2021 届高考理科数学模拟预热卷（全国III卷）

【满分：150 分】

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

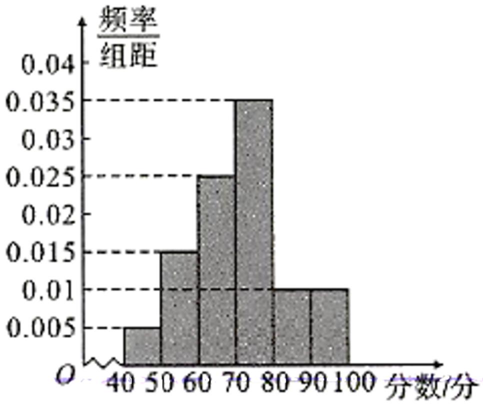
1.已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|\ x^2-1>0\}$，$B=\{x|2x-1>0\}$，则 $(\complement_U A)\cap B=(\quad)$

A. $\left(\frac{1}{2},1\right)$　　B. $\left(\frac{1}{2},1\right]$　　C. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $\left[-1,\frac{1}{2}\right)$

2.若 $z=1-\mathrm{i}$，则 $\left|\frac{\bar{z}}{z}\right|=(\quad)$

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B.1　　C. $\sqrt{2}$　　D.2

3.某校统计了 1200 名学生的数学学业水平考试成绩，得到样本频率分布直方图，如图.已知不低于 60 分为及格，不低于 80 分为优秀，则数学成绩的平均分、众数、中位数及成绩优秀的学生人数分别是(　　)



A.71，75，71.4，240　　B.71，75，70，120

C.72，75，75，24　　D.70，75，71.4，120

4.某公司为激励创新,计划逐年加大研发资金投入.若该公司 2015 年全年投入研发资金 130 万元,在此基础上,每年投入的研发资金比上一年增长12%,则该公司全年投入的研发资金开始超过 200 万元的年份是(　　)

(参考数据: $\lg 1.12\approx 0.05$, $\lg 1.3\approx 0.11$, $\lg 2\approx 0.30$)

A.2018 年　　B.2019 年　　C.2020 年　　D.2021 年

5.已知双曲线 $C:\frac{x^2}{3}-y^2=1$,O 为坐标原点，F 为 C 的右焦点，过 F 的直线与 C 的两条渐近线的交点分别为 M,N.若 $\triangle OMN$ 为直角三角形，则 $|MN|=(\quad)$

A. $\frac{3}{2}$　　B.3　　C. $2\sqrt{3}$　　D.4

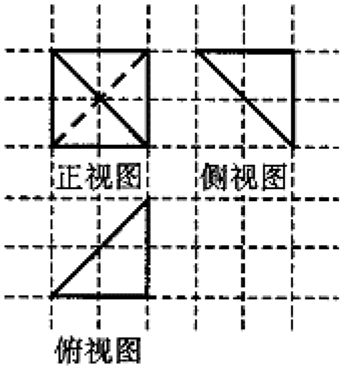
6.已知 $\boldsymbol{a}=(2,3),\boldsymbol{b}=(-4,7)$,则向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向的投影是(　　)。

A. $\sqrt{13}$　　B. $\frac{\sqrt{13}}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{65}}{5}$　　D. $\sqrt{65}$

7.在$\triangle ABC$中,a,b,c 分别是内角 A,B,C 的对边,若 $a=2b\cos C$,则$\triangle ABC$ 的形状是(　　)。

A.等腰三角形　　B.钝角三角形　　C.直角三角形　　D.锐角三角形

8.如图所示,网格纸上小正方形的边长为 1,粗线条表示的是某三棱锥的三视图,则该三棱锥的四个面中面积最小是(　　)



A. $2\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C.2　　D. $\sqrt{3}$

9.在$\triangle ABC$中,若 $\sin(A-B)=1+2\cos(B+C)\sin(A+C)$,则$\triangle ABC$ 的形状一定是(　　)

A.等边三角形　　B.不含 60°角的等腰三角形

C.钝角三角形　　D.直角三角形

10.设 O 为坐标原点，直线 $x=a$ 与双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线分别交于 D,E 两点.若 $\triangle ODE$ 的面积为 8，则 C 的焦距的最小值为(　　)

A.4　　B.8　　C.16　　D.32

11.已知 P 是椭圆 $M:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 上的动点,过点 P 作圆 $N:x^2+y^2=1$ 的两条切线分别与圆 N 相切于点 A,B ,直线 AB 与 x 轴、 y 轴分别相交于 C,D 两点,则$\triangle COD$ (O 为坐标原点)面积的最小值为(　　)

A.1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{8}$

12.已知函数 $f(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}bx^2+cx$ 的导函数 $f'(x)$ 是偶函数,若方程 $f'(x)-\ln x=0$ 在

$[\frac{1}{e},e]$上有两个不相等的实数根,则实数 c 的取值范围是(　　)

A. $[-1-\frac{1}{2e^2},-\frac{1}{2})$　　B. $[-1-\frac{1}{2e^2},-\frac{1}{2}]$　　C. $[1-\frac{1}{2}e^2,-\frac{1}{2})$　　D. $[1-\frac{1}{2}e^2,-\frac{1}{2}]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geq 1,\\ x+3\geq 3y,\\ x\leq 2y+1,\end{cases}$ 则 $z=x-y$ 的最大值为__________.

14. $\left(2x-\frac{1}{8x^3}\right)^8$ 的展开式中的常数项为__________.

15.已知三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=PB=2PC=2$，ΔABC 是边长为 $\sqrt{3}$ 的正三角形，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球半径为__________.

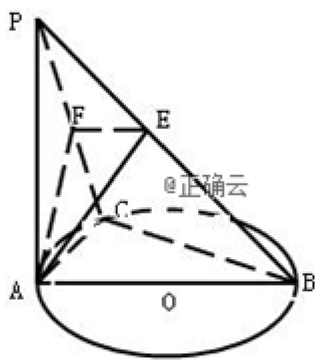
16.如图,$PA\perp\odot O$ 所在的平面,AB 是 $\odot O$ 的直径,C 是 $\odot O$ 上的一点,$AE\perp PB$ 于 E, $AF\perp PC$ 于 F,

下列四个命题中：

① $BC\perp$ 面 PAC；② $AF\perp$ 面 PBC；

③ $EF\perp PB$；④ $AE\perp$ 面 PBC.

其中正确命题的是______.(请写出所有正确命题的序号)



三、解答题：共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 22，23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17. （12 分）已知首项为 $\frac{3}{2}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$,且 $-2S_2,S_3,4S_4$ 成等差数列.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)证明: $S_n+\dfrac{1}{S_n}\le\dfrac{13}{6}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.

18. （12 分）自由购是通过自助结算方式购物的一种形式.某大型超市为调查顾客使用自由购的情况，随机抽取了 100 人，统计结果整理如表所示.

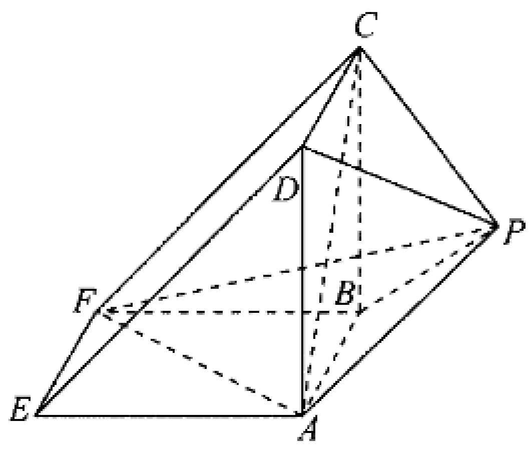
年龄	20 以下	$[20,30)$	$[30,40)$	$[40,50)$	$[50,60)$	$[60,70]$	70 以上
使用人数	3	12	17	6	4	2	0
未使用人数	0	0	3	14	36	3	0

(1)现随机抽取 1 名顾客，试估计该顾客年龄在$[30,50)$且未使用自由购的概率；

(2)从被抽取的年龄在$[50,70]$使用自由购的顾客中，随机抽取 3 人进一步了解情况，用 X 表示这 3 人中年龄在$[50,60)$的人数，求随机变量 X 的分布列及数学期望；

(3)为鼓励顾客使用自由购，该超市拟对使用自由购的顾客赠送 1 个环保购物袋.若某日该超市预计有 5 000 人购物，试估计该超市当天至少应准备多少个环保购物袋.

19. （12 分）如图所示,该几何体是由一个直三棱柱 $ADE-BCF$ 和一个正四棱锥 $P-ABCD$ 组合而成的, $AD\perp AF, AE=AD=2$.



(1)证明：平面 $PAD\perp$平面 $ABFE$;

(2)求正四棱锥 $P-ABCD$ 的高 h ,使得二面角 $C-AF-P$ 的余弦值是 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

20. （12 分）已知抛物线 C 的顶点在原点,焦点在 x 轴上,且抛物线 C 上有一点 $P(4,h)$ 到焦点的距离为 5.

(1)求该抛物线 C 的方程.

(2)已知抛物线上一点 $M\left(t,4\right)$,过点 M 作抛物线的两条弦 MD 和 ME ,且 $MD\perp ME$,判断直线 DE 是否过定点?并说明理由.

21. （12 分）设函数 $f\left(x\right)=x\ln x+\frac{1}{2}ax^2-\left(a+1\right)x+\frac{1}{2}a+1(a\in\mathbf{R})$， $g\left(x\right)=f'\left(x\right)$.

(1)若 $a=-1$，求函数 $g\left(x\right)$ 的单调区间.

(2)若函数 $f\left(x\right)$ 有 2 个零点，求实数 a 的取值范围.

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22，23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22. [选修 4 – 4：坐标系与参数方程]（10 分）

已知在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+\cos\alpha,\\ y=2+\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数).以坐标原点 O 为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho(\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta)=1$.

(1)分别求曲线 C_1 的普通方程和曲线 C_2 的直角坐标方程.

(2)若 P,Q 分别是曲线 C_1 和曲线 C_2 上的动点,求 $|PQ|$ 的最小值.

23. [选修 4 – 5：不等式选讲]（10 分）

已知存在 $x_0\in\mathbf{R}$,使得 $|x_0+a|-|x_0-b|\geq 4,a,b\in\mathbf{R}^+$.

(I)求 $a+b$ 的取值范围;

(II)证明： $a^4+b^4\geq 32$.

答案以及解析

一、选择题

1.答案：B

解析：因为 $A=\left\{x\left|x^2-1>0\right.\right\}=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，所以 $\complement_U A=[-1,1]$.又集合

$B=\{x\,|\,2x-1>0\}=\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，所以 $\left(\complement_U A\right)\cap B=\left(\frac{1}{2},1\right]$，故选 B.

2.答案：B

解析：由题意，得 $\frac{\overline{z}}{z}=\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(1+\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{2\mathrm{i}}{2}=\mathrm{i}$，则 $\left|\frac{\overline{z}}{z}\right|=1$.

故选 B.

3.答案：A

解析：平均分为

$45\times0.005\times10+55\times0.05\times10+65\times0.025\times10+75\times0.035\times10+85\times0.01\times10+95\times0.01\times10=71$

，众数为 75.

前三个小矩形的面积和为 $(0.005+0.015+0.025)\times10=0.45$，第四个小矩形的面积为

$0.035\times10=0.35$，

所以中位数应位于第四个小矩形中，设其底边为 x，高为 0.035，所以 $0.035x=0.05$，解得

$x\approx1.4$，

故成绩的中位数为 71.4.成绩优秀的学生人数为 $1200\times(0.01+0.01)\times10=240$.故选 A.

4.答案：B

解析：设经过 x 年后该公司全年投入的研发资金开始超过 200 万元，则 $130(1+12\%)^x>200$,即 $1.12^x>\frac{2}{1.3}\Rightarrow x>$

因为 x 取整数,所以取 $x=4$，所以该公司全年投入的研发资金开始超过 200 万元的年份是

2019 年。故选 B.

5.答案：B

解析：因为双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，所以 $\angle MON=60^\circ$.不妨设过点 F

的直线与渐近线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 交于点 M，且 $\angle OMN=90^\circ$，则 $\angle MFO=60^\circ$，又直线 MN 过点

$F(2,0)$，所以直线 MN 的方程为 $y=-\sqrt{3}(x-2)$，由 $\begin{cases} y=-\sqrt{3}(x-2), \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\dfrac{3}{2}, \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$ 所以点 M 的坐标为 $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以 $|OM|=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$，所以 $|MN|=\sqrt{3}|OM|=3$.故选 B.

6.答案：C

解析：根据题意,向量 $\boldsymbol{a}=(2,3),\boldsymbol{b}=(-4,7)$,

则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times(-4)+3\times7=13$,

而 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}$,

则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影为 $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{13}{\sqrt{65}}=\dfrac{\sqrt{65}}{5}$；

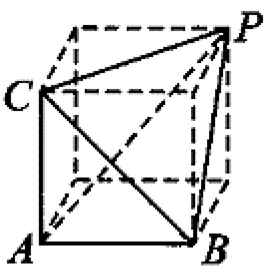
故选：C。

7.答案：A

解析：在 $\triangle ABC$ 中,$\because a=2b\cos C$,$\therefore$ 由余弦定理可得 $a=2b\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,化简可得 $b^2=c^2$,即 $b=c$,故 $\triangle ABC$ 为等腰三角形,故选 A。

8.答案：C

解析：由三视图可知,三棱锥的直观图的示意图如图中的 $P-ABC$,图中正方体的棱长为 2.由图知,三棱锥 $P-ABC$ 的四个面中面积最小是 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times2\times2=2$.故选 C.



9.答案：D

解析：由题意,利用三角恒等变换公式,化简得 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=1+2(-\cos A)\sin B$,即

$\sin A\cos B-\cos A\sin B=1-2\cos A\sin B$,即 $\sin A\cos B+\cos A\sin B=1$,得 $\sin(A+B)=1$,即

$\sin C=1$,所以 $C=90^\circ$,所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

10.答案：B

解析：由题意知双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，因为 D、E 分别为直线 $x=a$ 与双曲线 C 的两条渐近线的交点，所以不妨设 $D(a,b)$，$E(a,-b)$，所以 $S_{\triangle ODE}=\frac{1}{2}\times a\times|DE|=\frac{1}{2}\times a\times 2b=ab=8$，所以 $c^2=a^2+b^2\geq 2ab=16$，所以 $c\geq 4$，所以 $2c\geq 8$，所以 C 的焦距的最小值为 8，故选 B.

11.答案：D

解析：设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),P(x_0,y_0)$.因为 PA 是圆 $x^2+y^2=1$ 的切线,且切点为 A,所以 PA 的方程为 $x_1x+y_1y=1$.同理,PB 的方程为 $x_2x+y_2y=1$.又因为 PA,PB 交于点 P,所以点 P 的坐标满足切线方程,即 $x_1x_0+y_1y_0=1,x_2x_0+y_2y_0=1$,所以直线 AB 的方程为 $x_0x+y_0y=1$.令 $y=0$,得点 C 的坐标为 $\left(\frac{1}{x_0},0\right)$；令 $x=0$,得点 D 的坐标为 $\left(0,\frac{1}{y_0}\right)$.所以 $S_{\triangle COD}=\frac{1}{2}|OC|\cdot|OD|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{|x_0y_0|}$.又因为 $P(x_0,y_0)$ 是椭圆 $M:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 上的点,所以 $\frac{x_0^2}{16}+\frac{y_0^2}{4}=1$,所以 $1=\frac{x_0^2}{16}+\frac{y_0^2}{4}\geq 2\sqrt{\frac{x_0^2}{16}\cdot\frac{y_0^2}{4}}=\frac{1}{4}|x_0y_0|$ (当且仅当 $|x_0|=|2y_0|$ 时等号成立),所以 $|x_0y_0|\leq 4$ (当且仅当 $|x_0|=|2y_0|$ 时等号成立).所以 $S_{\triangle COD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{|x_0y_0|}\geq\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$,所以 $\triangle COD$ 面积的最小值为 $\frac{1}{8}$.故选 D.

12.答案：A

解析：$\because f(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}bx^2+cx$,$\therefore f'(x)=\frac{1}{2}x^2+bx+c$,又 $f'(x)$ 是偶函数,$\therefore b=0$ $\therefore f'(x)=\frac{1}{2}x^2+c$.方程 $f'(x)-\ln x=0$ 在 $[\frac{1}{e},e]$ 上有两个不相等的实数根,即 $\frac{1}{2}x^2+c-\ln x=0$ 在 $[\frac{1}{e},e]$ 上有两个不相等的实数根,即 $\ln x-\frac{1}{2}x^2=c$ 在 $[\frac{1}{e},e]$ 上有两个不相等的实数根,令 $\varphi(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2$,则 $\varphi(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2$ 的图像与直线 $y=c$ 在 $[\frac{1}{e},e]$ 上有两个不同的交点.

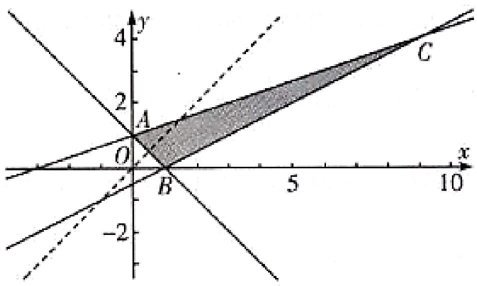
$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-x=\frac{1-x^2}{x}$,当 $x\in(\frac{1}{e},1)$ 时,$\varphi'(x)>0$,$\varphi(x)$ 单调递增,当 $x\in(1,e)$ 时,$\varphi'(x)<0$,$\varphi(x)$ 在单调递减,$\therefore$ 当 $x\in[\frac{1}{e},e]$ 时,$\varphi(x)_{\max}=\varphi(1)=-\frac{1}{2}$.又 $\varphi(\frac{1}{e})=-1-\frac{1}{2e^2}>\varphi(e)=1-\frac{1}{2}e^2$,且

$\varphi(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2$ 的图象与直线 $y=c$ 在 $[\frac{1}{e},e]$ 上有两个不同的交点,∴ $-1-\frac{1}{2e^2}\le c<-\frac{1}{2}$.故选 A.

二、填空题

13.答案：5

解析：作出不等式组所表示的平面区域,如下图阴影部分所示.观察可知,当直线 $z=x-y$ 过点 $C(9,4)$时，z 有最大值 5.



14.答案：28

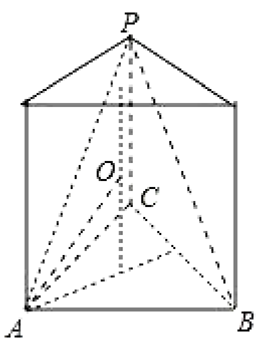
解析：$T_{r+1}=C_8^r(2x)^{8-r}\left(-\frac{1}{8x^3}\right)^r=(-1)^r2^{8-4r}C_8^rx^{8-4r}$,

由 $8-4r=0$,得 $r=2$,

故所求的常数项为 $(-1)^2C_8^2=28$.

15.答案：$\frac{\sqrt{5}}{2}$

解析：由题意可得,PC⊥平面 ABC,以 PC 为一条侧棱,△ABC 为底面把三棱锥 $P-ABC$ 补成一个直三棱柱,



则该直三棱柱的外接球就是三棱锥 $P-ABC$ 的外接球，且该直三棱柱上、下底面的外接圆圆心连线的中点就是球心，∵底面外接圆的半 r=1,∴三棱锥 $P-ABC$ 的外接球半径

$R=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.故答案为：$\frac{\sqrt{5}}{2}$

16.答案：①②③

解析：

∵ $PA\perp\odot O$所在的平面,

∴ $PA\perp BC$,

又∵AB是$\odot O$的直径

∴ $AC\perp BC$,由线面垂直的判定定理,可得$BC\perp$面PAC,故①正确；

又由$AF\subset$平面PAC

∴ $AF\perp BC$,结合$AF\perp PC$于F,

由线面垂直的判定定理,可得$AF\perp$面PBC,故②正确；

又∵ $AE\perp PB$于E,结合②的结论

我们易得$EF\perp$平面PAB

由$PB\subset$平面PAB,可得$PB\perp EF$,故③正确；

由②的结论,及过一点有且只一条直线与已知平面垂直,故④错误；

故答案为：①②③

根据已知中,$PA\perp\odot O$所在的平面,AB是$\odot O$的直径,C是$\odot O$上的一点,$AE\perp PB$于E,

$AF\perp PC$于F,结合线面垂直的判定定理,我们逐一对已知中的四个结论进行判定,即可得到答案.

三、解答题

17.答案：(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q ，

因为$-2S_2,S_3,4S_4$成等差数列,

所以$S_3+2S_2=4S_4-S_3$,即$S_4-S_3=S_2-S_4$,可得$2a_4=-a_3$,

于是$q=\dfrac{a_4}{a_3}=-\dfrac{1}{2}$.

又$a_1=\dfrac{3}{2}$,所以等比数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{3}{2}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{3}{2^n}$.

(2) $S_n=1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$,$S_n+\dfrac{1}{S_n}=1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+\dfrac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n}=\begin{cases}2+\dfrac{1}{2^n\left(2^n+1\right)},n\text{ 为奇数},\\2+\dfrac{1}{2^n\left(2^n-1\right)},n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

当 n 为奇数时,$S_n+\frac{1}{S_n}$ 随 n 的增大而减小,所以 $S_n+\frac{1}{S_n}\le S_1+\frac{1}{S_1}=\frac{13}{6}$;

当 n 为偶数时,$S_n+\frac{1}{S_n}$ 随 n 的增大而减小,所以 $S_n+\frac{1}{S_n}\le S_2+\frac{1}{S_2}=\frac{25}{12}$.

故对于 $n\in\mathbf{N}^*$,有 $S_n+\frac{1}{S_n}\le\frac{13}{6}$.

18.答案：（1）在随机抽取的 100 名顾客中，年龄在 $[30,50)$ 且未使用自由购的共有 $3+14=17$（人），所以随机抽取 1 名顾客，估计该顾客年龄在 $[30,50)$ 且未使用自由购的概率 $P=\frac{17}{100}$.

（2）X 所有可能的取值为 1，2，3.

$P(X=1)=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5}$, $P(X=2)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5}$, $P(X=3)=\frac{C_4^3C_2^0}{C_6^3}=\frac{1}{5}$.

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

所以 X 的数学期望为 $E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{5}=2$.

（3）在随机抽取的 100 名顾客中，

使用自由购的共有 $3+12+17+6+4+2=44$（人），

所以该超市当天至少应准备环保购物袋的个数估计为 $\frac{44}{100}\times 5\,000=2\,200$.

19.答案：(1)在直三棱柱 $ADE-BCF$ 中,$AB\perp$ 平面 ADE,

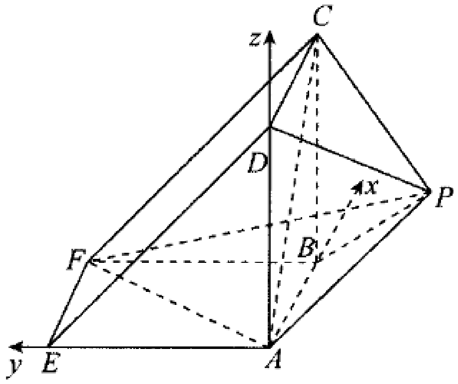
$AD\subset$ 平面 ADE,所以 $AB\perp AD$.

又 $AD\perp AF, AB\cap AF=A, AB\subset$ 平面 $ABFE, AF\subset$ 平面 $ABFE$,

所以 $AD\perp$ 平面 $ABFE$.

因为 $AD\subset$ 平面 PAD,所以平面 $PAD\perp$ 平面 $ABFE$.

(2)由(1)知 $AD\perp$ 平面 $ABFE$,如图,以 A 为原点,AB, AE, AD 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,



则 $A(0,0,0),F(2,2,0),C(2,0,2),P(1,-h,1),\overrightarrow{AF}=(2,2,0),\overrightarrow{AC}=(2,0,2),\overrightarrow{AP}=(1,-h,1)$.

设平面 AFC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AF}=2x_1+2y_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=2x_1+2z_1=0,\end{cases}$ 取 $x_1=1$,则 $y_1=z_1=-1$,

所以 $\boldsymbol{m}=(1,-1,-1)$.

设平面 AFP 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=2x_2+2y_2=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=x_2-hy_2+z_2=0,\end{cases}$ 取 $x_2=1$,则 $y_2=-1,z_2=-1-h$,

所以 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-1-h)$.

因为二面角 $C-AF-P$ 的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|1+1+1+h|}{\sqrt{3}\times\sqrt{2+(h+1)^2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,

解得 $h=1$ 或 $h=-\dfrac{3}{5}$(舍),

所以正四棱锥 $P-ABCD$ 的高 $h=1$.

20.答案:(1)由题意可设抛物线 C 的方程为 $y^2=2px(p>0)$,

其准线方程为 $x=-\dfrac{p}{2}$.

$\because$ 点 $P(4,h)$ 到焦点的距离等于其到其准线的距离,

$\therefore 4+\dfrac{p}{2}=5,\therefore p=2.\therefore$ 抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.

(2)由(1)可得点 $M(4,4)$,且直线 DE 的斜率不为 0,设直线 DE 的方程为 $x=my+n$,

联立$\begin{cases} x = my + n, \\ y^2 = 4x, \end{cases}$得 $y^2 - 4my - 4n = 0$,则 $\Delta = 16m^2 + 16n > 0$.①

设 $D(x_1, y_1), E(x_2, y_2)$,则 $y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -4n$.

$\because \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{ME} = (x_1 - 4, y_1 - 4) \cdot (x_2 - 4, y_2 - 4)$

$= x_1 x_2 - 4(x_1 + x_2) + 16 + y_1 y_2 - 4(y_1 + y_2) + 16$

$= \dfrac{y_1^2}{4} \cdot \dfrac{y_2^2}{4} - 4\left(\dfrac{y_1^2}{4} + \dfrac{y_2^2}{4}\right) + 16 + y_1 y_2 - 4(y_1 + y_2) + 16$

$= \dfrac{(y_1 y_2)^2}{16} - (y_1 + y_2)^2 + 3y_1 y_2 - 4(y_1 + y_2) + 32$

$= n^2 - 16m^2 - 12n - 16m + 32 = 0$,

即 $n^2 - 12n + 32 = 16m^2 + 16m$,

得 $(n-6)^2 = 4(2m+1)^2$,

$\therefore n - 6 = \pm 2(2m+1)$,即 $n = 4m + 8$ 或 $n = -4m + 4$,

代入①式检验知 $n = 4m + 8$ 满足 $\Delta > 0$ 恒成立,

$\therefore$ 直线 DE 的方程为 $x = my + 4m + 8 = m(y+4) + 8$.

$\therefore$ 直线 DE 过定点 $(8, -4)$.

21.答案：(1)因为函数 $f(x) = x\ln x + \dfrac{1}{2}ax^2 - (a+1)x + \dfrac{1}{2}a + 1$ ，

所以 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ， $f'(x) = \ln x + 1 + ax - a - 1 = \ln x + ax - a$.

又 $g(x) = f'(x)$ ，所以 $g(x) = \ln x + ax - a$

若 $a = -1$ ，则 $g(x) = \ln x - x + 1$ ，所以 $g'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$.

令 $g'(x) > 0$ ，得 $0 < x < 1$ ，即当 $0 < x < 1$ 时，函数 $g(x)$ 单调递增.

令 $g'(x) < 0$ ，得 $x > 1$ ，即当 $x > 1$ 时，函数 $g(x)$ 单调递减.

综上可知，函数 $g(x)$ 的单调增区间为 $(0,1)$ ，单调减区间为 $(1, +\infty)$.

(2)因为 $g(x) = \ln x + ax - a$ ，所以 $g'(x) = \dfrac{1}{x} + a = \dfrac{1+ax}{x}$ ， $g(1) = 0 + a - a = 0$.

又 $g(x) = f'(x)$ ，所以 $f'(1) = 0$.

①当$a\ge 0$时，$g'(x)>0$，所以函数$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

当$x\in(0,1)$时，$g(x)<0$，所以函数$f(x)$在$(0,1)$上单调递减；

当$x\in(1,+\infty)$时，$g(x)>0$，所以函数$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增.

即当$x=1$时，$f(x)$取得最小值，为$f(1)=0+\frac{1}{2}a-(a+1)+\frac{1}{2}a+1=0$.

所以当$a\ge 0$时，函数$f(x)$只有一个零点，所以$a\ge 0$不满足题意.

②当$a<-\frac{1}{a}<1$，即$a<-1$时，$g'(x)=\frac{1+ax}{x}$.

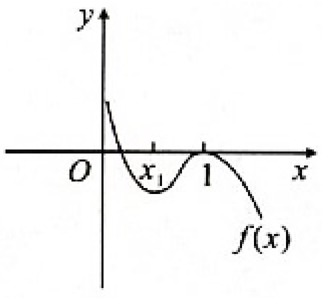
令$g'(x)>0$，得$0<x<-\frac{1}{a}$；令$g'(x)<0$，得$x>-\frac{1}{a}$.

所以函数$g(x)$在$\left(0,-\frac{1}{a}\right)$上单调递增，在$\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减.

又$g(1)=0$，所以$\exists x_1\in\left(0,-\frac{1}{a}\right)$，使$g(x_1)=0$

所以函数$f(x)$在$(0,x_1)$上单调递减，在$(x_1,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减.

作出函数$f(x)$的示意图，如图(1).



图(1)

要使函数$f(x)$有两个零点，则当x趋近于0时，$f(x)>0$，

即$\frac{1}{2}a+1>0$，解得$a>-2$.所以a的取值范围为$(-2,-1)$.

③当$-\frac{1}{a}=1$，即$a=-1$时，$g'(x)=\frac{1-x}{x}$.

令$g'(x)>0$，得$0<x<1$；令$g'(x)<0$，得$x>1$.

所以函数$g(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，

所以$g(x)\le g(1)=0$，所以函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.

又 $f(1)=0$，所以当 $a=-1$ 时，函数 $f(x)$ 只有一个零点，所以 $a=-1$ 不满足题意.

④当 $-\frac{1}{a}>1$，即 $-1<a<0$ 时，$g'(x)=\frac{1+ax}{x}$.

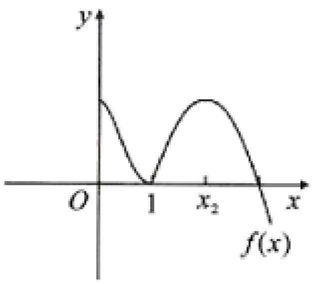
令 $g'(x)>0$，得 $0<x<-\frac{1}{a}$；令 $g'(x)<0$，得 $x>-\frac{1}{a}$.

所以函数 $g(x)$ 在 $\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减.

因为 $g(1)=0$，所以 $\exists x_2\in\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$，使 $g(x_2)=0$.

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,x_2)$ 上单调递增，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减.

作出函数 $f(x)$ 的示意图，如图(2).



图(2)

又 $f(1)=0$，所以由图像可知，$\exists x>x_2$，使得 $f(x)=0$.

所以当 $-1<a<0$ 时，函数 $f(x)$ 有 2 个零点.

综上可知，当 $a\in(-2,-1)\cup(-1,0)$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点.

22.答案：(1)因为曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+\cos\alpha,\\ y=2+\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数),所以曲线 C_1 的普通方程为 $(x+2)^2+(y-2)^2=1$.

因为曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho(\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta)=1$,

所以曲线 C_2 的直角坐标方程为 $\sqrt{3}x-y+1=0$.

(2)方法一 设 $P(-2+\cos\beta,2+\sin\beta)$ (β 为参数).

因为点 P 到直线 C_2 的距离 $d=\dfrac{\left|-2\sqrt{3}+\sqrt{3}\cos\beta-2-\sin\beta+1\right|}{2}=\dfrac{\left|2\cos\left(\beta+\dfrac{\pi}{6}\right)-2\sqrt{3}-1\right|}{2}$,

所以当 $\cos\left(\beta+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$,即 $\beta=2k\pi-\dfrac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$ 时, d 最小,即 $|PQ|_{\min}=\dfrac{2\sqrt{3}-1}{2}$.

方法二 曲线 C_1 的圆心 $(-2,2)$ 到直线 $C_2:\sqrt{3}x-y+1=0$ 的距离为 $\dfrac{\left|-2\sqrt{3}-2+1\right|}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}+1}{2}$,

所以 $|PQ|_{\min}=\dfrac{2\sqrt{3}+1}{2}-1=\dfrac{2\sqrt{3}-1}{2}$.

23.答案:(1)因为 $|x+a|-|x-b|\le|(x+a)-(x-b)|=|a+b|=a+b$,

因为存在 $x_0\in\mathbf{R}$,使得 $|x_0+a|-|x_0-b|\ge4$,

所以 $a+b\ge4$,即 $a+b$ 的取值范围是 $[4,+\infty)$.

(2)由(1)知 $a+b\ge4$.

因为 $a^4+b^4=(a^2)^2+(b^2)^2\ge\dfrac{(a^2+b^2)^2}{2}\ge\dfrac{\left(\dfrac{(a+b)^2}{2}\right)^2}{2}\ge32$,(等号成立的条件为 $a=b=2$)

所以 $a^4+b^4\ge32$.

正确教育
WWW.ZQY.COM

正确教育版权声明

北京正确教育投资有限公司（以下简称为正确教育）为尊重和保护知识产权，依法维护参编作者和旗下网站的合法权益，特发表维护著作权声明如下：

1.在正确教育原创资料正文标题的下方（或课件在尾页）签署有参编作者授权声明，“本人声明：本文属本人原创作品，本文著作权授予‘北京正确教育投资有限公司’独家所有，本人拥有署名权。”

2.此类原创资料，正确教育拥有该原创资料的独家著作权，未经正确教育明确书面授权，编者不得许可第三方在网络上或者图书行业等商业活动中使用本人已上传至正确教育的原创资料。

3.任何商业公司或其他网站未经正确教育的授权许可，不得转载、摘编或以其他任何方式使用上述作品。

4.如发现某单位侵权使用正确教育的原创资料，欢迎用户向我们举报侵权单位，经正确教育总部确认属实后，给予举报用户奖励。同时，资料编者有义务协助公司共同维护知识产权。

5.对于侵犯相关编者及正确教育合法权益的公司、网站和个人，正确教育均保留追究法律责任的权利。

6.本声明未涉及的问题请参见国家有关法律法规，当本声明与国家有关法律法规冲突时，以国家法律法规为准。

7.本网站相关声明版权及其修改权、更新权和最终解释权均属本公司所有。

特此声明。

北京正确教育投资有限公司

二〇二〇年四月十三日

北京正确教育投资有限公司
1101150103761