2017年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标Ⅲ）

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

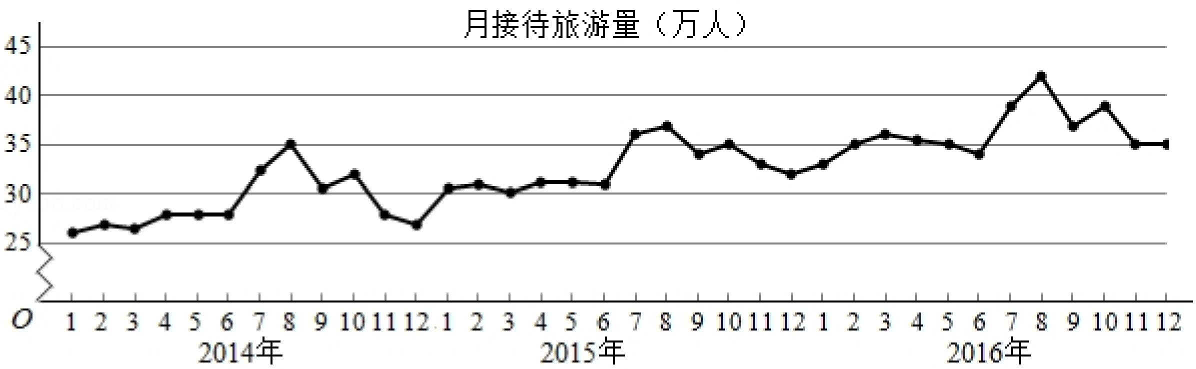
1．（5分）已知集合A={（x，y）|$x^2+y^2=1$}，B={（x，y）|y=x}，则A∩B中元素的个数为（　　）

A．3　　B．2　　C．1　　D．0

2．（5分）设复数z满足（1+i）z=2i，则|z|=（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

3．（5分）某城市为了解游客人数的变化规律，提高旅游服务质量，收集并整理了2014年1月至2016年12月期间月接待游客量（单位：万人）的数据，绘制了下面的折线图.



根据该折线图，下列结论错误的是（　　）

A．月接待游客量逐月增加

B．年接待游客量逐年增加

C．各年的月接待游客量高峰期大致在7，8月

D．各年1月至6月的月接待游客量相对于7月至12月，波动性更小，变化比较平稳

4．（5分）（x+y）（2x－y）^{5}的展开式中的x^3y^3系数为（　　）

A．－80　　B．－40　　C．40　　D．80

5．（5分）已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的一条渐近线方程为

$y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$，且与椭圆$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$有公共焦点，则 C 的方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{10}=1$　　B．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$　　C．$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$　　D．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$

6．（5 分）设函数 f（x）=cos（$x+\frac{\pi}{3}$），则下列结论错误的是（　　）

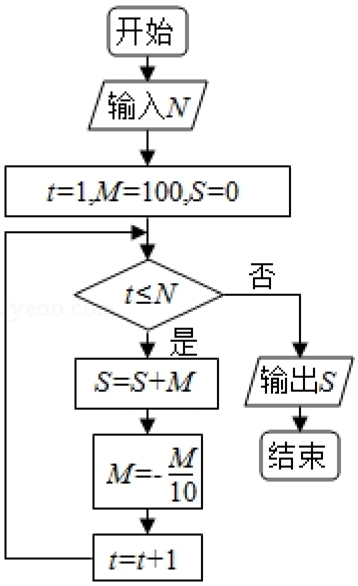
A．f（x）的一个周期为-2π

B．y=f（x）的图象关于直线 $x=\frac{8\pi}{3}$对称

C．f（x+π）的一个零点为 $x=\frac{\pi}{6}$

D．f（x）在（$\frac{\pi}{2}$，π）单调递减

7．（5 分）执行如图的程序框图，为使输出 S 的值小于 91，则输入的正整数 N 的最小值为（　　）



A．5　　B．4　　C．3　　D．2

8．（5 分）已知圆柱的高为 1，它的两个底面的圆周在直径为 2 的同一个球的球面上，则该圆柱的体积为（　　）

A．π　　B．$\frac{3\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{2}$　　D．$\frac{\pi}{4}$

9．（5 分）等差数列$\{a_n\}$的首项为 1，公差不为 0．若 a_2，a_3，a_6 成等比数列，则$\{a_n\}$前 6 项的和为（　　）

A．－24　　　　B．－3　　　　C．3　　　　D．8

10．（5分）已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的左、右顶点分别为$A_1$，$A_2$，且以线段$A_1A_2$为直径的圆与直线bx﹣ay+2ab=0相切，则C的离心率为（　　）

A．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　　　C．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　　　D．$\frac{1}{3}$

11．（5分）已知函数f（x）=x^2﹣2x+a（$e^{x-1}+e^{-x+1}$）有唯一零点，则a=（　　）

A．$-\frac{1}{2}$　　　　B．$\frac{1}{3}$　　　　C．$\frac{1}{2}$　　　　D．1

12．（5分）在矩形ABCD中，AB=1，AD=2，动点P在以点C为圆心且与BD相切的圆上．若$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，则λ+μ的最大值为（　　）

A．3　　　　B．$2\sqrt{2}$　　　　C．$\sqrt{5}$　　　　D．2

二、填空题:本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．（5分）若x，y满足约束条件$\begin{cases}x-y\geqslant 0\\x+y-2\leqslant 0\\y\geqslant 0\end{cases}$，则z=3x﹣4y的最小值为________.

14．（5分）设等比数列{a_n}满足$a_1+a_2=-1$，$a_1-a_3=-3$，则a_4=________.

15．（5分）设函数f（x）=$\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0\\2^x, & x>0\end{cases}$，则满足f（x）+f（x﹣$\frac{1}{2}$）＞1的x的取值范围是________.

16．（5分）a，b为空间中两条互相垂直的直线，等腰直角三角形ABC的直角边AC所在直线与a，b都垂直，斜边AB以直线AC为旋转轴旋转，有下列结论：

①当直线AB与a成60°角时，AB与b成30°角；

②当直线AB与a成60°角时，AB与b成60°角；

③直线AB与a所成角的最小值为45°；

④直线AB与a所成角的最小值为60°；

其中正确的是________．（填写所有正确结论的编号）

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。（一）必考题：60分。

17．（12分）△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\sin A+\sqrt{3}\cos A=0$，$a=2\sqrt{7}$，b=2．

（1）求c；

（2）设D为BC边上一点，且AD⊥AC，求△ABD的面积．

18．（12分）某超市计划按月订购一种酸奶，每天进货量相同，进货成本每瓶4元，售价每瓶6元，未售出的酸奶降价处理，以每瓶2元的价格当天全部处理完．根据往年销售经验，每天需求量与当天最高气温（单位：℃）有关．如果最高气温不低于25，需求量为500瓶；如果最高气温位于区间[20，25），需求量为300瓶；如果最高气温低于20，需求量为200瓶．为了确定六月份的订购计划，统计了前三年六月份各天的最高气温数据，得下面的频数分布表：

最高气温	[10，15)	[15，20)	[20，25)	[25，30)	[30，35)	[35，40)
天数	2	16	36	25	7	4

以最高气温位于各区间的频率代替最高气温位于该区间的概率．

（1）求六月份这种酸奶一天的需求量X（单位：瓶）的分布列；

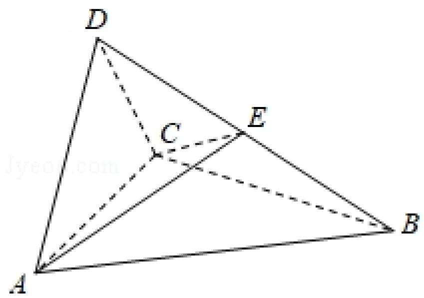
（2）设六月份一天销售这种酸奶的利润为Y（单位：元），当六月份这种酸奶

一天的进货量 n（单位：瓶）为多少时，Y 的数学期望达到最大值？

19．（12 分）如图，四面体 ABCD 中，△ABC 是正三角形，△ACD 是直角三角形，∠ABD=∠CBD，AB=BD．

（1）证明：平面 ACD⊥平面 ABC；

（2）过 AC 的平面交 BD 于点 E，若平面 AEC 把四面体 ABCD 分成体积相等的两部分，求二面角 D﹣AE﹣C 的余弦值．



20．（12 分）已知抛物线 C：$y^2=2x$，过点（2，0）的直线 l 交 C 于 A，B 两点，圆 M 是以线段 AB 为直径的圆．

（1）证明：坐标原点 O 在圆 M 上；

（2）设圆 M 过点 P（4，﹣2），求直线 l 与圆 M 的方程．

21．（12 分）已知函数 f（x）=x﹣1﹣alnx．

（1）若 f（x）≥0，求 a 的值；

（2）设 m 为整数，且对于任意正整数 n，$(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})\cdots(1+\frac{1}{2^n})<m$，求 m 的最小值．

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。[选修 4-4：坐标系与参数方程]

22．（10 分）在直角坐标系 xOy 中，直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+t\\y=kt\end{cases}$，（t 为参数），直线 l_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+m\\y=\frac{m}{k}\end{cases}$，（m 为参数）．设 l_1 与 l_2 的交点为 P，当 k 变化时，P 的轨迹为曲线 C．

（1）写出 C 的普通方程；

（2）以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，设 l_3：$\rho(\cos\theta+\sin\theta)-\sqrt{2}=0$，M 为 l_3 与 C 的交点，求 M 的极径．

[选修 4-5：不等式选讲]

23．已知函数 $f(x)=|x+1|-|x-2|$．

（1）求不等式 $f(x)\geqslant 1$ 的解集；

（2）若不等式 $f(x)\geqslant x^2-x+m$ 的解集非空，求 m 的取值范围．

2017年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标Ⅲ）

参考答案与试题解析

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．（5分）已知集合A={（x，y）|$x^2+y^2=1$}，B={（x，y）|y=x}，则A∩B中元素的个数为（　　）

A．3　　B．2　　C．1　　D．0

【考点】1E：交集及其运算．

【专题】5J：集合．

【分析】解不等式组求出元素的个数即可．

【解答】解：由$\begin{cases}x^2+y^2=1\\y=x\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\y=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$，

∴A∩B的元素的个数是2个，

故选：B．

【点评】本题考查了集合的运算，是一道基础题．

2．（5分）设复数z满足（1+i）z=2i，则|z|=（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

【考点】A8：复数的模．

【专题】35：转化思想；5N：数系的扩充和复数．

【分析】利用复数的运算法则、模的计算公式即可得出．

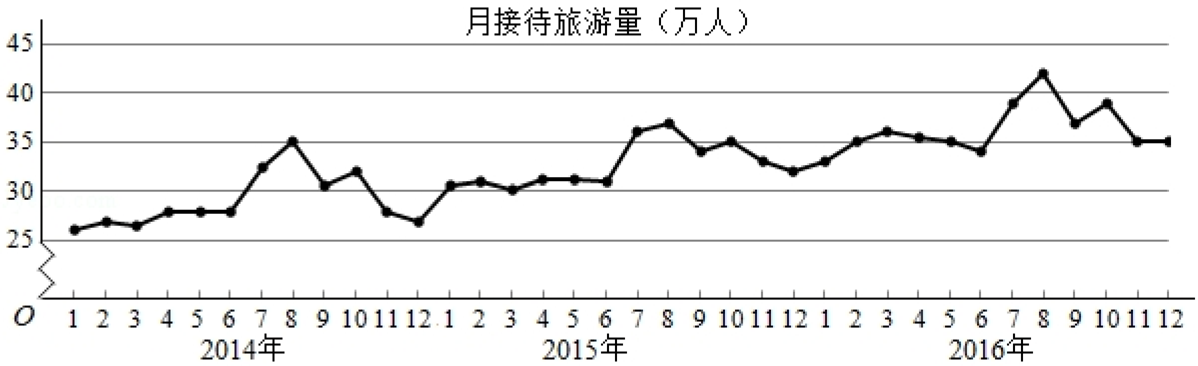
【解答】解：∵（1+i）z=2i，∴（1﹣i）（1+i）z=2i（1﹣i），z=i+1．

则|z|=$\sqrt{2}$.

故选：C．

【点评】本题考查了复数的运算法则、模的计算公式，考查了推理能力与计算能力，属于基础题．

3．（5 分）某城市为了解游客人数的变化规律，提高旅游服务质量，收集并整理了 2014 年 1 月至 2016 年 12 月期间月接待游客量（单位：万人）的数据，绘制了下面的折线图．



根据该折线图，下列结论错误的是（　　）

A．月接待游客量逐月增加

B．年接待游客量逐年增加

C．各年的月接待游客量高峰期大致在 7，8 月

D．各年 1 月至 6 月的月接待游客量相对于 7 月至 12 月，波动性更小，变化比较平稳

【考点】2K：命题的真假判断与应用；B9：频率分布折线图、密度曲线．

【专题】27：图表型；2A：探究型；5I：概率与统计．

【分析】根据已知中 2014 年 1 月至 2016 年 12 月期间月接待游客量（单位：万人）的数据，逐一分析给定四个结论的正误，可得答案．

【解答】解：由已有中 2014 年 1 月至 2016 年 12 月期间月接待游客量（单位：万人）的数据可得：

月接待游客量逐月有增有减，故 A 错误；

年接待游客量逐年增加，故 B 正确；

各年的月接待游客量高峰期大致在 7，8 月，故 C 正确；

各年 1 月至 6 月的月接待游客量相对于 7 月至 12 月，波动性更小，变化比较平

稳，故 D 正确；

故选：A．

【点评】本题考查的知识点是数据的分析，命题的真假判断与应用，难度不大，属于基础题．

4．（5 分）$(x+y)(2x-y)^5$ 的展开式中的 x^3y^3 系数为（　　）

A．－80　　B．－40　　C．40　　D．80

【考点】DA：二项式定理．

【专题】34：方程思想；5P：二项式定理．

【分析】$(2x-y)^5$ 的展开式的通项公式：$T_{r+1}=C_5^r(2x)^{5-r}(-y)^r=2^{5-r}(-1)^rC_5^rx^{5-r}y^r$．令 $5-r=2$，$r=3$，解得 $r=3$．令 $5-r=3$，$r=2$，解得 $r=2$．即可得出．

【解答】解：$(2x-y)^5$ 的展开式的通项公式：$T_{r+1}=C_5^r(2x)^{5-r}(-y)^r=2^{5-r}(-1)^rC_5^rx^{5-r}y^r$．

令 $5-r=2$，$r=3$，解得 $r=3$．

令 $5-r=3$，$r=2$，解得 $r=2$．

∴ $(x+y)(2x-y)^5$ 的展开式中的 x^3y^3 系数 $=2^2\times(-1)^3C_5^3+2^3\times1\times C_5^2=40$．

故选：C．

【点评】本题考查了二项式定理的应用，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．

5．（5 分）已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的一条渐近线方程为 $y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$，且与椭圆 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$ 有公共焦点，则 C 的方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{10}=1$　　B．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$　　C．$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$　　D．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$

【考点】KC：双曲线的性质．

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】求出椭圆的焦点坐标，得到双曲线的焦点坐标，利用双曲线的渐近线方程，求出双曲线实半轴与虚半轴的长，即可得到双曲线方程．

【解答】解：椭圆$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$的焦点坐标（±3，0），

则双曲线的焦点坐标为（±3，0），可得 c=3，

双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ （a＞0，b＞0）的一条渐近线方程为 $y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$，

可得$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，即$\frac{c^2-a^2}{a^2}=\frac{5}{4}$，可得$\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$，解得 a=2，$b=\sqrt{5}$，

所求的双曲线方程为：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$．

故选：B．

【点评】本题考查椭圆与双曲线的简单性质的应用，双曲线方程的求法，考查计算能力．

6．（5 分）设函数 $f(x)=\cos(x+\frac{\pi}{3})$，则下列结论错误的是（　　）

A．f（x）的一个周期为-2π

B．y=f（x）的图象关于直线 $x=\frac{8\pi}{3}$对称

C．f（x+π）的一个零点为 $x=\frac{\pi}{6}$

D．f（x）在（$\frac{\pi}{2}$，π）单调递减

【考点】H7：余弦函数的图象．

【专题】33：函数思想；4O：定义法；57：三角函数的图像与性质．

【分析】根据三角函数的图象和性质分别进行判断即可．

【解答】解：A．函数的周期为 $2k\pi$，当 $k=-1$ 时，周期 $T=-2\pi$，故 A 正确，

B．当 $x=\frac{8\pi}{3}$时，$\cos(x+\frac{\pi}{3})=\cos(\frac{8\pi}{3}+\frac{\pi}{3})=\cos\frac{9\pi}{3}=\cos 3\pi=-1$ 为最小值，此时 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{8\pi}{3}$对称，故 B 正确，

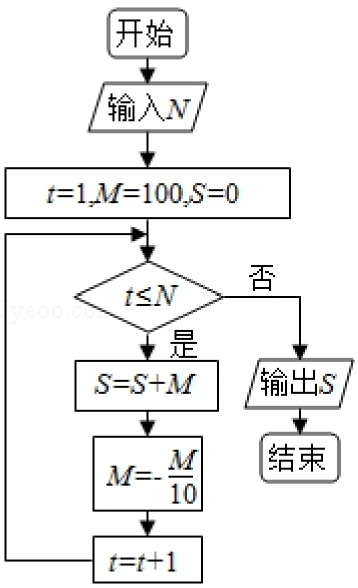
C 当 $x=\frac{\pi}{6}$时，$f(\frac{\pi}{6}+\pi)=\cos(\frac{\pi}{6}+\pi+\frac{\pi}{3})=\cos\frac{3\pi}{2}=0$，则 $f(x+\pi)$ 的一个零点为 $x=\frac{\pi}{6}$，故 C 正确，

D．当$\frac{\pi}{2}<x<\pi$ 时，$\frac{5\pi}{6}<x+\frac{\pi}{3}<\frac{4\pi}{3}$，此时函数 $f(x)$ 不是单调函数，故 D 错误，

故选：D．

【点评】本题主要考查与三角函数有关的命题的真假判断，根据三角函数的图象和性质是解决本题的关键．

7．（5 分）执行如图的程序框图，为使输出 S 的值小于 91，则输入的正整数 N 的最小值为（　　）



A．5　　B．4　　C．3　　D．2

【考点】EF：程序框图．

【专题】11：计算题；39：运动思想；49：综合法；5K：算法和程序框图．

【分析】通过模拟程序，可得到 S 的取值情况，进而可得结论.

【解答】解：由题可知初始值 t=1，M=100，S=0，

要使输出 S 的值小于 91，应满足“t≤N”，

则进入循环体，从而 S=100，M=﹣ 10，t=2，

要使输出 S 的值小于 91，应接着满足“t≤N”，

则进入循环体，从而 S=90，M=1，t=3，

要使输出 S 的值小于 91，应不满足“t≤N”，跳出循环体，

此时 N 的最小值为 2，

故选：D.

【点评】本题考查程序框图，判断出什么时候跳出循环体是解决本题的关键，注意解题方法的积累，属于中档题.

8．（5 分）已知圆柱的高为 1，它的两个底面的圆周在直径为 2 的同一个球的球面上，则该圆柱的体积为（　　）

A．π　　B．$\frac{3\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{2}$　　D．$\frac{\pi}{4}$

【考点】LF：棱柱、棱锥、棱台的体积；LR：球内接多面体.

【专题】11：计算题；34：方程思想；4O：定义法；5Q：立体几何.

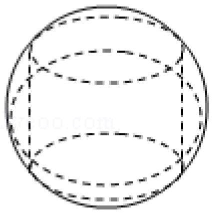
【分析】推导出该圆柱底面圆周半径 $r=\sqrt{1^2-(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由此能求出该圆柱的体积.

【解答】解：∵圆柱的高为 1，它的两个底面的圆周在直径为 2 的同一个球的球面上，

∴该圆柱底面圆周半径 $r=\sqrt{1^2-(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴该圆柱的体积：$V=Sh=\pi\times(\frac{\sqrt{3}}{2})^2\times1=\frac{3\pi}{4}$.

故选：B.



【点评】本题考查面圆柱的体积的求法，考查圆柱、球等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力、空间想象能力，考查化归与转化思想，是中档题.

9．（5 分）等差数列$\{a_n\}$的首项为 1，公差不为 0．若 a_2，a_3，a_6 成等比数列，则$\{a_n\}$前 6 项的和为（　　）

A．﹣24　　B．﹣3　　C．3　　D．8

【考点】85：等差数列的前 n 项和.

【专题】11：计算题；34：方程思想；4O：定义法；54：等差数列与等比数列.

【分析】利用等差数列通项公式、等比数列性质列出方程，求出公差，由此能求出$\{a_n\}$前 6 项的和.

【解答】解：∵等差数列$\{a_n\}$的首项为 1，公差不为 0．a_2，a_3，a_6 成等比数列，

∴$a_3^2=a_2\cdot a_6$，

∴$(a_1+2d)^2=(a_1+d)(a_1+5d)$，且 $a_1=1$，$d\neq 0$，

解得 $d=-2$，

∴$\{a_n\}$前 6 项的和为$S_6=6a_1+\frac{6\times 5}{2}d=6\times 1+\frac{6\times 5}{2}\times(-2)=-24$.

故选：A.

【点评】本题考查等差数列前 n 项和的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意等差数列、等比数列的性质的合理运用.

10．（5 分）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的左、右顶点分别为 A_1，A_2，且以线段 A_1A_2 为直径的圆与直线 $bx-ay+2ab=0$ 相切，则 C 的离心率为（　　）

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

【考点】K4：椭圆的性质．

【专题】34：方程思想；5B：直线与圆；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】以线段 A_1A_2 为直径的圆与直线 $bx-ay+2ab=0$ 相切，可得原点到直线的距离$\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=a$，化简即可得出．

【解答】解：以线段 A_1A_2 为直径的圆与直线 $bx-ay+2ab=0$ 相切，

∴原点到直线的距离$\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=a$，化为：$a^2=3b^2$．

∴椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$．

故选：A．

【点评】本题考查了椭圆的标准方程及其性质、直线与圆相切的性质、点到直线的距离公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．

11．（5 分）已知函数 $f(x)=x^2-2x+a(e^{x-1}+e^{-x+1})$ 有唯一零点，则 a=（　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

【考点】52：函数零点的判定定理．

【专题】11：计算题；33：函数思想；49：综合法；51：函数的性质及应用．

【分析】通过转化可知问题等价于函数 $y=1-(x-1)^2$ 的图象与 $y=a(e^{x-1}+\frac{1}{e^{x-1}})$ 的图象只有一个交点求 a 的值．分 a=0、a＜0、a＞0 三种情况，结合函数的单调性分析可得结论．

【解答】解：因为 $f(x)=x^2-2x+a(e^{x-1}+e^{-x+1})=-1+(x-1)^2+a(e^{x-1}+\frac{1}{e^{x-1}})=0$，

所以函数 f（x）有唯一零点等价于方程 $1-(x-1)^2=a(e^{x-1}+\frac{1}{e^{x-1}})$ 有唯一解，

等价于函数 $y=1-(x-1)^2$ 的图象与 $y=a(e^{x-1}+\frac{1}{e^{x-1}})$ 的图象只有一个交点．

①当 a=0 时，$f(x)=x^2-2x\geqslant-1$，此时有两个零点，矛盾；

②当 a＜0 时，由于 $y=1-(x-1)^2$ 在（－∞，1）上递增、在（1，+∞）上递减，

且 $y=a(e^{x-1}+\frac{1}{e^{x-1}})$ 在（－∞，1）上递增、在（1，+∞）上递减，

所以函数 $y=1-(x-1)^2$ 的图象的最高点为 A（1，1），$y=a(e^{x-1}+\frac{1}{e^{x-1}})$ 的图象的最高点为 B（1，2a），

由于 2a＜0＜1，此时函数 $y=1-(x-1)^2$ 的图象与 $y=a(e^{x-1}+\frac{1}{e^{x-1}})$ 的图象有两个交点，矛盾；

③当 a＞0 时，由于 $y=1-(x-1)^2$ 在（－∞，1）上递增、在（1，+∞）上递减，

且 $y=a(e^{x-1}+\frac{1}{e^{x-1}})$ 在（－∞，1）上递减、在（1，+∞）上递增，

所以函数 $y=1-(x-1)^2$ 的图象的最高点为 A（1，1），$y=a(e^{x-1}+\frac{1}{e^{x-1}})$ 的图象的最低点为 B（1，2a），

由题可知点 A 与点 B 重合时满足条件，即 2a=1，即 $a=\frac{1}{2}$，符合条件；

综上所述，$a=\frac{1}{2}$，

故选：C．

【点评】本题考查函数零点的判定定理，考查函数的单调性，考查运算求解能力，考查数形结合能力，考查转化与化归思想，考查分类讨论的思想，注意解题方法的积累，属于难题．

12．（5 分）在矩形 ABCD 中，AB=1，AD=2，动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上．若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，则 λ+μ 的最大值为（　　）

A．3　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．2

【考点】9S：数量积表示两个向量的夹角.

【专题】11：计算题；31：数形结合；4R：转化法；57：三角函数的图像与性质；5A：平面向量及应用；5B：直线与圆.

【分析】如图：以 A 为原点，以 AB，AD 所在的直线为 x，y 轴建立如图所示的坐标系，先求出圆的标准方程，再设点 P 的坐标为（$\frac{2\sqrt{5}}{5}$cosθ+1，$\frac{2\sqrt{5}}{5}$sinθ+2），根据$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，求出 λ，μ，根据三角函数的性质即可求出最值.

【解答】解：如图：以 A 为原点，以 AB，AD 所在的直线为 x，y 轴建立如图所示的坐标系，

则 A（0，0），B（1，0），D（0，2），C（1，2），

∵动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上，

设圆的半径为 r，

∵BC=2，CD=1，

∴$BD=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

∴$\frac{1}{2}BC\bullet CD=\frac{1}{2}BD\bullet r$，

∴$r=\frac{2}{\sqrt{5}}$，

∴圆的方程为$(x-1)^2+(y-2)^2=\frac{4}{5}$，

设点 P 的坐标为（$\frac{2\sqrt{5}}{5}\cos\theta+1$，$\frac{2\sqrt{5}}{5}\sin\theta+2$），

∵$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，

∴（$\frac{2\sqrt{5}}{5}\cos\theta+1$，$\frac{2\sqrt{5}}{5}\sin\theta+2$）=λ（1，0）+μ（0，2）=（λ，2μ），

∴$\frac{2\sqrt{5}}{5}\cos\theta+1=\lambda$，$\frac{2\sqrt{5}}{5}\sin\theta+2=2\mu$，

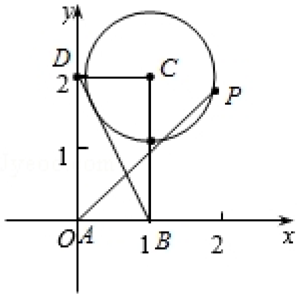
∴$\lambda+\mu=\frac{2\sqrt{5}}{5}\cos\theta+\frac{\sqrt{5}}{5}\sin\theta+2=\sin(\theta+\phi)+2$，其中 tanϕ=2，

∵$-1\leqslant\sin(\theta+\phi)\leqslant1$，

∴$1\leqslant\lambda+\mu\leqslant3$，

故 λ+μ 的最大值为 3，

故选：A．



【点评】本题考查了向量的坐标运算以及圆的方程和三角函数的性质，关键是设点 P 的坐标，考查了学生的运算能力和转化能力，属于中档题．

二、填空题:本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．（5 分）若 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x-y\geqslant 0\\ x+y-2\leqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$，则 z=3x﹣ 4y 的最小值为__﹣ 1__．

【考点】7C：简单线性规划．

【专题】11：计算题；31：数形结合；44：数形结合法；5T：不等式．

【分析】作出不等式组对应的平面区域，利用目标函数的几何意义，求目标函数 z=3x﹣ 4y 的最小值．

【解答】解：由 z=3x﹣ 4y，得 $y=\frac{3}{4}x-\frac{z}{4}$，作出不等式对应的可行域（阴影部分），

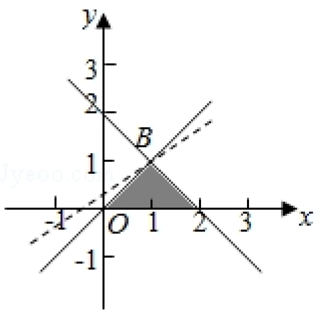
平移直线 $y=\frac{3}{4}x-\frac{z}{4}$，由平移可知当直线 $y=\frac{3}{4}x-\frac{z}{4}$，

经过点 B（1，1）时，直线 $y=\frac{3}{4}x-\frac{z}{4}$的截距最大，此时 z 取得最小值，

将 B 的坐标代入 z=3x﹣ 4y=3﹣ 4=﹣ 1，

即目标函数 z=3x﹣ 4y 的最小值为﹣ 1．

故答案为：﹣ 1．



【点评】本题主要考查线性规划的应用，利用目标函数的几何意义，结合数形结合的数学思想是解决此类问题的基本方法．

14．（5 分）设等比数列$\{a_n\}$满足 $a_1+a_2=-1$，$a_1-a_3=-3$，则 $a_4=$__-8__．

【考点】88：等比数列的通项公式．

【专题】34：方程思想；35：转化思想；54：等差数列与等比数列．

【分析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，由 $a_1+a_2=-1$，$a_1-a_3=-3$，可得：$a_1(1+q)=-1$，$a_1(1-q^2)=-3$，解出即可得出．

【解答】解：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，∵$a_1+a_2=-1$，$a_1-a_3=-3$，

∴$a_1(1+q)=-1$，$a_1(1-q^2)=-3$，

解得 $a_1=1$，$q=-2$．

则 $a_4=(-2)^3=-8$．

故答案为：-8．

【点评】本题考查了等比数列的通项公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．

15．（5 分）设函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\leqslant 0 \\ 2^x, & x>0 \end{cases}$，则满足 $f(x)+f(x-\frac{1}{2})>1$ 的 x 的取值范围是__$(-\frac{1}{4}, +\infty)$__．

【考点】3T：函数的值．

【专题】32：分类讨论；4R：转化法；51：函数的性质及应用．

【分析】根据分段函数的表达式，分别讨论 x 的取值范围，进行求解即可．

【解答】解：若 $x\leqslant 0$，则 $x-\frac{1}{2}\leqslant -\frac{1}{2}$，

则 $f(x)+f(x-\frac{1}{2})>1$ 等价为 $x+1+x-\frac{1}{2}+1>1$，即 $2x>-\frac{1}{2}$，则 $x>-\frac{1}{4}$，

此时 $-\frac{1}{4}<x\leqslant 0$，

当 $x>0$ 时，$f(x)=2^x>1$，$x-\frac{1}{2}>-\frac{1}{2}$，

当 $x-\frac{1}{2}>0$ 即 $x>\frac{1}{2}$时，满足 $f(x)+f(x-\frac{1}{2})>1$ 恒成立，

当 $0\geqslant x-\frac{1}{2}>-\frac{1}{2}$，即$\frac{1}{2}\geqslant x>0$ 时，$f(x-\frac{1}{2})=x-\frac{1}{2}+1=x+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}$，

此时 $f(x)+f(x-\frac{1}{2})>1$ 恒成立，

综上 $x>-\frac{1}{4}$，

故答案为：$(-\frac{1}{4},+\infty)$．

【点评】本题主要考查不等式的求解，结合分段函数的不等式，利用分类讨论的数学思想进行求解是解决本题的关键．

16．（5 分）a，b 为空间中两条互相垂直的直线，等腰直角三角形 ABC 的直角边 AC 所在直线与 a，b 都垂直，斜边 AB 以直线 AC 为旋转轴旋转，有下列结论：

①当直线 AB 与 a 成 60°角时，AB 与 b 成 30°角；

②当直线 AB 与 a 成 60°角时，AB 与 b 成 60°角；

③直线 AB 与 a 所成角的最小值为 45°；

④直线 AB 与 a 所成角的最小值为 60°；

其中正确的是__②③__．（填写所有正确结论的编号）

【考点】MI：直线与平面所成的角．

【专题】11：计算题；31：数形结合；41：向量法；5F：空间位置关系与距离．

【分析】由题意知，a、b、AC 三条直线两两相互垂直，构建如图所示的边长为 1 的正方体，$|AC|=1$，$|AB|=\sqrt{2}$，斜边 AB 以直线 AC 为旋转轴，则 A 点保持不变，B 点的运动轨迹是以 C 为圆心，1 为半径的圆，以 C 坐标原点，以 CD 为 x 轴，CB 为 y 轴，CA 为 z 轴，建立空间直角坐标系，利用向量法能求出结果.

【解答】解：由题意知，a、b、AC 三条直线两两相互垂直，画出图形如图，

不妨设图中所示正方体边长为 1，

故$|AC|=1$，$|AB|=\sqrt{2}$，\

斜边 AB 以直线 AC 为旋转轴，则 A 点保持不变，

B 点的运动轨迹是以 C 为圆心，1 为半径的圆，

以 C 坐标原点，以 CD 为 x 轴，CB 为 y 轴，CA 为 z 轴，建立空间直角坐标系，

则 D（1，0，0），A（0，0，1），直线 a 的方向单位向量$\vec{a}=$（0，1，0），$|\vec{a}|=1$，

直线 b 的方向单位向量$\vec{b}=$（1，0，0），$|\vec{b}|=1$，

设 B 点在运动过程中的坐标中的坐标 B′（cosθ，sinθ，0），

其中 θ 为 B′C 与 CD 的夹角，θ∈[0，2π），

∴AB′在运动过程中的向量，$\overrightarrow{AB'}=$（cosθ，sinθ，﹣1），$|\overrightarrow{AB'}|=\sqrt{2}$，

设$\overrightarrow{AB'}$与$\vec{a}$所成夹角为 $\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]$，

则 $\cos\alpha=\dfrac{|(-\cos\theta,-\sin\theta,1)\cdot(0,1,0)|}{|\vec{a}|\cdot|\overrightarrow{AB'}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}|\sin\theta|\in[0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}]$，

∴$\alpha\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$，∴③正确，④错误.

设$\overrightarrow{AB'}$与$\vec{b}$所成夹角为 $\beta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，

$\cos\beta=\dfrac{|\overrightarrow{AB'}\cdot\vec{b}|}{|\overrightarrow{AB'}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{|(-\cos\theta,\sin\theta,1)\cdot(1,0,0)|}{|\vec{b}|\cdot|\overrightarrow{AB'}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}|\cos\theta|$，

当$\overrightarrow{AB'}$与$\vec{a}$夹角为 60°时，即 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，

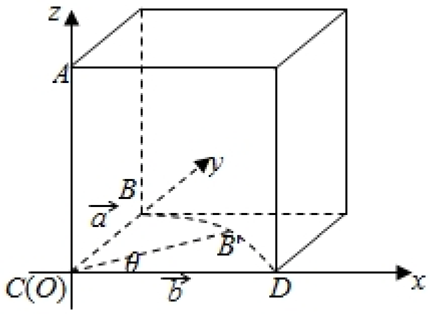
$|\sin\theta|=\sqrt{2}\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∵$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，∴$\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}|\cos\theta|=\frac{1}{2}$，

∵β∈[0，$\frac{\pi}{2}$]，∴β=$\frac{\pi}{3}$，此时$\overrightarrow{AB}$与$\vec{b}$的夹角为60°，

∴②正确，①错误.

故答案为：②③.



【点评】本题考查命题真假的判断，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力、空间想象能力，考查数形结合思想、化归与转化思想，是中档题.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。（一）必考题：60分。

17．（12分）△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\sin A+\sqrt{3}\cos A=0$，$a=2\sqrt{7}$，b=2.

（1）求c；

（2）设D为BC边上一点，且AD⊥AC，求△ABD的面积.

【考点】HT：三角形中的几何计算.

【专题】11：计算题；35：转化思想；4O：定义法；58：解三角形.

【分析】（1）先根据同角的三角函数的关系求出A，再根据余弦定理即可求出，

（2）先根据夹角求出cosC，求出CD的长，得到$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

【解答】解：（1）∵$\sin A+\sqrt{3}\cos A=0$，

∴$\tan A=-\sqrt{3}$，

∵0＜A＜π，

∴$A=\frac{2\pi}{3}$，

由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

即 $28=4+c^2-2\times2c\times(-\frac{1}{2})$，

即 $c^2+2c-24=0$，

解得 $c=-6$（舍去）或 $c=4$，

故 $c=4$．

（2）$\because c^2=b^2+a^2-2ab\cos C$，

$\therefore 16=28+4-2\times2\sqrt{7}\times2\times\cos C$，

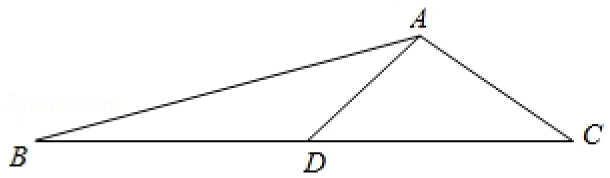
$\therefore \cos C=\frac{2}{\sqrt{7}}$，

$\therefore CD=\frac{AC}{\cos C}=\frac{2}{\frac{2}{\sqrt{7}}}=\sqrt{7}$

$\therefore CD=\frac{1}{2}BC$

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\bullet AC\bullet\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\times4\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$



【点评】本题考查了余弦定理和三角形的面积公式，以及解三角形的问题，属于中档题

18．（12 分）某超市计划按月订购一种酸奶，每天进货量相同，进货成本每瓶 4 元，售价每瓶 6 元，未售出的酸奶降价处理，以每瓶 2 元的价格当天全部处理完．根据往年销售经验，每天需求量与当天最高气温（单位：℃）有关．如果最高气温不低于 25，需求量为 500 瓶；如果最高气温位于区间[20，25)，需求量为 300 瓶；如果最高气温低于 20，需求量为 200 瓶．为了确定六月份的订购计划，统计了前三年六月份各天的最高气温数据，得下面的频数分布表：

最高气温	[10，15）	[15，20）	[20，25）	[25，30）	[30，35）	[35，40）
天数	2	16	36	25	7	4

以最高气温位于各区间的频率代替最高气温位于该区间的概率.

（1）求六月份这种酸奶一天的需求量 X（单位：瓶）的分布列；

（2）设六月份一天销售这种酸奶的利润为 Y（单位：元），当六月份这种酸奶一天的进货量 n（单位：瓶）为多少时，Y 的数学期望达到最大值？

【考点】CG：离散型随机变量及其分布列；CH：离散型随机变量的期望与方差.

【专题】11：计算题；32：分类讨论；49：综合法；5I：概率与统计.

【分析】（1）由题意知 X 的可能取值为 200，300，500，分别求出相应的概率，由此能求出 X 的分布列.

（2）由题意知这种酸奶一天的需求量至多为 500 瓶，至少为 200 瓶，只需考虑 200≤n≤500，根据 300≤n≤500 和 200≤n≤300 分类讨论经，能得到当 n=300 时，EY 最大值为 520 元.

【解答】解：（1）由题意知 X 的可能取值为 200，300，500，

P（X=200）$=\frac{2+16}{90}=0.2$，

P（X=300）$=\frac{36}{90}=0.4$，

P（X=500）$=\frac{25+7+4}{90}=0.4$，

∴X 的分布列为：

X	200	300	500
P	0.2	0.4	0.4

（2）由题意知这种酸奶一天的需求量至多为 500 瓶，至少为 200 瓶，

∴只需考虑 200≤n≤500，

当 300≤n≤500 时，

若最高气温不低于 25，则 Y=6n﹣4n=2n；

若最高气温位于区间[20，25），则 Y=6×300+2（n﹣300）﹣4n=1200﹣2n；

若最高气温低于 20，则 $Y=6\times200+2(n-200)-4n=800-2n$，

$\therefore EY=2n\times0.4+(1200-2n)\times0.4+(800-2n)\times0.2=640-0.4n$，

当 $200\leqslant n\leqslant300$ 时，

若最高气温不低于 20，则 $Y=6n-4n=2n$，

若最高气温低于 20，则 $Y=6\times200+2(n-200)-4n=800-2n$，

$\therefore EY=2n\times(0.4+0.4)+(800-2n)\times0.2=160+1.2n$.

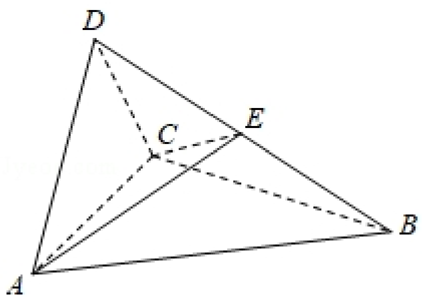
$\therefore n=300$ 时，Y 的数学期望达到最大值，最大值为 520 元.

【点评】本题考查离散型随机变量的分布列的求法，考查数学期望的最大值的求法，考查函数、离散型随机变量分布列、数学期望等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力，考查分类与整合思想、化归与转化思想，是中档题.

19. （12 分）如图，四面体 ABCD 中，△ABC 是正三角形，△ACD 是直角三角形，$\angle ABD=\angle CBD$，$AB=BD$.

（1）证明：平面 ACD⊥平面 ABC；

（2）过 AC 的平面交 BD 于点 E，若平面 AEC 把四面体 ABCD 分成体积相等的两部分，求二面角 D－AE－C 的余弦值.



【考点】LY：平面与平面垂直；MJ：二面角的平面角及求法.

【专题】31：数形结合；35：转化思想；5F：空间位置关系与距离；5G：空间角.

【分析】（1）如图所示，取 AC 的中点 O，连接 BO，OD．△ABC 是等边三角形，可得 OB⊥AC．由已知可得：△ABD≌△CBD，AD=CD．△ACD 是直角三角

形，可得 AC 是斜边，∠ADC=90°．可得 DO=$\frac{1}{2}$AC．利用 $DO^2+BO^2=AB^2=BD^2$．

可得 OB⊥OD．利用线面面面垂直的判定与性质定理即可证明．

（2）设点 D，B 到平面 ACE 的距离分别为 h_D，h_E．则$\frac{h_D}{h_E}=\frac{DE}{BE}$．根据平面 AEC 把四面体 ABCD 分成体积相等的两部分，可得$\frac{\frac{1}{3}S_{\triangle ACE}\cdot h_D}{\frac{1}{3}S_{\triangle ACE}\cdot h_E}=\frac{h_D}{h_E}=\frac{DE}{BE}=1$，即点 E 是 BD 的中点．建立如图所示的空间直角坐标系．不妨取 AB=2．利用法向量的夹角公式即可得出．

【解答】（1）证明：如图所示，取 AC 的中点 O，连接 BO，OD．

∵△ABC 是等边三角形，∴OB⊥AC．

△ABD 与△CBD 中，AB=BD=BC，∠ABD=∠CBD，

∴△ABD≌△CBD，∴AD=CD．

∵△ACD 是直角三角形，

∴AC 是斜边，∴∠ADC=90°．

∴DO=$\frac{1}{2}$AC．

∴$DO^2+BO^2=AB^2=BD^2$．

∴∠BOD=90°．

∴OB⊥OD．

又 DO∩AC=O，∴OB⊥平面 ACD．

又 OB⊂平面 ABC，

∴平面 ACD⊥平面 ABC．

（2）解：设点 D，B 到平面 ACE 的距离分别为 h_D，h_E．则$\frac{h_D}{h_E}=\frac{DE}{BE}$．

∵平面 AEC 把四面体 ABCD 分成体积相等的两部分，

∴$\frac{\frac{1}{3}S_{\triangle ACE}\cdot h_D}{\frac{1}{3}S_{\triangle ACE}\cdot h_E}=\frac{h_D}{h_E}=\frac{DE}{BE}=1$．

∴点 E 是 BD 的中点．

建立如图所示的空间直角坐标系．不妨取 AB=2．

则 O（0，0，0），A（1，0，0），C（﹣1，0，0），D（0，0，1），B（0，$\sqrt{3}$，0），E$(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$．

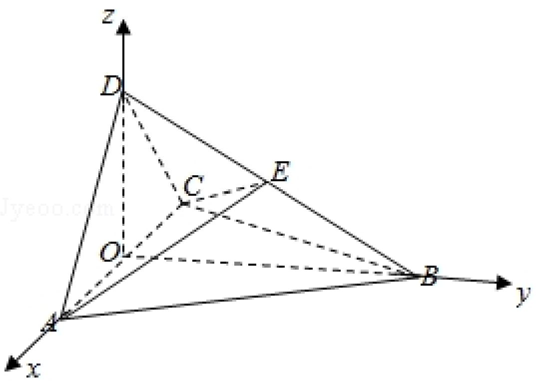
$\overrightarrow{AD}$=（﹣1，0，1），$\overrightarrow{AE}=(-1,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{AC}$=（﹣2，0，0）．

设平面 ADE 的法向量为$\overrightarrow{m}$=（x，y，z），则$\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0\\\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-x+z=0\\-x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2}z=0\end{cases}$，取$\overrightarrow{m}=(3,\sqrt{3},3)$．

同理可得：平面 ACE 的法向量为$\overrightarrow{n}$=（0，1，$-\sqrt{3}$）．

∴$\cos<\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}>=\frac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{n}|}=\frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{21}\times 2}=-\frac{\sqrt{7}}{7}$．

∴二面角 D﹣AE﹣C 的余弦值为$\frac{\sqrt{7}}{7}$．



【点评】本题考查了空间位置关系、空间角、三棱锥的体积计算公式、向量夹角公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．

20．（12 分）已知抛物线 C：$y^2=2x$，过点（2，0）的直线 l 交 C 于 A，B 两点，圆 M 是以线段 AB 为直径的圆．

（1）证明：坐标原点 O 在圆 M 上；

（2）设圆 M 过点 P（4，﹣2），求直线 l 与圆 M 的方程．

【考点】KN：直线与抛物线的综合．

【专题】35：转化思想；41：向量法；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】（1）方法一：分类讨论，当直线斜率不存在时，求得 A 和 B 的坐标，由$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=0$，则坐标原点 O 在圆 M 上；当直线 l 斜率存在，代入抛物线方程，利用韦达定理及向量数量积的可得$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=0$，则坐标原点 O 在圆 M 上；

方法二：设直线 l 的方程 x=my+2，代入抛物线方程，利用韦达定理及向量数量积的坐标运算，即可求得$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=0$，则坐标原点 O 在圆 M 上；

（2）由题意可知：$\overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{BP}=0$，根据向量数量积的坐标运算，即可求得 k 的值，求得 M 点坐标，则半径 r=丨 MP 丨，即可求得圆的方程.

【解答】解：方法一：证明：（1）当直线 l 的斜率不存在时，则 A（2，2），B（2，﹣2），

则$\overrightarrow{OA}$=（2，2），$\overrightarrow{OB}$=（2，﹣2），则$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=0$，

∴$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，

则坐标原点 O 在圆 M 上；

当直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程 y=k（x﹣2），A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

$\begin{cases} y=k(x-2) \\ y^2=2x \end{cases}$，整理得：$k^2x^2-(4k^2+2)x+4k^2=0$，

则 $x_1x_2=4$，$4x_1x_2=y_1^2y_2^2=(y_1y_2)^2$，由 $y_1y_2<0$，

则 $y_1y_2=-4$，

由$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=0$，

则$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，则坐标原点 O 在圆 M 上，

综上可知：坐标原点 O 在圆 M 上；

方法二：设直线 l 的方程 x=my+2，

$\begin{cases} x=my+2 \\ y^2=2x \end{cases}$，整理得：$y^2-2my-4=0$，A（$x_1$，$y_1$），B（$x_2$，$y_2$），

则 $y_1y_2=-4$，

则（y_1y_2）^{2}=$4x_1x_2$，则 $x_1x_2=4$，则$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=0$，

则$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，则坐标原点 O 在圆 M 上，

∴坐标原点 O 在圆 M 上；

（2）由（1）可知：$x_1x_2=4$，$x_1+x_2=\frac{4k^2+2}{k^2}$，$y_1+y_2=\frac{2}{k}$，$y_1y_2=-4$，

圆 M 过点 P（4，－2），则$\overrightarrow{AP}$=（$4-x_1$，$-2-y_1$），$\overrightarrow{BP}$=（$4-x_2$，$-2-y_2$），

由$\overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{BP}=0$，则（$4-x_1$）（$4-x_2$）+（$-2-y_1$）（$-2-y_2$）=0，

整理得：$k^2+k-2=0$，解得：$k=-2$，$k=1$，

当 $k=-2$ 时，直线 l 的方程为 $y=-2x+4$，

则 $x_1+x_2=\frac{9}{2}$，$y_1+y_2=-1$，

则 M（$\frac{9}{4}$，$-\frac{1}{2}$），半径为 $r=|MP|=\sqrt{(4-\frac{9}{4})^2+(-2+\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{85}}{4}$，

∴圆 M 的方程（$x-\frac{9}{4}$）^{2}+（$y+\frac{1}{2}$）$^2=\frac{85}{16}$.

当直线斜率 $k=1$ 时，直线 l 的方程为 $y=x-2$，

同理求得 M（3，1），则半径为 $r=|MP|=\sqrt{10}$，

∴圆 M 的方程为（$x-3$）^{2}+（$y-1$）^{2}=10，

综上可知：直线 l 的方程为 $y=-2x+4$，圆 M 的方程（$x-\frac{9}{4}$）^{2}+（$y+\frac{1}{2}$）$^2=\frac{85}{16}$，

或直线 l 的方程为 $y=x-2$，圆 M 的方程为（$x-3$）^{2}+（$y-1$）^{2}=10.

【点评】本题考查直线与抛物线的位置关系，考查韦达定理，向量数量积的坐标运算，考查计算能力，属于中档题.

21. （12 分）已知函数 f（x）=x－ 1－ alnx.

（1）若 f（x）≥0，求 a 的值；

（2）设 m 为整数，且对于任意正整数 n，（$1+\frac{1}{2}$）（$1+\frac{1}{2^2}$）…（$1+\frac{1}{2^n}$）＜m，求 m 的最小值.

【考点】6B：利用导数研究函数的单调性；6E：利用导数研究函数的最值．

【专题】11：计算题；32：分类讨论；49：综合法；53：导数的综合应用．

【分析】（1）通过对函数 $f(x)=x-1-a\ln x$（$x>0$）求导，分 $a\leqslant 0$、$a>0$ 两种情况考虑导函数 $f'(x)$ 与 0 的大小关系可得结论；

（2）通过（1）可知 $\ln x\leqslant x-1$，进而取特殊值可知 $\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)<\frac{1}{2^k}$，$k\in N^*$．

一方面利用等比数列的求和公式放缩可知 $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<e$，另一方面可知 $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)>2$，从而当 $n\geqslant 3$ 时，$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\in(2,e)$，比较可得结论．

【解答】解：（1）因为函数 $f(x)=x-1-a\ln x$，$x>0$，

所以 $f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$，且 $f(1)=0$．

所以当 $a\leqslant 0$ 时 $f'(x)>0$ 恒成立，此时 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，这与 $f(x)\geqslant 0$ 矛盾；

当 $a>0$ 时令 $f'(x)=0$，解得 $x=a$，

所以 $y=f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，即 $f(x)_{min}=f(a)$，

若 $a\neq 1$，则 $f(a)<f(1)=0$，从而与 $f(x)\geqslant 0$ 矛盾；

所以 $a=1$；

（2）由（1）可知当 $a=1$ 时 $f(x)=x-1-\ln x\geqslant 0$，即 $\ln x\leqslant x-1$，

所以 $\ln(x+1)\leqslant x$ 当且仅当 $x=0$ 时取等号，

所以 $\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)<\frac{1}{2^k}$，$k\in N^*$．

$\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}<1$，

即 $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<e$；

因为 m 为整数，且对于任意正整数 n，$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<m$ 成立，

当 $n=3$ 时，不等式左边大于 2，

所以 m 的最小值为 3．

【点评】本题是一道关于函数与不等式的综合题，考查分类讨论的思想，考查转化与化归思想，考查运算求解能力，考查等比数列的求和公式，考查放缩法，注意解题方法的积累，属于难题．

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。[选修 4-4：坐标系与参数方程]

22．（10 分）在直角坐标系 xOy 中，直线 l_1 的参数方程为$\begin{cases}x=2+t\\y=kt\end{cases}$，（t 为参数），直线 l_2 的参数方程为$\begin{cases}x=-2+m\\y=\dfrac{m}{k}\end{cases}$，（m 为参数）．设 l_1 与 l_2 的交点为 P，当 k 变化时，P 的轨迹为曲线 C．

（1）写出 C 的普通方程；

（2）以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，设 l_3：ρ（cosθ+sinθ）﹣ $\sqrt{2}$=0，M 为 l_3 与 C 的交点，求 M 的极径．

【考点】QH：参数方程化成普通方程．

【专题】34：方程思想；4Q：参数法；4R：转化法；5S：坐标系和参数方程．

【分析】解：（1）分别消掉参数 t 与 m 可得直线 l_1 与直线 l_2 的普通方程为 y=k（x﹣ 2）①与 x=﹣ 2+ky②；联立①②，消去 k 可得 C 的普通方程为 x^2﹣ y^2=4；

（2）将 l_3 的极坐标方程为 ρ（cosθ+sinθ）﹣ $\sqrt{2}$=0 化为普通方程：x+y﹣ $\sqrt{2}$=0，再与曲线 C 的方程联立，可得$\begin{cases}x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\\y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$，即可求得 l_3 与 C 的交点 M 的极径为 ρ=$\sqrt{5}$．

【解答】解：（1）∵直线 l_1 的参数方程为$\begin{cases}x=2+t\\y=kt\end{cases}$，（t 为参数），

∴消掉参数 t 得：直线 l_1 的普通方程为：y=k（x﹣ 2）①；

又直线 l_2 的参数方程为$\begin{cases}x=-2+m\\y=\dfrac{m}{k}\end{cases}$，（m 为参数），

同理可得，直线 l_2 的普通方程为：x=﹣ 2+ky②；

联立①②，消去k得：$x^2-y^2=4$，即C的普通方程为$x^2-y^2=4$（$x\neq2$且$y\neq0$）；

（2）∵l_3的极坐标方程为$\rho(\cos\theta+\sin\theta)-\sqrt{2}=0$，

∴其普通方程为：$x+y-\sqrt{2}=0$，

联立$\begin{cases}x+y=\sqrt{2}\\x^2-y^2=4\end{cases}$得：$\begin{cases}x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\\y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$，

∴$\rho^2=x^2+y^2=\frac{18}{4}+\frac{2}{4}=5$.

∴l_3与C的交点M的极径为$\rho=\sqrt{5}$.

【点评】本题考查参数方程与极坐标方程化普通方程，考查函数与方程思想与等价转化思想的运用，属于中档题.

[选修4-5：不等式选讲]

23．已知函数$f(x)=|x+1|-|x-2|$.

（1）求不等式$f(x)\geq1$的解集；

（2）若不等式$f(x)\geq x^2-x+m$的解集非空，求m的取值范围.

【考点】R4：绝对值三角不等式；R5：绝对值不等式的解法.

【专题】32：分类讨论；33：函数思想；4C：分类法；4R：转化法；51：函数的性质及应用；5T：不等式.

【分析】（1）由于$f(x)=|x+1|-|x-2|=\begin{cases}-3,&x<-1\\2x-1,&-1\leq x\leq2\\3,&x>2\end{cases}$，解不等式$f(x)\geq1$可分$-1\leq x\leq2$与$x>2$两类讨论即可解得不等式$f(x)\geq1$的解集；

（2）依题意可得$m\leq[f(x)-x^2+x]_{max}$，设$g(x)=f(x)-x^2+x$，分$x\leq1$、$-1<x<2$、$x\geq2$三类讨论，可求得$g(x)_{max}=\frac{5}{4}$，从而可得m的取值范围.

【解答】解：（1）∵$f(x)=|x+1|-|x-2|=\begin{cases}-3,&x<-1\\2x-1,&-1\leq x\leq2\\3,&x>2\end{cases}$，$f(x)\geq1$，

∴当$-1\leqslant x\leqslant 2$时，$2x-1\geqslant 1$，解得$1\leqslant x\leqslant 2$；

当$x>2$时，$3\geqslant 1$恒成立，故$x>2$；

综上，不等式$f(x)\geqslant 1$的解集为$\{x|x\geqslant 1\}$.

（2）原式等价于存在$x\in R$使得$f(x)-x^2+x\geqslant m$成立，

即$m\leqslant [f(x)-x^2+x]_{max}$，设$g(x)=f(x)-x^2+x$.

由（1）知，$g(x)=\begin{cases}-x^2+x-3, & x\leqslant -1\\ -x^2+3x-1, & -1<x<2,\\ -x^2+x+3, & x\geqslant 2\end{cases}$

当$x\leqslant -1$时，$g(x)=-x^2+x-3$，其开口向下，对称轴方程为$x=\dfrac{1}{2}>-1$，

∴$g(x)\leqslant g(-1)=-1-1-3=-5$；

当$-1<x<2$时，$g(x)=-x^2+3x-1$，其开口向下，对称轴方程为$x=\dfrac{3}{2}\in(-1,2)$，

∴$g(x)\leqslant g(\dfrac{3}{2})=-\dfrac{9}{4}+\dfrac{9}{2}-1=\dfrac{5}{4}$；

当$x\geqslant 2$时，$g(x)=-x^2+x+3$，其开口向下，对称轴方程为$x=\dfrac{1}{2}<2$，

∴$g(x)\leqslant g(2)=-4+2+3=1$；

综上，$g(x)_{max}=\dfrac{5}{4}$，

∴m的取值范围为$(-\infty,\dfrac{5}{4}]$.

【点评】本题考查绝对值不等式的解法，去掉绝对值符号是解决问题的关键，突出考查分类讨论思想与等价转化思想、函数与方程思想的综合运用，属于难题.