2020年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $A=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{N}^*, y\geq x\}$， $B=\{(x,y)\mid x+y=8\}$，则 $A\cap B$ 中元素的个数为（　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 6

2.复数 $\frac{1}{1-3\mathrm{i}}$ 的虚部是（　）

A. $-\frac{3}{10}$　　B. $-\frac{1}{10}$　　C. $\frac{1}{10}$　　D. $\frac{3}{10}$

3.在一组样本数据中，1，2，3，4出现的频率分别为 p_1,p_2,p_3,p_4，且 $\sum_{i=1}^{4}p_i=1$，则下面四种情形中，对应样本的标准差最大的一组是（　）

A. $p_1=p_4=0.1, p_2=p_3=0.4$　　B. $p_1=p_4=0.4, p_2=p_3=0.1$

C. $p_1=p_4=0.2, p_2=p_3=0.3$　　D. $p_1=p_4=0.3, p_2=p_3=0.2$

4.*Logistic*模型是常用数学模型之一，可应用于流行病学领城．有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数$I(t)$（t的单位：天)的*Logistic*模型：$I(t)=\frac{K}{1+\mathrm{e}^{-0.23(t-53)}}$，其中$K$为最大确诊病例数．当$I(t^*)=0.95K$时，标志着已初步遏制疫情，则$t^*$约为（　）（ln19≈3）

A. 60　　B. 63　　C. 66　　D. 69

5.设O为坐标原点，直线x=2与抛物线C：$y^2=2px(p>0)$交于D，E两点，若$OD\perp OE$，则C的焦点坐标为（　）

A. $(\frac{1}{4}, 0)$　　B. $(\frac{1}{2}, 0)$　　C. （1，0）　　D. （2，0）

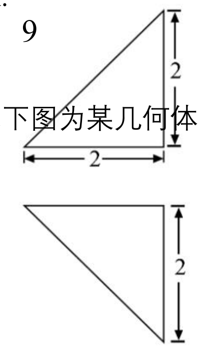
6.已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足$|a|=5$，$|b|=6$，$a\cdot b=-6$，则$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle$ = （　）

A. $-\frac{31}{35}$　　B. $-\frac{19}{35}$　　C. $\frac{17}{35}$　　D. $\frac{19}{35}$

7.在△ABC中，$\cos C=\frac{2}{3}$，$AC=4$，$BC=3$，则$\cos B=$（　）

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

8.下图为某几何体的三视图，则该几何体的表面积是（　）



A. $6+4\sqrt{2}$　　B. $4+4\sqrt{2}$　　C. $6+2\sqrt{3}$　　D. $4+2\sqrt{3}$

9.已知$2\tan\theta-\tan(\theta+\frac{\pi}{4})=7$，则$\tan\theta=$（　）

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

10.若直线l与曲线$y=\sqrt{x}$和$x^2+y^2=\frac{1}{5}$都相切，则l的方程为（　）

A. $y=2x+1$　　B. $y=2x+\frac{1}{2}$　　C. $y=\frac{1}{2}x+1$　　D. $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

11.设双曲线C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，离心率为$\sqrt{5}$．$P$是$C$上一点，且$F_1P\perp F_2P$．若△$PF_1F_2$的面积为4，则$a=$（　）

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

12.已知$5^5<8^4$，$13^4<8^5$．设$a=\log_5 3$，$b=\log_8 5$，$c=\log_{13} 8$，则（　）

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

$x \quad y \quad 0,$

13.若x，y满足约束条件$\begin{cases} 2x \quad y \quad 0, \\ \square \\ x \quad 1, \end{cases}$，则$z=3x+2y$的最大值为________．

14. $(x^2 \square \frac{2}{x})^6$ 的展开式中常数项是__________（用数字作答）．

15.已知圆锥的底面半径为1，母线长为3，则该圆锥内半径最大的球的体积为_________ .

16.关于函数$f(x)=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}$有如下四个命题:

①$f(x)$的图像关于y轴对称 .

②$f(x)$的图像关于原点对称 .

③$f(x)$的图像关于直线$x=\dfrac{\pi}{2}$对称 .

④$f(x)$的最小值为2 .

其中所有真命题的序号是__________ .

三、解答题：共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答.第22、23题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共60分.

17.设数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-4n$.

（1）计算a_2，a_3，猜想$\{a_n\}$的通项公式并加以证明;

（2）求数列$\{2^n a_n\}$的前n项和S_n .

18.某学生兴趣小组随机调查了某市100天中每天的空气质量等级和当天到某公园锻炼的人次，整理数据得到下表（单位：天）：

锻炼人次 空气质量等级	[0，200]	(200，400]	(400，600]
1（优）	2	16	25
2（良）	5	10	12
3（轻度污染）	6	7	8
4（中度污染）	7	2	0

（1）分别估计该市一天的空气质量等级为1，2，3，4的概率;

（2）求一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）;

（3）若某天的空气质量等级为1或2，则称这天“空气质量好”；若某天的空气质量等级为3或4，则称这天“空气质量不好”．根据所给数据，完成下面的2×2列联表，并根据列联表，判断是否有95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关?

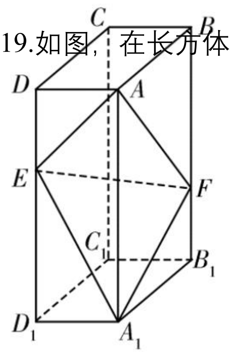
	人次≤400	人次>400

空气质量好		
空气质量不好		

附: $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

$P(K^2\geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19.如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E,F 分别在棱 DD_1，BB_1 上，且 $2DE=ED_1$，$BF=2FB_1$.



（1）证明：点 C_1 在平面 AEF 内；

（2）若 $AB=2$，$AD=1$，$AA_1=3$，求二面角 $A-EF-A_1$ 的正弦值.

20.已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{m^2}=1(0<m<5)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，A，B 分别为 C 的左、右顶点.

（1）求 C 的方程；

（2）若点 P 在 C 上，点 Q 在直线 $x=6$ 上，且 $|BP|=|BQ|$，$BP\perp BQ$，求 $\triangle APQ$ 的面积.

21.设函数 $f(x)=x^3+bx+c$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$ 处的切线与 y 轴垂直.

（1）求 b.

（2）若 $f(x)$ 有一个绝对值不大于1的零点，证明：$f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于1.

（二）选考题：共10分.请考生在第22、23题中任选一题作答.如果多做，则按所做的第一题计分.

[选修4—4：坐标系与参数方程]（10分）

22.在直角坐标系xOy中，曲线C的参数方程为$\begin{cases} x=2-t-t^2 \\ y=2-3t+t^2 \end{cases}$

（t为参数且$t\neq1$），C与坐标轴交于A、B两点．

（1）求$|AB|$;

（2）以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，求直线AB的极坐标方程．

[选修4—5：不等式选讲]（10分）

23.设a，b，$c\in R$，$a+b+c=0$，$abc=1$．

（1）证明：$ab+bc+ca<0$;

（2）用$\max\{a,b,c\}$表示a，b，c中的最大值，证明：$\max\{a,b,c\}\geq\sqrt[3]{4}$．