2021 届高考文科数学模拟预热卷（全国III卷）

【满分：150 分】

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $A=\left\{x\middle|y=\sqrt{x^2-2x-3}\right\}$，集合 $B=\{y\,|\,y>1\}$，全集 $U=R$，则 $(C_RA)\cap B$ 为（ ）

A. $[1,3]$ B. $(3,+\infty)$ C. $(1,3)$ D. $[1,+\infty)$

2.已知 $z=\dfrac{3-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$（其中 i 为虚数单位），则 $\bar{z}$ 的虚部为( )

A. $-\mathrm{i}$ B. -1 C. 2 D. 2

3.在发生某公共卫生事件期间,有专业机构认为该事件在一段时间内没有发生大规模群体感染的标志是“连续 10 日,每天新增疑似病例不超过 7 人”.过去 10 日,甲、乙、丙、丁四地新增疑似病例数据信息如下：

甲地：总体平均数为 3,中位数为 4；

乙地：总体平均数为 1,总体方差大于 0；

丙地：总体平均数为 2,总体方差为 3；

丁地：中位数为 2,众数为 3；

则甲、乙、两、丁四地中,一定没有发生大规模群体感染的是( )

A.甲地 B.乙地 C.丙地 D.丁地

4.某商场以每件 30 元的价格购进一种商品，试销中发现，这种商品每天的销量 m(件)与售价 x(元)满足一次函数 $m=162-3x$，若要每天获得最大的销售利润，每件商品的售价应定为( )

A.30 元 B.42 元 C.54 元 D.越高越好

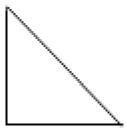
5. $\sqrt{3}\tan 87°\tan 33°-\tan 87°-\tan 33°=$ ( )

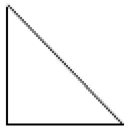
A. $\sqrt{3}$ B. $-\sqrt{3}$ C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ D. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

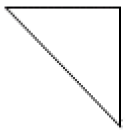
6.已知三点 $A(-1,0)$, $B\left(0,\sqrt{3}\right)$, $C\left(2,\sqrt{3}\right)$,则 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心到原点的距离为( )

A. $\dfrac{5}{3}$ B. $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$ C. $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ D. $\dfrac{4}{3}$

7.在《九章算术》中，将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑．若一个鳖臑的主视图、侧视图、俯视图均为直角边长为2的等腰直角三角形（如图所示），则该鳖臑的体积为（　　）


正视图


侧视图


俯视图

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$　　C. $\frac{8}{3}$　　D.4

8.已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点为 F_1,F_2,离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,过 F_2 的直线 l 交椭圆 C 于 A,B 两点,若 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{3}$,则 C 的方程为(　)

A. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　　B. $\frac{x^2}{3}+y^2=1$

C. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$　　D. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$

9.已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点 F ,若过点 F 且倾斜角为 60° 的直线与双曲线的右支有且只有一个交点.则此双曲线离心率的取值范围是(　)

A. $(1,2]$　　B. $(1,2)$　　C. $[2,+\infty)$　　D. $(2,+\infty)$

10.设 $a=\log_3 18$, $b=\log_4 24$, $c=2^{\frac{3}{4}}$,则 a,b,c 的大小关系是（　　）

A． $a<b<c$　　B． $c<a<b$　　C． $b<c<a$　　D． $c<b<a$

11.在 $\triangle ABC$ 中， a,b,c 分别是角 A,B,C 的对边,若 $b\sin A-\sqrt{3}a\cos B=0$,且 $b^2=ac$ ，则 $\frac{a+c}{b}$ 的值为(　　)

A.2　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D.4

12.设 x_1,x_2 分别是函数 $f(x)=x-a^{-x}$ 和 $g(x)=x\log_a x-1$ 的零点(其中 $a>1$),则 x_1+4x_2 的取值范围为(　　)

A. $[4,+\infty)$　　B. $(4,+\infty)$　　C. $[5,+\infty)$　　D. $(5,+\infty)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.已知 x,y 满足 $\begin{cases}2x-y+2\ge 0\\ x+3y-6\ge 0\\ x+y-4\le 0\end{cases}$,则 $z=x-2y$ 的最小值等于__________.

14.已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右顶点为 A，以 A 为圆心，b 为半径作圆，圆 A 与双曲线 C 的一条渐近线交于 M,N 两点.若 $\angle MAN=60^\circ$，则 C 的离心率为________________.

15.曲线 $y=e^x\left(x^2+2\right)$在点$(0,2)$处的切线方程为___________.

16.已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面积为$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，一个侧面的周长为$6\sqrt{3}$，则正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球的表面积为_______________.

三、解答题：共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 22，23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17. （12 分）设$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是各项都为正数的等比数列，且 $a_1=b_1=1,a_3+b_5=21$，$a_5+b_3=13$.

（1）求$\{a_n\},\{b_n\}$的通项公式;

（2）求数列$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$的前 n 项和 S_n.

18. （12 分）为助力湖北新冠疫情后的经济复苏,某电商平台为某工厂的产品开设直播带货专场.为了对该产品进行合理定价,用不同的单价在平台试销,得到如下数据:

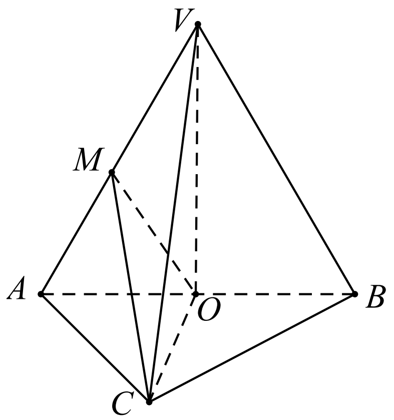
单价 x (元/件)	8	8.2	8.4	8.6	8.8	9
销量 y (万件)	90	84	83	80	75	68

(1)根据以上数据,求 y 关于 x 的线性回归方程;

(2)若该产品成本是 4 元/件,假设该产品全部卖出,预测把单价定为多少时,工厂获得最大利润?

(参考公式:回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$, 其中 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$, $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$)。

19. （12 分）如图，在三棱锥 $V-ABC$ 中，$VA=VB=VC$，$AC\perp BC$，O,M 分别为 AB，VA 的中点.



（1）求证：平面 $ABC\perp$ 平面 VAB；

（2）若 $AC=BC$，$\triangle VAB$ 是面积为 $\sqrt{3}$ 的等边三角形，求四棱锥 $C-BOMV$ 的体积.

20. （12 分）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}+a\ln x(a\neq 0,a\in \mathrm{R})$.

(1)若 $a=1$,求函数 $f(x)$ 的极值和单调区间;

(2)若在区间 $(0,\mathrm{e}]$ 上至少存在一点 x_0,使得 $f(x_0)<0$ 成立,求实数 a 的取值范围.

21. （12 分）在圆 $x^2+y^2=4$ 上任取一点 P,过 P 做 x 轴的垂线段 PD,D 为垂足.

(1) 当点 P 在圆上运动时，求线段 PD 中点 Q 的轨迹方程;

(2) 直线 $y=\sqrt{2}x-\sqrt{6}$ 与 Q 的轨迹交于 A,B 两点，点 $M(0,\sqrt{6})$，求 $\triangle MAB$ 的面积.

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22，23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22. [选修 4－4：坐标系与参数方程]（10 分）

在平面直角坐标系中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{5}t+2 \\ y=\dfrac{4}{5}t \end{cases}$ (t 为参数)，以原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，圆 C 的极坐标方程为 $\rho=a\sin\theta(a\neq 0)$.

（1）求圆 C 的直角坐标系方程与直线 l 的普通方程；

（2）设直线 l 截圆 C 的弦长等于圆 C 的半径长的 $\sqrt{3}$ 倍，求 a 的值.

23. [选修 4－5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=2|x-1|-|x+1|-m$

(1)当 $m=-2$ 时,求不等式 $f(x)>3$ 的解集；

(2)若 $f(x)$ 的最小值为 M ,且 $a+b=M+m+4$ $(a,b\in\mathrm{R})$,求 $2a^2+3b^2$ 的最小值。

答案以及解析

一、选择题

1.答案：C

解析：集合 $A=\left\{x|\ y=\sqrt{x^2-2x-3}\right\}=\left\{x|\ x^2-2x-3\geq 0\right\}=\{x|\ x\leq -1$ 或

$x\geq 3\}=(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$，

集合 $B=\{y\,|\,y>1\}=(1,+\infty)$，

全集 $U=R$,则 $\complement_R A=(-1,3)$；

所以 $(\complement_R A)\cap B=(1,3)$.

故选：C.

2.答案： B

解析：$\because z=\dfrac{3-i}{1-i}=\dfrac{(3-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{3+2i-i^2}{1-i^2}=\dfrac{4+2i}{2}=2+i$ $\therefore \overline{z}=2-i$ $\therefore \overline{z}$ 的虚部为 -1

3.答案：C

解析：对于甲地, 总体平均数为 3,中位数为 4.平均数与中位数,不能限制极端值的出现,因而可能会出现超过 7 人的情况,所以甲地不符合要求;

对于乙地, 总体平均数为 1,总体方差大于 0.没有给出方差具体的大小,如果方差很大,有可能出现超过 7 人的情况,所以乙地不符合要求;

对于丁地：中位数为 2,众数为 3.中位数与众数不能限制极端值的大小,因而可能出现超过 7 人的情况,所以丁地不符合要求;

对于丙地,根据方差公式 $s^2=\dfrac{1}{10}\left[\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\left(x_3-\overline{x}\right)^2+\cdots\right]$.若出现大于 7 的数值 m ,则 $s^2=\dfrac{1}{10}\left[(m-2)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\left(x_3-\overline{x}\right)^2+\cdots\right]>3.6$,与总体方差为 3 矛盾,因而不会出现超过 7 人的情况出现.

综上可知,丙地符合要求.

故选:C

4.答案：B

解析：设当每件商品的售价为 x 元时，每天获得的销售利润为 y 元.由题意得，

$y=m(x-30)=(x-30)(162-3x)$.

上式配方得 $y=-3(x-42)^2+432$.

$\therefore$ 当 $x=42$ 时，利润最大.故选 B.

5.答案：A

解析： $\sqrt{3}\tan 87°\tan 33°-\tan 87°-\tan 33°$

$=\sqrt{3}\tan 87°\tan 33°-\tan(87°+33°)(1-\tan 87°\tan 33°)$

$=\sqrt{3}\tan 87°\tan 33°+\sqrt{3}(1-\tan 87°\tan 33°)=\sqrt{3}$.

故选：A

6.答案：B

解析： 圆心在线段 BC 的垂直平分线 $x=1$ 上,故设圆心为 $(1,b)$.又圆过 $A(-1,0)$,所以圆的半径为 b,故圆的方程为 $(x-1)^2+(y-b)^2=b^2$.代入点 B 的坐标得 $1+(\sqrt{3}-b)^2=b^2$,解得 $b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,故圆心到原点的距离为 $\sqrt{1^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

7.答案：A

解析：根据几何体的三视图：

得知：该几何体是由一个底面以3和4为直角边的直角三角形和高为3的四面体构成，

故： $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 2=\frac{4}{3}$.

8.答案：A

解析：

$\because \triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{3}$ ，

$\because \triangle AF_1B$ 的周长 $|AF_1|+|AF_2|+|BF_1|+|BF_2|=2a+2a=4a$ ，

$\therefore 4a=4\sqrt{3}$ ，

$\therefore a=\sqrt{3}$ ，

$\because$ 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

$\therefore \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ， $c=1$ ，

$\therefore b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2}$，

$\therefore$椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$．

故选 A．

9.答案：C

解析：双曲线的渐近线为$y=\pm\dfrac{b}{a}x$.因为过点 F 且倾斜角为60°的直线的斜率为$\sqrt{3}$,

由题意得，$\dfrac{b}{a}\geq\sqrt{3}$,即$b^2\geq 3a^2$.

所以$c^2-a^2\geq 3a^2$,

所以$e^2\geq 4$,所以$e\geq 2$.

10.答案：D

解析：由对数函数的性质，可得$a=\log_3^{18}=1+\log_3^6$ $b=\log_4^{24}=1+\log_4^6$,

又由$\log_4^6<\log_3^6$，所以$a>b$， $a=\log_3^{18}>\log_3^9=2$， $b=\log_4^{24}>\log_4^{16}=2$,

根据指数函数的性质，可得$c=2^{\frac{3}{4}}<2^1=2$，所以$c<b<a$．故选：D.

11.答案：A

解析：ΔABC 中,由$b\sin A-\sqrt{3}a\cdot\cos B=0$,利用正弦定理得$\sin B\sin A-\sqrt{3}\sin A\cos B=0$,

$\therefore$ $\tan B=\sqrt{3}$,故$B=\dfrac{\pi}{3}$.

由余弦定理得$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B=a^2+c^2-ac$,即$b^2=(a+c)^2-3ac$,

又$b^2=ac$,所以$4b^2=(a+c)^2$,求得$a+cb=2$

12.答案：D

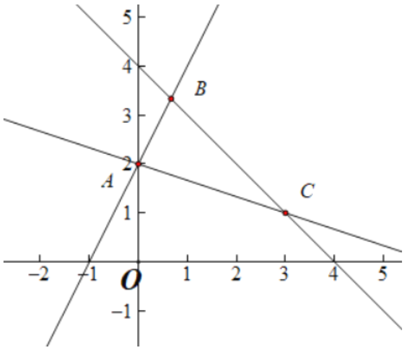
解析：$f(x)=x-a^{-x}$的零点x_1是方程$x=a^{-x}$,即$\dfrac{1}{x}=a^x$的解，$g(x)=x\log_a x-1$的零点x_2是方程$x\log_a x-1=0$,即$\dfrac{1}{x}=\log_a x$的解,即x_1,x_2分别是$y=a^x,y=\log_a x(a>1)$与$y=\dfrac{1}{x}$图象的交点A,B的横坐标,可得$0<x_1<1,x_2>1$.$\because$ $y=a^x$的图像与$y=\log_a x$的图像关于直线$y=x$对称，$y=\dfrac{1}{x}$的图像也关于直线$y=x$对称,$\therefore$点A,B关于直线$y=x$对称,设$A(x_1,\dfrac{1}{x_1}),B(x_2,\dfrac{1}{x_2})$,

$\therefore$ $x_1+4x_2=x_1+\dfrac{4}{x_1}$,且$0<x_1<1$,$\therefore$ $x_1+4x_2>5$,故x_1+4x_2的取值范围是$(5,+\infty)$,故选D.

二、填空题

13.答案：-6

解析：画出对应三条直线分析可得可行域为$\triangle ABC$



由$z=x-2y$有$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}z$,故$z=x-2y$在$B$ 处取得最小值.

所以$\begin{cases}2x-y+2\geq 0\\ x+y-4\leq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{3}\\ y=\frac{10}{3}\end{cases}$,即$B(\frac{2}{3},\frac{10}{3})$,故最小值$z=\frac{2}{3}-2\times\frac{10}{3}=-6$

故答案为：-6

14.答案：$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

解析：$\because |AN|=|AM|,\angle MAN=60°,\therefore \triangle MAN$为等边三角形，$\therefore A\left(a,0\right)$到直线$l:y=\frac{b}{a}x$的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}b$，即$\frac{|ba|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}b$，化简得$a^2=3b^2$.又$\because b^2=c^2-a^2,\therefore 4a^2=3c^2,\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

15.答案：$y=2x+2$

解析：$\because f'(x)=e^x\left(x^2+2x+2\right),\therefore f'\left(0\right)=2$，

又$\because f\left(0\right)=2$，

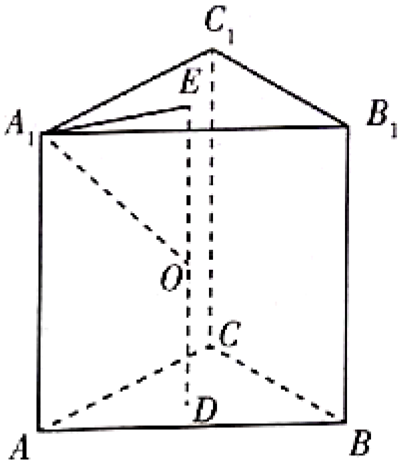
$\therefore$所求切线方程为$y-2=2x$，即$y=2x+2$.

故答案为：$y=2x+2$.

16.答案：16π

解析：如图所示,设底面边长为a,则底面面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}$,所以$a=\sqrt{3}$.又一个侧面的周长为$6\sqrt{3}$,所以$AA_1=2\sqrt{3}$.设$E,D$分别为上、下底面的中心,连接$DE$,设$DE$的中点为O，则点O即为正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的外接球的球心,连接$OA_1,A_1E$,则

$OE=\sqrt{3}, A_1E=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}=1$.在直角三角形 OEA_1 中，$OA_1=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$，即外接球的半径 $R=2$,所以外接球的表面积 $S=4\pi R^2=16\pi$.



三、解答题

17.答案：解：（1）设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，$\{b_n\}$ 的公比为 q，则依题意有 $q>0$

$a_1=b_1=1$，$a_3=5,b_3=4$ $a_1+2d=5,b_1q^2=4$

解得 $d=2$，$q=2$． 所以 $a_n=1+(n-1)d=2n-1$，$b_n=q^{n-1}=2^{n-1}$.

（2）$\frac{a_n}{b_n}=\frac{2n-1}{2^{n-1}}$． $S_n=1+\frac{3}{2^1}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n-3}{2^{n-2}}+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$，①

$2S_n=2+3+\frac{5}{2}+\cdots+\frac{2n-3}{2^{n-3}}+\frac{2n-1}{2^{n-2}}$，②

②－①得 $S_n=2+2+\frac{2}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{2}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^{n-1}}$，

$=2+2\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}\right)-\frac{2n-1}{2^{n-1}}$

$=2+2\times\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n-1}}$

$=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$.

18.答案：（1）$\overline{x}=\frac{8+82+8.4+8.6+8.8+9}{6}=8.5$，

$\overline{y}=\frac{90+84+83+80+75+68}{6}=80$.

$\sum_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=(8-8.5)(90-80)+(8.2-8.5)(84-80)+(8.4-8.5)(83-80)$

$+(8.6-8.5)(80-80)+(8.8-8.5)(75-80)+(9-8.5)(68-80)$

=-14，

$$\sum_{i=1}^{6}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=(8-8.5)^2+(8.2-8.5)^2+(8.4-8.5)^2+(8.6-8.5)^2+(8.8-8.5)^2+(9-8.5)^2$$

=0.7，

$$\therefore\ \hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{b}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum_{i=1}^{6}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}=\frac{-14}{0.7}=-20,$$

$$\therefore\ \hat{a}=\overline{y}-b\overline{x}=80+20\times8.5=250,$$

所以回归直线方程为 $y=-20x+250$.

（2）设工厂获得的利润为 L 万元，

则 $L=(x-4)(-20x+250)$

$=-20(x-8.25)^2+361.25$，

所以该产品的单价定为 8.25 元时，工厂获得利润最大，最大利润为 361.25 万元.

19.答案：（1）因为 $VA=VB,O$ 为 AB 的中点，所以 $VO\perp AB$，

所以 $VO^2+OA^2=VA^2$，

因为 $AC\perp BC$，所以 $OC=OA$，

又因为 $VA=VC$，所以 $VO^2+OC^2=VC^2$，即 $OV\perp OC$，

因为 $OC\cap AB=O$，所以 $VO\perp$ 平面 ABC，

因为 $VO\subset$ 平面 VAB，所以平面 $ABC\perp$ 平面 VAB.

（2）因为 $AC=BC$，所以 $OC\perp AB$，从而 $OC\perp$ 平面 VAB，

 VAB 是面积为 $\sqrt{3}$ 的等边三角形，所以 $VA=VB=AB=2$，可得 $OC=1$，

$$V_{C-BOMV}=\frac{1}{3}\times OC\times S_{\text{四边形}BOMV}=\frac{1}{3}\times1\times\frac{3}{4}\times S_{\triangle VAB}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

20.答案：(1)当 $a=1$，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$，

又 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，由 $f'(x)<0$ 得 $0<x<1$，由 $f'(x)>0$ 得 $x>1$，

所以 $x=1$ 时，$f(x)$ 有极小值为 1.

$f(x)$的单调递增区间为$(1,+\infty)$,单调递减区间为$(0,1)$.

(2) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x}=\frac{ax-1}{x^2}$,且$a\neq 0$,令$f'(x)=0$,得到$x=\frac{1}{a}$,若在区间$(0,\mathrm{e}]$上存在一点$x_0$,

使得$f(x_0)<0$成立,即$f(x)$在区间$(0,\mathrm{e}]$上的最小值小于0.

当$x=\frac{1}{a}<0$,即$a<0$时,$f'(x)<0$恒成立,即$f(x)$在区间$(0,\mathrm{e}]$上单调递减,

故$f(x)$在区间$(0,\mathrm{e}]$上的最小值为$f(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}+a\ln\mathrm{e}=\frac{1}{\mathrm{e}}+a$,

由$\frac{1}{\mathrm{e}}+a<0$,得$a<-\frac{1}{\mathrm{e}}$,即$a\in\left(-\infty,-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

当$x=\frac{1}{a}>0$,即$a>0$时,

①若$\mathrm{e}\leq\frac{1}{a}$,则$f'(x)\leq 0$对$x\in(0,\mathrm{e}]$成立,所以$f(x)$在区间$(0,\mathrm{e}]$上单调递减,

则$f(x)$在区间$(0,\mathrm{e}]$上的最小值为$f(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}+a\ln\mathrm{e}+a>0$,

显然,$f(x)$在区间$(0,\mathrm{e}]$上的最小值小于0不成立.

②若$1<\frac{1}{a}<\mathrm{e}$,即$a>\frac{1}{\mathrm{e}}$时,则有

x	$(0,\frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a},\mathrm{e})$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以$f(x)$在区间$(0,\mathrm{e}]$上的最小值为$f(\frac{1}{a})=a+a\ln\frac{1}{a}$,

由$f(\frac{1}{a})=a+a\ln\frac{1}{a}=a(1-\ln a)<0$

得$1-\ln a<0$,解得$a>\mathrm{e}$,即$a\in(\mathrm{e},+\infty)$.

综上,由(1)(2)可知: $a\in(-\infty,-\frac{1}{\mathrm{e}})\cup(\mathrm{e},+\infty)$符合题意

21.答案：解：（1）设点Q的坐标为(x,y)，点P的坐标为(x_0,y_0)，

则$\begin{cases} x=x_0 \\ y=\frac{y_0}{2} \end{cases}$,

因为点$P(x_0,y_0)$在圆$x^2+y^2=4$上，

所以$x_0^2+y_0^2=4$上，

把 $\begin{cases} x_0 = x \\ y_0 = 2y \end{cases}$ 代入，得 $x^2+4y^2=4$，即 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，即为 Q 的轨迹方程；

（2）联立 $\begin{cases} y=\sqrt{2}x-\sqrt{6} \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$ ，

化简得 $9x^2-16\sqrt{3}x+20=0$，

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则

$x_1+x_2=\frac{16\sqrt{3}}{9}$，$x_1\cdot x_2=\frac{20}{9}$，$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+2}\cdot\frac{16\sqrt{3}}{9}=\frac{4}{3}$，点 M 到直线的距离为 $d=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=2\sqrt{2}$，所以 $S_{\Delta MAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times 2\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

22.答案：1.直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=-\frac{3}{5}t+2 \\ y=\frac{4}{5}t \end{cases}$ (t 为参数)，消去参数 t，可得：

$4x+3y-8=0$；

由圆 C 的极坐标方程为 $\rho=a\sin\theta(a\neq 0)$，

可得 $\rho^2=\rho a\sin\theta$，根据 $\rho\sin\theta=y$，$\rho^2=x^2+y^2$

可得圆 C 的直角坐标系方程为：$x^2-y^2-ay=0$，

即 $x^2+(y-\frac{a}{2})^2=\frac{a^2}{4}$.

2.由 1 可知圆 C 的圆心为 $(0,\frac{a}{2})$ 半径 $r=\left|\frac{a}{2}\right|$，

直线方程为 $4x+3y-8=0$；

那么：圆心到直线的距离 $d=\frac{\left|\frac{3a}{2}-8\right|}{5}=\left|\frac{3a-8}{10}\right|$

直线 l 截圆 C 的弦长为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a=2\sqrt{r^2-d^2}$

解得：$a=32$ 或 $a=\frac{32}{11}$

故得直线 l 截圆 C 的弦长等于圆 C 的半径长的 $\sqrt{3}$ 倍时 a 的值为 32 或 $\frac{32}{11}$

23.答案：(1)当 $m=-2$ 时，$f(x)=\begin{cases}-x+5,x<-1\\-3x+3,-1\le x\le 1\\x-1,x>1\end{cases}$，又 $f(x)>3$，则有 $\begin{cases}-x+5>3\\x<-1\end{cases}$ 或

$\begin{cases}-3x+3>3\\-1\le x\le 1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-1>3\\x>1\end{cases}$；解得 $x<-1$ 或 $-1\le x<0$ 或 $x>4$.即 $x<0$ 或 $x>4$.所以不等式

$f(x)>3$ 的解集为 $\{x|x<0$ 或 $x>4\}$

(2)因为 $f(x)=\begin{cases}-x+3-m,x<-1\\-3x+1-m,-1\le x\le 1\\x-3-m,x>1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处取得最小值 $-m-2$，

所以 $M=-m-2$，则 $a+b=M+m+4=2$，由柯西不等式

$$(2a^2+3b^2)\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]\ge\left(\sqrt{2}a\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}b\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=(a+b)^2=4$$

所以 $2a^2+3b^2\ge\frac{24}{5}$，当且仅当 $2a=3b$，即 $a=\frac{6}{5}$，$b=\frac{4}{5}$ 时，等号成立.

故 $2a^2+3b^2$ 的最小值为 $\frac{24}{5}$.

正确教育
WWW.ZQY.COM

正确教育版权声明

北京正确教育投资有限公司（以下简称为正确教育）为尊重和保护知识产权，依法维护参编作者和旗下网站的合法权益，特发表维护著作权声明如下：

1.在正确教育原创资料正文标题的下方（或课件在尾页）签署有参编作者授权声明，“本人声明：本文属本人原创作品，本文著作权授予‘北京正确教育投资有限公司’独家所有，本人拥有署名权。”

2.此类原创资料，正确教育拥有该原创资料的独家著作权，未经正确教育明确书面授权，编者不得许可第三方在网络上或者图书行业等商业活动中使用本人已上传至正确教育的原创资料。

3.任何商业公司或其他网站未经正确教育的授权许可，不得转载、摘编或以其他任何方式使用上述作品。

4.如发现某单位侵权使用正确教育的原创资料，欢迎用户向我们举报侵权单位，经正确教育总部确认属实后，给予举报用户奖励。同时，资料编者有义务协助公司共同维护知识产权。

5.对于侵犯相关编者及正确教育合法权益的公司、网站和个人，正确教育均保留追究法律责任的权利。

6.本声明未涉及的问题请参见国家有关法律法规，当本声明与国家有关法律法规冲突时，以国家法律法规为准。

7.本网站相关声明版权及其修改权、更新权和最终解释权均属本公司所有。

特此声明。

北京正确教育投资有限公司

二〇二〇年四月十三日