $[-3, 3]$

- 【细磨题】已知函数  $f(x) = A \cos \omega x$ , 其中  $A > 0, \omega > 0$  的最小正周期为  $T = 2$ , 且  $f\left(\frac{1}{3}\right) = 2$ , 则函数  $y = f(x)$  的图象向左平移  $\frac{1}{2}$  个单位长度所得图象的解析式为 ( )

- A.  $y = 2 \cos\left(\pi x + \frac{1}{2}\right)$                       B.  $y = 4 \cos\left(\pi x + \frac{1}{2}\right)$   
C.  $y = -4 \sin \pi x$                       D.  $y = 4 \sin \pi x$
- 【研发题】《九章算术》中在“商功”部分有许多立体图形的体积算法, “今有方堡棱, 底为矩, 一点之三度和 6, 周遭面 22 平方, 问立圆积几何?”大意是: 今有一个直四棱柱底面为矩形, 某一顶点的三棱长之和是 6, 全面积是 22, 它的外接球体积

为  $V$ , 则  $V$  的值为 ( )

A.  $\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$

B.  $\frac{7\sqrt{11}}{3}\pi$

C.  $\frac{7\sqrt{14}}{3}\pi$

D.  $\frac{4\sqrt{7}}{3}\pi$

12. 【研发题】若直线  $l$  过椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的

左焦点  $F_1$  与椭圆交于  $A, B$  两点, 右焦点为  $F_2$ , 如果  $\triangle ABF_2$  的面积是 8, 它的内切圆面积为  $\pi$ , 椭圆的短轴长为 6, 则椭圆上的任意一点到直线  $x + y - 10 = 0$  距离的最小值是 ( )

A.  $2\sqrt{5}$

B.  $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

C.  $4\sqrt{2}$

D.  $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

把答案填在题中的横线上)

13. 【研发题】已知角  $\alpha$  的终边经过点  $P(-3, 3)$ , 则

$$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

14. 【研发题】已知  $|\mathbf{a}| = 1, \mathbf{b} = (-2\sqrt{3}, 2)$ , 且向量  $\mathbf{a}$  与向量  $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$  垂直, 则  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角  $\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ .

15. 【细磨题】数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = n^2$ , 则数列

$$\left\{ \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right\} \text{ 的前 } 10 \text{ 项和 } T_{10} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

16. 【细磨题】函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内可导, 且  $f(e^x) = x + 3e^x$ , 则与它在  $x = 1$  处的切线平行且距离为  $\sqrt{17}$  的直线的一般式方程是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 【细磨题】(本小题满分 12 分)

$\triangle ABC$  三内角  $A, B, C$  对边分别为  $a, b, c, a - b\cos C = c\sin B$ .

(I) 求  $B$ ;

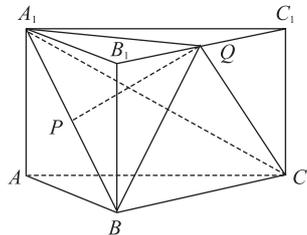
(II) 若  $AC = 2$ , 求  $\triangle ABC$  面积的最大值.

18. 【细磨题】(本小题满分 12 分)

如图, 在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $BA \perp AC$ ,  $A_1B_1 = A_1C_1 = 3\sqrt{2}, CC_1 = 2$ , 点  $P, Q$  分别为  $A_1B$  和  $B_1C_1$  的中点.

(I) 求证:  $PQ \parallel$  平面  $A_1ACC_1$ ;

(II) 求三棱锥  $B - A_1QC$  的体积.



教学考试

19.【研发题】(本小题满分 12 分)

在刚刚过去的 2018 年可谓是我国汽车市场的寒冰期,在 2018 年整个汽车圈的销量基本都有了一定程度的下降,而销量下降就产能过剩,为响应国家“产能过剩”“去库存”战略,经过多年的市场调查,关于某种名牌汽车的使用年限  $x$  和所支出的维修费用  $y$  (万元),有如下的统计资料:(意外事故除外)

使用年限 $x$	2	3	4	5	6
维修费用 $y$	2.3	3.7	5.5	6.5	7.0

由资料知  $y$  与  $x$  呈线性相关关系.

(I) 试用最小二乘法,求线性回归方程:  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ;

(II) 估计当使用年限为 12 年时,维修费用多少万元.

参考数据:

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 20; \sum_{i=1}^5 y_i = 25;$$

$$\begin{cases} \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \\ \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \end{cases}$$

20.【细磨题】(本小题满分 12 分)

已知抛物线  $y^2 = 2px$  的焦点为  $F$ ,  $F$  恰好为椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  的右焦点,过  $F$  作两条相互垂直的弦交抛物线于  $A, B, C, D$ , 设弦  $AB, CD$  的中点分别为  $M, N$ .

(I) 求抛物线的方程;

(II) 求证: 直线  $MN$  恒过定点.

天利 38 套

21.【研发题】(本小题满分 12 分)

设  $a \in \mathbf{R}$ , 函数  $f(x) = e^x$ ;  $h'(x)$  是  $h(x)$  的导函数, 且有  $h'(x) = 2x - 2a, x \in \mathbf{R}$ .

(I) 设  $F(x) = f(x) - h'(x)$ , 求  $F(x)$  的单调增减区间与极值;

(II) 若  $h(0) = 1$ , 当  $a + 1 > \ln 2$  且  $x \geq 0$  时, 求证:  $f(x) \geq h(x)$ .

请考生在第 22, 23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分.

22.【研发题】(本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

曲线  $C_1$  方程为  $\begin{cases} x = 6 + \sqrt{2}t, \\ y = \sqrt{2}t \end{cases}$  ( $t$  为参数), 以  $O$  为

极点的极坐标系中, 曲线  $C_2$  的极坐标方程为  $\rho \sin^2 \theta = 8 \cos \theta$ , 曲线  $C_1$  与曲线  $C_2$  交于点  $A, B$ .

(I) 求  $C_1, C_2$  的直角坐标方程;

(II) 求线段  $AB$  的长.

23.【细磨题】(本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知  $a, b, c$  均为正实数, 函数  $f(x) = |x + a| + |x - b| + c$ .

(I) 当  $a = b = c = 1$  时, 求  $f(x) > 3$  的解集;

(II) 若函数  $f(x)$  的最小值为 4, 且  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq$

$k$  恒成立, 求  $k$  的取值范围.

教学考试



## 数学(文科)

(本试卷满分 150 分,建议用时:120 分钟)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案												

### 一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.)

在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

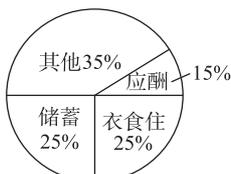
1.【细磨题】已知集合  $A = \{0, 1\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 3x \leq 0\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )

- A.  $\{0, 1\}$     B.  $\{0, 1, 2\}$     C.  $\{2\}$     D.  $\{1\}$

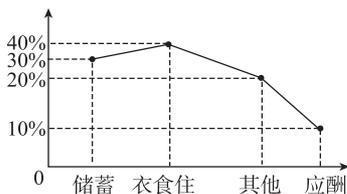
2.【研发题】设复数  $z = ai (a > 0)$ , 且  $|z| = 1$ , 则  $\frac{i}{1+z} =$  ( )

- A.  $\frac{1-i}{2}$     B.  $\frac{1+i}{2}$     C.  $\frac{-1+i}{2}$     D.  $\frac{1+i}{2}$

3.【研发题】小明上个月的工资为 6 000 元,上个月工资各种用途占比统计图如下面的扇形图.而一个月工资各种用途占比统计图如下面的折线图.已知这个月应酬费比上个月少 100 元,则小明这个月工资为 ( )



上个月

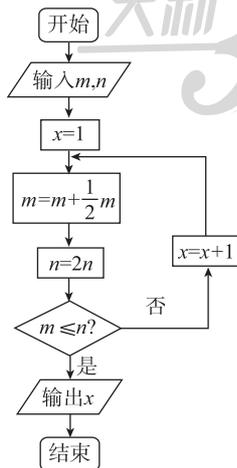


这个月

- A. 6 500 元  
B. 7 000 元  
C. 7 500 元  
D. 8 000 元

4.【研发题】若执行下列算法框图,输入  $m = 8, n = 2$ , 输出  $x =$  ( )

- A. 2  
B. 3  
C. 4  
D. 5



5.【研发题】一次数学竞赛结束后,甲、乙、丙、丁四位同学拿到成绩(分数各不相同)后讨论,甲说:“最高分在乙、丙、丁三人之中”;乙说:“我不是第一,第一是丙”;丙说:“甲、乙两人中有一人是第一”;丁说:“乙说的是事实”.经过调查核实,四人中有两人说的是真话,另外两人说的是假话,由此可判断第一名是 ( )

- A. 甲    B. 乙    C. 丙    D. 丁

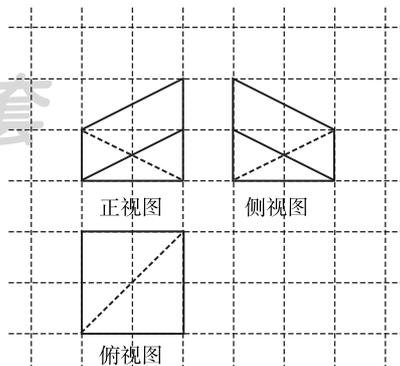
6.【细磨题】直线  $y - kx + 2k - 1 = 0$  被圆  $x^2 + y^2 = 16$  所截得的弦长的最小值为 ( )

- A.  $\sqrt{5}$     B.  $2\sqrt{5}$   
C.  $2\sqrt{11}$     D. 8

7.【研发题】已知  $\sin\alpha + 2\cos\alpha = \frac{2}{13}$ , 则  $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) =$  ( )

- A.  $\frac{17}{7}$     B.  $-\frac{17}{7}$     C.  $\frac{7}{17}$     D.  $-\frac{7}{17}$

8.【研发题】如图,正方形网格长度为 1,某个物体的三视图如图,其各个侧面的面积中最大的一个为 ( )



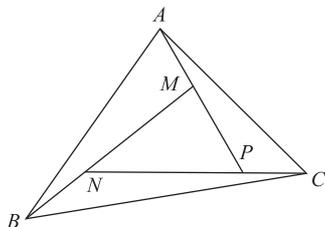
- A. 2    B.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$     C.  $2\sqrt{3}$     D.  $\sqrt{6}$

9.【研发题】已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, |\varphi| <$

$\frac{\pi}{2}$ ), 最小正周期为  $\pi$ , 向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度得到偶函数图象, 则  $f(x)$  的图象 ( )

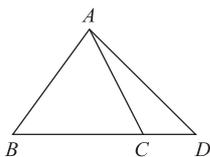
- A. 关于  $x = \frac{\pi}{3}$  对称      B. 关于  $x = -\frac{\pi}{3}$  对称  
C. 关于  $(\frac{\pi}{3}, 0)$  对称      D. 关于  $(-\frac{\pi}{3}, 0)$  对称

10. 【研发题】如图,  $\triangle ABC$  中, 设  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$ ,  $AM = \frac{1}{2}MP$ ,  $CP = \frac{1}{2}PN$ ,  $BN = \frac{1}{2}NM$ , 则  $\overrightarrow{AP} =$  ( )



- A.  $\frac{3}{13}\mathbf{a} + \frac{9}{13}\mathbf{b}$       B.  $\frac{5}{13}\mathbf{a} + \frac{9}{13}\mathbf{b}$   
C.  $\frac{3}{7}\mathbf{a} + \frac{2}{7}\mathbf{b}$       D.  $\frac{9}{13}\mathbf{a} + \frac{3}{13}\mathbf{b}$

11. 【研发题】如图, 设三角形  $ABC$  的角  $A, B, C$  成等差数列, 且满足  $\sin(A-C) - \sin B = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,



$BC$  延长线上有一点  $D$ , 满足  $BD=2$ , 则三角形  $ACD$  面积的最大值为 ( )

- A. 1      B.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$       C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$

12. 【研发题】已知点  $M(-4, 0)$ , 椭圆的长轴长为 4, 设左焦点为  $F(-c, 0)$ , 过点  $F$  作直线  $l$  ( $l$  的斜率存在) 交椭圆于  $A, B$  两点, 若  $\overrightarrow{MF} = \lambda \left( \frac{\overrightarrow{MA}}{|\overrightarrow{MA}|} + \frac{\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MB}|} \right)$  ( $\lambda > 0$ ), 则椭圆的离心率为 ( )

- A.  $\frac{1}{4}$       B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       C.  $\frac{1}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在题中的横线上)

13. 【细磨题】若函数  $f(x) = \begin{cases} \log_2 x + 1, & x > 0, \\ f(x+2), & x \leq 0, \end{cases}$  则  $f(-3) =$  \_\_\_\_\_.

14. 【细磨题】若实数  $x, y$  满足  $\begin{cases} x - y \geq -1, \\ x + y \leq 1, \\ y \geq -1, \end{cases}$  则  $z = 2x + 3y$  的最小值是 \_\_\_\_\_.

15. 【细磨题】已知  $p: -3 \leq 1 - \frac{x-1}{2} \leq 3, q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 (m > 0)$ , 且  $\neg p$  是  $\neg q$  的必要不充分条件, 则实数  $m$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

16. 【细磨题】已知  $x_1, x_2$  是函数  $f(x) = 3\sin 2x + \cos 2x - m$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  内的两个零点, 则  $\sin(x_1 + x_2) =$  \_\_\_\_\_.

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 【细磨题】(本小题满分 12 分)

设等比数列  $\{a_n\}$  满足  $S_3 = 7, a_4 = 4a_2, q > 0$ .

(I) 求  $a_n, S_n$ ;

(II) 是否存在实数  $\lambda$ , 使得  $\{S_n + \lambda\}$  成等比数列, 若存在, 求出  $\lambda$ , 若不存在, 请说明理由.

18.【细磨题】(本小题满分 12 分)

如图 1,在五边形  $ABSCD$  中, $AB=CD=2,CD\parallel AB,AB\perp AD$ ,三角形  $SBC$  为边长为 4 的正三角形,将三角形  $SBC$  沿  $BC$  折起,使得点  $S$  在平面  $ABCD$  上的射影恰好在线段  $AD$  上,如图 2 所示.

(I)求证: $AD\parallel$ 平面  $SBC$ ;

(II)求四棱锥  $S-ABCD$  的侧面积.

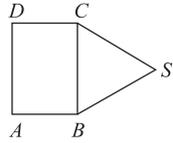


图 1

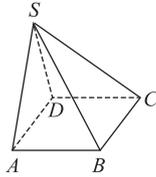


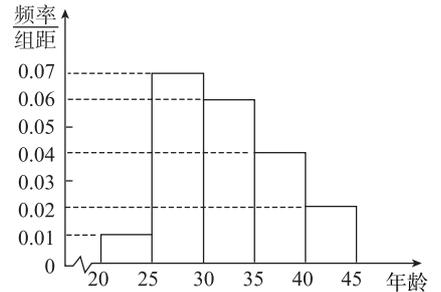
图 2

19.【细磨题】(本小题满分 12 分)

吸烟有害健康,某机构为了调查当前烟民的年龄分布情况随机抽取 100 名吸烟者按年龄分组:第 1 组  $[20,25)$ ,第 2 组  $[25,30)$ ,第 3 组  $[30,35)$ ,第 4 组  $[35,40)$ ,第 5 组  $[40,45]$ ,得到的频率分布直方图如图所示.

(I)若从第 3,4,5 组中用分层抽样的方法抽取 6 名,应从第 3,4,5 组各抽取多少名?

(II)在(I)的条件下,该机构决定在第 3,4 组的志愿者中随机抽取 2 名烟民做健康检查,求第 4 组至少有一名烟民被抽中的概率.



20.【细磨题】(本小题满分 12 分)

已知  $F(1,0)$ ,  $P$  是平面上一动点,  $P$  到直线  $m: x = -1$  上的射影为点  $Q$ , 且满足  $(\overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QF}) \cdot \overrightarrow{QF} = 0$ , 经过  $F$  的直线  $l$  与点  $P$  的轨迹  $C$  相交于两点  $A, B$ , 直线  $AO, BO$  分别交直线  $m$  于点  $M, N$ .

- (I) 求点  $P$  的轨迹  $C$  的方程;
- (II) 求线段  $MN$  的最小值.

21.【研发题】(本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = e^x - ax - \ln(x+1), a \in \mathbf{R}$ .

- (I) 当  $a = 0$  时, 求函数的单调区间;
- (II) 讨论函数  $f(x) = e^x - ax - \ln(x+1), a \in \mathbf{R}$  极值的情况, 试求极值的最大值.

请考生在第 22, 23 两题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分.

22.【细磨题】(本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C$  的参数方程为

$$\begin{cases} x = 4\cos\theta, \\ y = 2\sin\theta \end{cases} (\theta \text{ 为参数}),$$

$$\begin{cases} x = 2 + t\cos\alpha, \\ y = 1 + t\sin\alpha \end{cases} (t \text{ 为参数}).$$

- (I) 求曲线  $C$  的直角坐标方程和直线  $l$  的普通方程;
- (II) 若曲线  $C$  截直线  $l$  所得线段的中点坐标为  $(2, 1)$ , 求  $l$  的斜率.

23.【研发题】(本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

- (I) 解不等式  $|x+1| + 2x - 2 > 0$ ;
- (II)  $a > 1, |x+1| + |ax+1| \geq \frac{1}{2}$  对任意实数  $x$  恒成立, 求  $a$  的最小值.

教学考试



## 数学(文科)

(本试卷满分 150 分,建议用时:120 分钟)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案												

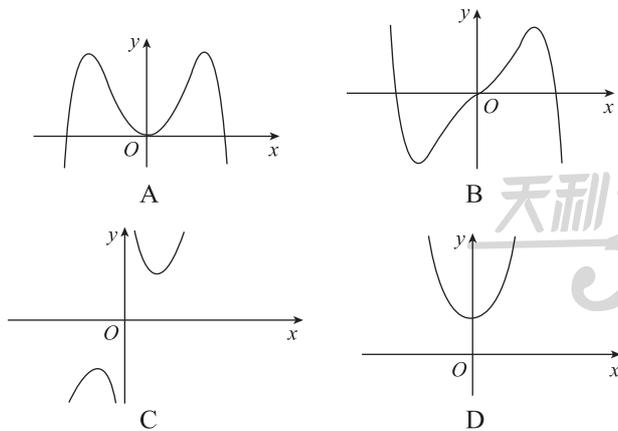
一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1.【研发题】已知集合  $M = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$ ,  $N = \{x | -2 < x < 1\}$ , 则  $M \cap (\complement_{\mathbb{R}} N) =$  ( )  
 A.  $[-2, 1]$                       B.  $(-1, 1]$   
 C.  $[1, 3)$                           D.  $(-2, 3)$

2.【研发题】设  $z = 1 + \frac{1-i}{1+i}$ , 则  $z \cdot (2\bar{z} - 1) =$  ( )  
 A.  $-3 + 2i$                       B.  $3 + i$   
 C.  $2 + 3i$                           D.  $3 - 2i$

3.【研发题】下列函数中,既是幂函数又在定义域内是单调递增的函数是 ( )  
 A.  $y = x\sqrt{x}$                       B.  $y = x|x|$   
 C.  $y = -x^2$                         D.  $y = x^0$

4.【研发题】函数  $f(x) = (e^x + e^{-x}) \cdot \sin x$  的图象大致为 ( )



5.【研发题】已知函数  $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ , 数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项的和为  $S_n$ , 其中,  $a_n$  为  $S_n$ ,  $f\left(\frac{11\pi}{6}\right)$  的等差中项, 则  $a_6 =$  ( )  
 A. 16                      B. 32                      C. -16                      D. -32

6.【研发题】已知函数  $f(x) = \cos^2 \omega x - \frac{1}{2} \sin^2 \omega x - \frac{1}{4}$  的零点间的最小距离是  $\frac{\pi}{2}$ , 将函数  $y = f(x)$  的图象向右平移  $\frac{1}{4}$  个周期后, 得到  $g(x)$  的图象, 下列结论正确的是 ( )

A.  $f(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  上单调递增, 其图象关于直线  $x = \frac{\pi}{4}$  对称

B.  $f(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  上单调递增, 其图象关于直线  $x = \frac{\pi}{2}$  对称

C.  $g(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  上单调递增, 其图象关于直线  $x = \frac{\pi}{4}$  对称

D.  $g(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  上单调递增, 其图象关于直线  $x = \frac{\pi}{2}$  对称

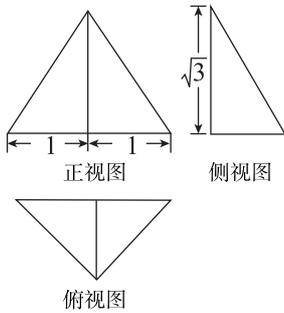
7.【研发题】有 4 个扶贫工作小组, 甲、乙两名大学生各自参加其中一个小组, 每位学生参加各个小组的可能性相同, 则这两位学生参加不同小组的概率为 ( )

A.  $\frac{1}{3}$                                       B.  $\frac{1}{2}$

C.  $\frac{2}{3}$                                       D.  $\frac{3}{4}$

8.【细磨题】一个几何体的三视图如图所示, 其中正视图是一个正三角形, 俯视图是一个等腰直角三

角形,则该几何体的表面积为 ( )



- A.  $\sqrt{3}+1+\sqrt{7}$       B.  $3\sqrt{2}+2+\sqrt{7}$   
 C.  $2\sqrt{7}+1+\sqrt{3}$       D.  $\sqrt{3}+2\sqrt{7}+2$

9. 【研发题】线性规划是运筹学中发展最快、应用广泛、方法最成熟的一个重要分支,它是辅助人们进行科学管理的一种数学方法,是研究线性约束条件下线性目标函数的极值问题的数学理论和方法.英文缩写 LP. 若  $x, y$  满足约束条件

$$\begin{cases} x-2y \leq 2, \\ x-y \geq -1, \\ -1 \leq y \leq 1, \end{cases}$$

则  $z=2x-y$  的最大值为 ( )

- A. 6      B. 7      C. 8      D. 9

10. 【研发题】已知函数  $f(x)=2e^x+\frac{1}{3}x^3-4x-\frac{2}{e^x}$ ,

其中  $e$  是自然对数的底数,若  $f(a^2-1)+f(4a+4) \leq 0$ ,对任意  $t \in \mathbf{R}$ ,不等式  $mt^2-mt+2 \geq a$  恒成立,则实数  $m$  的取值范围是 ( )

- A.  $[-2, 6]$       B.  $[-1, 10]$   
 C.  $[0, 12]$       D.  $[1, 14]$

11. 【细磨题】已知函数  $f(x)=\frac{e^x}{x^2}+k\ln x-\frac{1}{2}kx$ ,若  $x=2$  是函数  $f(x)$  的唯一极值点,则实数  $k$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-\infty, \frac{e^2}{2})$       B.  $(-\infty, \frac{e^2}{3})$   
 C.  $(-\infty, \frac{e^2}{4})$       D.  $(-\infty, e^2)$

12. 【研发题】三棱锥  $P-ABC$  中,  $PB \perp$  平面  $ABC$ ,  $\triangle PAB$  的面积为  $4\sqrt{3}$ ,  $\angle ACB=60^\circ$ ,则三棱锥  $P-ABC$  外接球体积的最小值为 ( )

- A.  $\frac{56\sqrt{3}}{3}\pi$       B.  $\frac{32\sqrt{2}}{3}\pi$   
 C.  $\frac{46\sqrt{2}}{3}\pi$       D.  $\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 把答案填在题中的横线上)

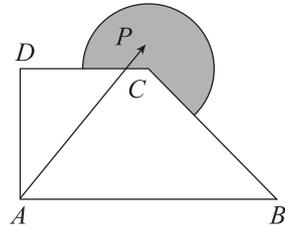
13. 【研发题】已知函数  $f(\frac{x}{2})=x^3+a\ln \frac{x}{2}$  的图象在

点  $(1, f(1))$  处的切线过点  $(2, 38)$ , 则  $a=$  \_\_\_\_\_.

14. 【研发题】已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $S_6=51, S_{17}=425$ , 则数列  $\{\frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}\}$  的前 5 项和等于 \_\_\_\_\_.

15. 【研发题】已知双曲线  $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 (a>0, b>0)$  的上、下顶点分别为  $A_1, A_2$ , 过  $A_2$  且与渐近线垂直的直线分别与该渐近线和  $x$  轴相交于  $B, C$  两点,  $O$  为坐标原点, 若  $\overrightarrow{BA_2}+2\overrightarrow{BC}=\mathbf{0}$ , 则双曲线的离心率为 \_\_\_\_\_.

16. 【细磨题】如图,在直角梯形  $ABCD$  中,  $AB \perp AD$ ,  $AB \parallel CD$ ,  $AB=4, AD=CD=2$ , 图中圆弧所在圆的圆心为点  $C$ , 半径为 1, 且点  $P$  在图中阴影部分(包括边界)运动. 若  $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ , 其中  $x, y \in \mathbf{R}$ , 则  $8x+4y$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.



三、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 【研发题】(本小题满分 12 分)

在锐角  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $b\sin A \cos B + b\cos A \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ .

(I) 若  $a=2c=4$ , 求  $b$ ;

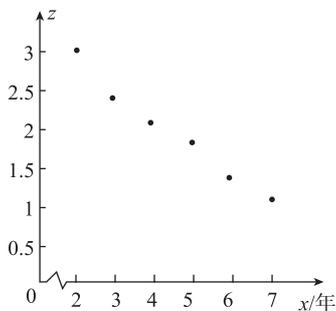
(II) 若  $\sin A \sin C = \frac{1}{4}$ , 且  $b=2\sqrt{3}$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

18.【细磨题】(本小题满分 12 分)

二手车经销商小王对其所经营的 A 型号二手汽车的使用年数  $x$  与销售价格  $y$  (单位: 万元/辆) 进行整理, 得到如下数据:

使用年数 $x$	2	3	4	5	6	7
售价 $y$	20	12	8	6.4	4.4	3
$z = \ln y$	3.00	2.48	2.08	1.86	1.48	1.10

下面是  $z$  关于  $x$  的散点图:



(I) 由散点图看出, 可以用线性回归模型拟合  $z$  和  $x$  的关系, 请用相关系数加以说明;

(II) 求  $y$  关于  $x$  的回归方程, 某辆 A 型号二手汽车售价大约为 14 600 元, 根据求出的回归方程预测在收购该型号二手汽车时, 车辆的使用年数不得超过多少年? ( $\hat{b}, \hat{a}$  的值精确到 0.01)

$$\text{参考公式: } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

$$\text{相关系数 } r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.$$

$$\text{参考数据: } \sum_{i=1}^6 x_i y_i = 187.4, \sqrt{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2} \approx 4.18,$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^6 (y_i - \bar{y})^2} \approx 13.96, \sqrt{\sum_{i=1}^6 (z_i - \bar{z})^2} \approx 1.53,$$

$$\ln 1.46 \approx 0.38.$$

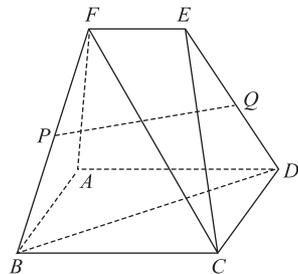
19.【细磨题】(本小题满分 12 分)

如图, 多面体  $ABCDEF$  中, 四边形  $ABCD$  是边长为 2 的正方形, 平面  $ADEF$  垂直于平面  $ABCD$ , 且  $FA \perp AD$ ,  $BC \parallel$  平面  $ADEF$ ,  $EF = AF = 1$ .

(I) 设  $M$  是线段  $CF$  上一动点, 求证:  $BD \perp AM$ ;

(II) 若  $P, Q$  分别为棱  $BF$  和  $DE$  的中点, 求证:  $PQ \parallel$  平面  $ABCD$ ;

(III) 求多面体  $ABCDEF$  的体积.



20.【细磨题】(本小题满分 12 分)

已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{1}{2}$ , 过点  $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{2})$ .

(I) 求椭圆的标准方程;

(II) 若  $M$  为  $y$  轴正半轴上的定点, 过  $M$  的直线  $l$  交椭圆于  $A, B$  两点, 设  $O$  为坐标原点,  $S_{\triangle AOB} = -\frac{3}{2} \tan \angle AOB$ , 求点  $M$  的坐标.

21.【细磨题】(本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = a^2x^2 - 3ax + \ln x (a \in \mathbf{R})$ .

(I) 求  $f(x)$  的单调区间;

(II) 若对于任意的  $x \geq e^2$  ( $e$  为自然对数的底数),  $f(x) \geq 0$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

请考生在第 22, 23 两题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分.

22.【研发题】(本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系  $xOy$  中, 平面区域  $P: x + 2 \geq k|y|$ . 以坐标原点为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho = 6\cos\theta$ .

(I) 求  $C$  的直角坐标方程;

(II) 若  $C$  在平面区域  $P$  内, 求  $k$  的取值范围.

23.【研发题】(本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数  $f(x) = |x + 2k| + |2x - 1| (k \in \mathbf{R})$ .

(I) 若  $k = 2$ , 求不等式  $f(x) \geq |2x - 1| + 4$  的解集;

(II) 设  $k < -2$ , 当  $x \in [1, 2]$  时都有  $f(x) \geq x^2 - 2x + 4$ , 求  $k$  的取值范围.

教学考试