

2017 年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标Ⅱ）

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. (5 分) $\frac{3+i}{1+i} = (\quad)$

- A. $1+2i$ B. $1-2i$ C. $2+i$ D. $2-i$

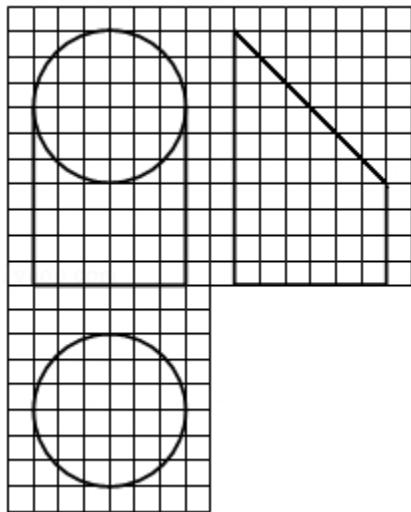
2. (5 分) 设集合 $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{x | x^2-4x+m=0\}$. 若 $A \cap B=\{1\}$, 则 $B= (\quad)$

- A. $\{1, -3\}$ B. $\{1, 0\}$ C. $\{1, 3\}$ D. $\{1, 5\}$

3. (5 分) 我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题：“远看巍巍塔七层，红光点点倍加增，共灯三百八十一，请问尖头几盏灯？”意思是：一座 7 层塔共挂了 381 盏灯，且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 2 倍，则塔的顶层共有灯 ()

- A. 1 盏 B. 3 盏 C. 5 盏 D. 9 盏

4. (5 分) 如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某几何体的三视图，该几何体由一平面将一圆柱截去一部分后所得，则该几何体的体积为 ()



- A. 90π B. 63π C. 42π D. 36π

5. (5 分) 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x+3y-3 \leqslant 0 \\ 2x-3y+3 \geqslant 0 \\ y+3 \geqslant 0 \end{cases}$, 则 $z=2x+y$ 的最小值是 ()

A. - 15

B. - 9

C. 1

D. 9

6. (5分) 安排3名志愿者完成4项工作，每人至少完成1项，每项工作由1人完成，则不同的安排方式共有()

A. 12种

B. 18种

C. 24种

D. 36种

7. (5分) 甲、乙、丙、丁四位同学一起去问老师询问成语竞赛的成绩。老师说：你们四人中有2位优秀，2位良好，我现在给甲看乙、丙的成绩，给乙看丙的成绩，给丁看甲的成绩。看后甲对大家说：我还是不知道我的成绩。根据以上信息，则()

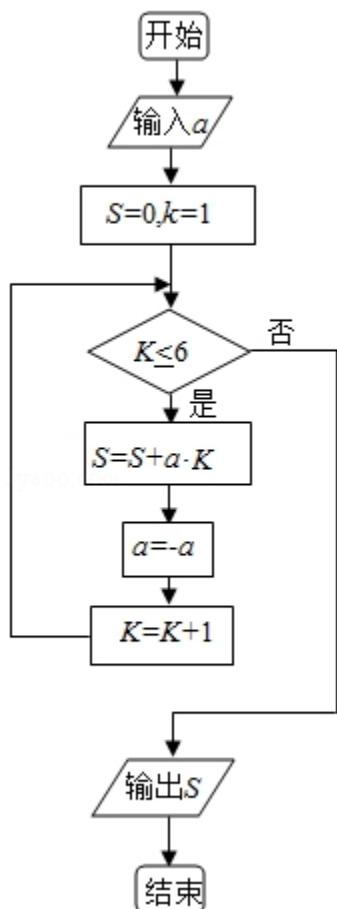
A. 乙可以知道四人的成绩

B. 丁可以知道四人的成绩

C. 乙、丁可以知道对方的成绩

D. 乙、丁可以知道自己的成绩

8. (5分) 执行如图的程序框图，如果输入的 $a = -1$ ，则输出的 $S = ()$



A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

9. (5分) 若双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线被圆 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 所截得的弦长为 2, 则 C 的离心率为 ()

A. 2

B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{2}$

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

10. (5分) 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ABC=120^\circ$, $AB=2$, $BC=CC_1=1$, 则

异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为 ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

11. (5分) 若 $x=-2$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax-1)e^{x-1}$ 的极值点, 则 $f(x)$ 的极

小值为 ()

A. -1

B. $-2e^{-3}$

C. $5e^{-3}$

D. 1

12. (5分) 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, P 为平面 ABC 内一点, 则

$\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 的最小值是 ()

A. -2

B. $-\frac{3}{2}$

C. $-\frac{4}{3}$

D. -1

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. (5分) 一批产品的二等品率为 0.02, 从这批产品中每次随机取一件, 有放回地抽取 100 次. X 表示抽到的二等品件数, 则 $DX=$ _____.

14. (5分) 函数 $f(x)=\sin^2 x + \sqrt{3}\cos x - \frac{3}{4}$ ($x \in [0, \frac{\pi}{2}]$) 的最大值是_____.

15. (5分) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_3=3$, $S_4=10$, 则 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{S_k}=$ _____.

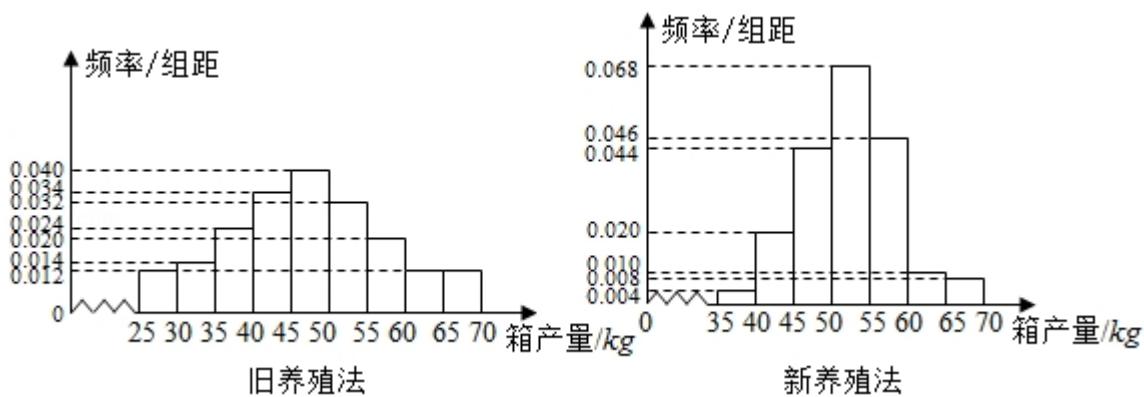
16. (5分) 已知 F 是抛物线 $C: y^2=8x$ 的焦点, M 是 C 上一点, FM 的延长线交 y 轴于点 N . 若 M 为 FN 的中点, 则 $|FN|=$ _____.

三、解答题 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答。(一) 必考题: 共 60 分。

17. (12分) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin(A+C)=8\sin^2 \frac{B}{2}$.

- (1) 求 $\cos B$;
- (2) 若 $a+c=6$, $\triangle ABC$ 的面积为 2, 求 b .

18. (12 分) 海水养殖场进行某水产品的旧、新网箱养殖方法的产量对比, 收获时各随机抽取了 100 个网箱, 测量各箱水产品的产量 (单位: kg), 其频率分布直方图如图:



- (1) 设两种养殖方法的箱产量相互独立, 记 A 表示事件“旧养殖法的箱产量低于 50kg , 新养殖法的箱产量不低于 50kg ”, 估计 A 的概率;
- (2) 填写下面列联表, 并根据列联表判断是否有 99% 的把握认为箱产量与养殖方法有关:

	箱产量 $< 50\text{kg}$	箱产量 $\geq 50\text{kg}$
旧养殖法		
新养殖法		

- (3) 根据箱产量的频率分布直方图, 求新养殖法箱产量的中位数的估计值 (精确到 0.01).

附:

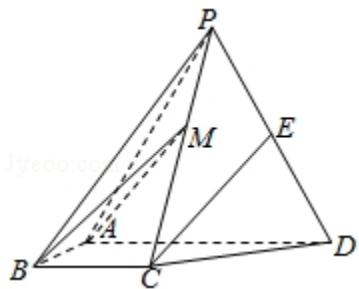
$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

19. (12分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 $ABCD$, $AB=BC=\frac{1}{2}AD$, $\angle BAD=\angle ABC=90^\circ$, E 是 PD 的中点.

(1) 证明: 直线 $CE \parallel$ 平面 PAB ;

(2) 点 M 在棱 PC 上, 且直线 BM 与底面 $ABCD$ 所成角为 45° , 求二面角 $M-AB-D$ 的余弦值.



20. (12分) 设 O 为坐标原点, 动点 M 在椭圆 $C: \frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上, 过 M 作 x 轴的垂线, 垂足为 N , 点 P 满足 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.

(1) 求点 P 的轨迹方程;

(2) 设点 Q 在直线 $x=-3$ 上, 且 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ}=1$. 证明: 过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F .

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = ax^2 - ax - x \ln x$, 且 $f(x) \geq 0$.

(1) 求 a ;

(2) 证明: $f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0 , 且 $e^{-2} < f(x_0) < 2^{-2}$.

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做,

则按所做的第一题计分。[选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

22. (10 分) 在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho \cos \theta = 4$.

(1) M 为曲线 C_1 上的动点, 点 P 在线段 OM 上, 且满足 $|OM| \cdot |OP| = 16$, 求点 P 的轨迹 C_2 的直角坐标方程;

(2) 设点 A 的极坐标为 $(2, \frac{\pi}{3})$, 点 B 在曲线 C_2 上, 求 $\triangle OAB$ 面积的最大值

.

[选修 4-5：不等式选讲] (10 分)

23. 已知 $a > 0$, $b > 0$, $a^3 + b^3 = 2$. 证明:

(1) $(a+b)(a^5+b^5) \geq 4$;

(2) $a+b \leq 2$.

2017年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标Ⅱ）

参考答案与试题解析

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. (5 分) $\frac{3+i}{1+i} = (\quad)$

- A. $1+2i$ B. $1-2i$ C. $2+i$ D. $2-i$

【考点】A5：复数的运算.

【专题】11：计算题.

【分析】分子和分母同时乘以分母的共轭复数，再利用虚数单位 i 的幂运算性质，求出结果.

【解答】解： $\frac{3+i}{1+i} = \frac{(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{4-2i}{2} = 2-i$,

故选：D.

【点评】本题考查两个复数代数形式的乘除法，虚数单位 i 的幂运算性质，两个复数相除，分子和分母同时乘以分母的共轭复数.

2. (5 分) 设集合 $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{x|x^2-4x+m=0\}$. 若 $A \cap B=\{1\}$ ，则 $B= (\quad)$

- A. $\{1, -3\}$ B. $\{1, 0\}$ C. $\{1, 3\}$ D. $\{1, 5\}$

【考点】1E：交集及其运算.

【专题】34：方程思想；40：定义法；5J：集合.

【分析】由交集的定义可得 $1 \in A$ 且 $1 \in B$ ，代入二次方程，求得 m ，再解二次方程可得集合 B .

【解答】解：集合 $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{x|x^2-4x+m=0\}$.

若 $A \cap B=\{1\}$ ，则 $1 \in A$ 且 $1 \in B$,

可得 $1 - 4 + m = 0$, 解得 $m = 3$,

即有 $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\} = \{1, 3\}$.

故选: C.

【点评】本题考查集合的运算, 主要是交集的求法, 同时考查二次方程的解法, 运用定义法是解题的关键, 属于基础题.

3. (5分) 我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题: “远看巍巍塔七层, 红光点点倍加增, 共灯三百八十一, 请问尖头几盏灯?”意思是: 一座7层塔共挂了381盏灯, 且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的2倍, 则塔的顶层共有灯()

- A. 1 盏 B. 3 盏 C. 5 盏 D. 9 盏

【考点】89: 等比数列的前n项和.

【专题】34: 方程思想; 40: 定义法; 54: 等差数列与等比数列.

【分析】设塔顶的 a_1 盏灯, 由题意 $\{a_n\}$ 是公比为2的等比数列, 利用等比数列前n项和公式列出方程, 能求出结果.

【解答】解: 设塔顶的 a_1 盏灯,

由题意 $\{a_n\}$ 是公比为2的等比数列,

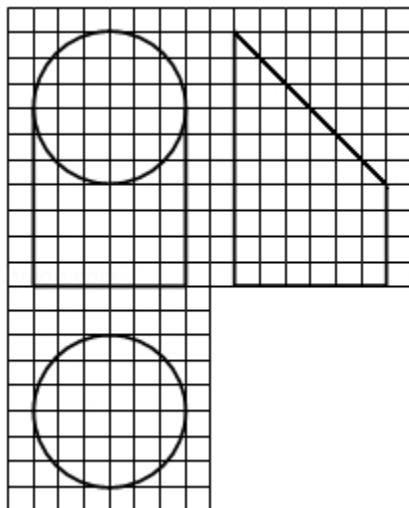
$$\therefore S_7 = \frac{a_1 (1 - 2^7)}{1 - 2} = 381,$$

解得 $a_1 = 3$.

故选: B.

【点评】本题考查等比数列的首项的求法, 是基础题, 解题时要认真审题, 注意等比数列的性质的合理运用.

4. (5分) 如图, 网格纸上小正方形的边长为1, 粗实线画出的是某几何体的三视图, 该几何体由一平面将一圆柱截去一部分后所得, 则该几何体的体积为()



- A. 90π B. 63π C. 42π D. 36π

【考点】L1：由三视图求面积、体积.

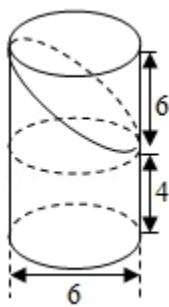
【专题】11：计算题；31：数形结合；44：数形结合法；5Q：立体几何.

【分析】由三视图可得，直观图为一个完整的圆柱减去一个高为 6 的圆柱的一半，即可求出几何体的体积.

【解答】解：由三视图可得，直观图为一个完整的圆柱减去一个高为 6 的圆柱的一半，

$$V = \pi \cdot 3^2 \times 10 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 3^2 \times 6 = 63\pi,$$

故选：B.



【点评】本题考查了体积计算公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

5. (5 分) 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x+3y-3 \leqslant 0 \\ 2x-3y+3 \geqslant 0 \\ y+3 \geqslant 0 \end{cases}$ ，则 $z=2x+y$ 的最小值是 ()

A. - 15

B. - 9

C. 1

D. 9

【考点】7C：简单线性规划.

【专题】11：计算题；31：数形结合；35：转化思想；5T：不等式.

【分析】画出约束条件的可行域，利用目标函数的最优解求解目标函数的最小值即可.

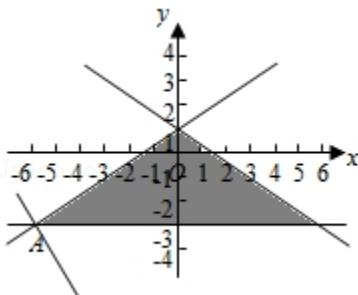
【解答】解： x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x+3y-3 \leqslant 0 \\ 2x-3y+3 \geqslant 0 \\ y+3 \geqslant 0 \end{cases}$ 的可行域如图：

$z=2x+y$ 经过可行域的 A 时，目标函数取得最小值，

由 $\begin{cases} y=-3 \\ 2x-3y+3=0 \end{cases}$ 解得 A (-6, -3) ,

则 $z=2x+y$ 的最小值是： - 15.

故选：A.



【点评】本题考查线性规划的简单应用，考查数形结合以及计算能力.

6. (5 分) 安排 3 名志愿者完成 4 项工作，每人至少完成 1 项，每项工作由 1 人完成，则不同的安排方式共有 ()

A. 12 种

B. 18 种

C. 24 种

D. 36 种

【考点】D9：排列、组合及简单计数问题.

【专题】11：计算题；49：综合法；50：排列组合.

【分析】把工作分成 3 组，然后安排工作方式即可.

【解答】解：4 项工作分成 3 组，可得： $C_4^2=6$,

安排 3 名志愿者完成 4 项工作，每人至少完成 1 项，每项工作由 1 人完成，

可得： $6 \times A_3^3 = 36$ 种.

故选：D.

【点评】本题考查排列组合的实际应用，注意分组方法以及排列方法的区别，考查计算能力.

7. (5 分) 甲、乙、丙、丁四位同学一起去问老师询问成语竞赛的成绩. 老师说：你们四人中有 2 位优秀，2 位良好，我现在给甲看乙、丙的成绩，给乙看丙的成绩，给丁看甲的成绩. 看后甲对大家说：我还是不知道我的成绩. 根据以上信息，则（ ）

- A. 乙可以知道四人的成绩
- B. 丁可以知道四人的成绩
- C. 乙、丁可以知道对方的成绩
- D. 乙、丁可以知道自己的成绩

【考点】F4：进行简单的合情推理.

【专题】2A：探究型；35：转化思想；48：分析法；5M：推理和证明.

【分析】根据四人所知只有自己看到，老师所说及最后甲说话，继而可以推出正确答案

【解答】解：四人所知只有自己看到，老师所说及最后甲说话，

甲不知自己的成绩

\rightarrow 乙丙必有一优一良，（若为两优，甲会知道自己的成绩；若是两良，甲也会知道自己的成绩）

\rightarrow 乙看到了丙的成绩，知自己的成绩

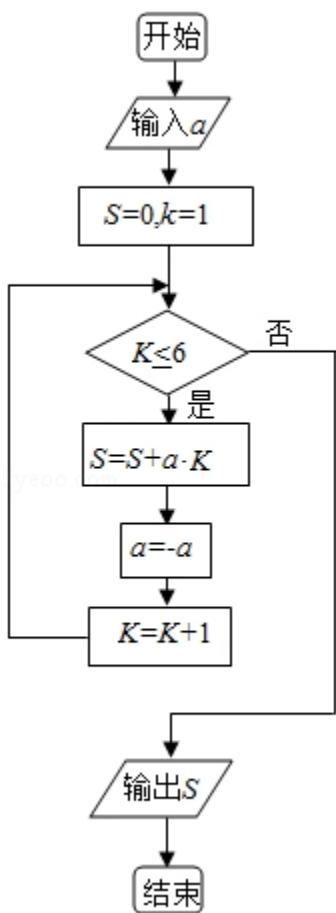
\rightarrow 丁看到甲、丁也为一优一良，丁知自己的成绩，

给甲看乙丙成绩，甲不知道自己的成绩，说明乙丙一优一良，假定乙丙都是优，则甲是良，假定乙丙都是良，则甲是优，那么甲就知道自己的成绩了. 给乙看丙成绩，乙没有说不知道自己的成绩，假定丙是优，则乙是良，乙就知道自己成绩. 给丁看甲成绩，因为甲不知道自己成绩，乙丙是一优一良，则甲丁也是一优一良，丁看到甲成绩，假定甲是优，则丁是良，丁肯定知道自己的成绩了

故选：D.

【点评】本题考查了合情推理的问题，关键掌握四人所知只有自己看到，老师所说及最后甲说话，属于中档题.

8. (5分) 执行如图的程序框图，如果输入的 $a = -1$ ，则输出的 $S = ()$



A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【考点】EF：程序框图.

【专题】11：计算题；27：图表型；4B：试验法；5K：算法和程序框图.

【分析】执行程序框图，依次写出每次循环得到的 S , K 值，当 $K=7$ 时，程序终止即可得到结论.

【解答】解：执行程序框图，有 $S=0$, $K=1$, $a=-1$ ，代入循环，

第一次满足循环， $S=-1$, $a=1$, $K=2$ ；

满足条件，第二次满足循环， $S=1$, $a=-1$, $K=3$;

满足条件，第三次满足循环， $S=-2$, $a=1$, $K=4$;

满足条件，第四次满足循环， $S=2$, $a=-1$, $K=5$;

满足条件，第五次满足循环， $S=-3$, $a=1$, $K=6$;

满足条件，第六次满足循环， $S=3$, $a=-1$, $K=7$;

$K \leq 6$ 不成立，退出循环输出 S 的值为 3.

故选：B.

【点评】本题主要考查了程序框图和算法，属于基本知识的考查，比较基础.

9. (5 分) 若双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线被圆 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 所截得的弦长为 2，则 C 的离心率为 ()

A. 2

B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{2}$

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【考点】KC：双曲线的性质；KJ：圆与圆锥曲线的综合.

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】通过圆的圆心与双曲线的渐近线的距离，列出关系式，然后求解双曲线的离心率即可.

【解答】解 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线不妨为 $bx+ay=0$

,

圆 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 的圆心 $(2, 0)$ ，半径为：2，

双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线被圆 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 所截得的弦长为 2，

可得圆心到直线的距离为: $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} = \frac{|2b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

解得: $\frac{4c^2 - 4a^2}{c^2} = 3$, 可得 $e^2 = 4$, 即 $e = 2$.

故选: A.

【点评】本题考查双曲线的简单性质的应用, 圆的方程的应用, 考查计算能力.

10. (5分) 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ABC=120^\circ$, $AB=2$, $BC=CC_1=1$, 则

异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【考点】 LM: 异面直线及其所成的角.

【专题】 31: 数形结合; 40: 定义法; 5G: 空间角.

【分析】 【解法一】设 M、N、P 分别为 AB、BB₁ 和 B₁C₁ 的中点, 得出 AB_1 、 BC_1 夹角为 MN 和 NP 夹角或其补角; 根据中位线定理, 结合余弦定理求出 AC、MQ, MP 和 $\angle MNP$ 的余弦值即可.

【解法二】通过补形的办法, 把原来的直三棱柱变成直四棱柱, 解法更简洁.

【解答】 解: 【解法一】如图所示, 设 M、N、P 分别为 AB、BB₁ 和 B₁C₁ 的中点 ,

则 AB_1 、 BC_1 夹角为 MN 和 NP 夹角或其补角

(因异面直线所成角为 $(0, \frac{\pi}{2}]$),

可知 $MN = \frac{1}{2}AB_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$,

$NP = \frac{1}{2}BC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

作 BC 中点 Q, 则 $\triangle PQM$ 为直角三角形;

$\because PQ = 1$, $MQ = \frac{1}{2}AC$,

$\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC$$

$$=4+1-2\times 2\times 1\times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$=7$,

$$\therefore AC=\sqrt{7},$$

$$\therefore MQ=\frac{\sqrt{7}}{2};$$

$$\text{在 } \triangle MQP \text{ 中, } MP=\sqrt{MQ^2+PQ^2}=\frac{\sqrt{11}}{2};$$

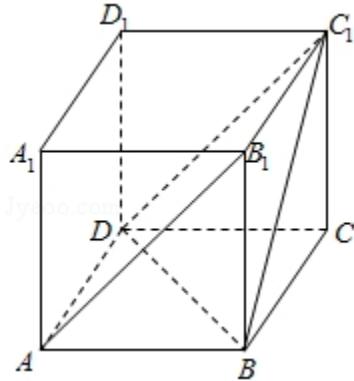
在 $\triangle PMN$ 中, 由余弦定理得

$$\cos \angle MNP = \frac{MN^2 + NP^2 - PM^2}{2 \cdot MN \cdot NP} = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}{2 \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{5},$$

又异面直线所成角的范围是 $(0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\therefore AB_1 \text{ 与 } BC_1 \text{ 所成角的余弦值为 } \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

【解法二】如图所示,



补成四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 求 $\angle BC_1D$ 即可;

$$BC_1=\sqrt{2}, \quad BD=\sqrt{2^2+1^2-2\times 2\times 1\times \cos 60^\circ}=\sqrt{3},$$

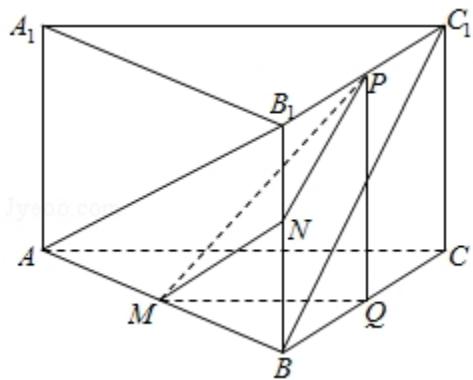
$$C_1D=\sqrt{5},$$

$$\therefore BC_1^2+BD^2=C_1D^2,$$

$$\therefore \angle DBC_1=90^\circ,$$

$$\therefore \cos \angle BC_1D=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

故选: C.



【点评】本题考查了空间中的两条异面直线所成角的计算问题，也考查了空间中的平行关系应用问题，是中档题.

11. (5分) 若 $x=-2$ 是函数 $f(x) = (x^2+ax-1)e^{x-1}$ 的极值点，则 $f(x)$ 的极小值为（ ）
- A. -1 B. $-2e^{-3}$ C. $5e^{-3}$ D. 1

【考点】6D：利用导数研究函数的极值.

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；53：导数的综合应用.

【分析】求出函数的导数，利用极值点，求出 a ，然后判断函数的单调性，求解函数的极小值即可.

【解答】解：函数 $f(x) = (x^2+ax-1)e^{x-1}$,

可得 $f'(x) = (2x+a)e^{x-1} + (x^2+ax-1)e^{x-1}$,

$x=-2$ 是函数 $f(x) = (x^2+ax-1)e^{x-1}$ 的极值点，

可得： $f'(-2) = (-4+a)e^{-3} + (4-2a-1)e^{-3} = 0$, 即 $-4+a+(3-2a)=0$.

解得 $a=-1$.

可得 $f'(x) = (2x-1)e^{x-1} + (x^2-x-1)e^{x-1}$,

$= (x^2+x-2)e^{x-1}$, 函数的极值点为： $x=-2, x=1$,

当 $x < -2$ 或 $x > 1$ 时， $f'(x) > 0$ 函数是增函数， $x \in (-2, 1)$ 时，函数是减函

数，

$x=1$ 时，函数取得极小值： $f(1) = (1^2 - 1 - 1) e^{1-1} = -1$.

故选：A.

【点评】本题考查函数的导数的应用，函数的单调性以及函数的极值的求法，考查计算能力。

12. (5分) 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形， P 为平面 ABC 内一点，则

$\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 的最小值是 ()

- A. -2 B. $-\frac{3}{2}$ C. $-\frac{4}{3}$ D. -1

【考点】9O：平面向量数量积的性质及其运算。

【专题】31：数形结合；4R：转化法；5A：平面向量及应用。

【分析】根据条件建立坐标系，求出点的坐标，利用坐标法结合向量数量积的公式进行计算即可。

【解答】解：建立如图所示的坐标系，以 BC 中点为坐标原点，

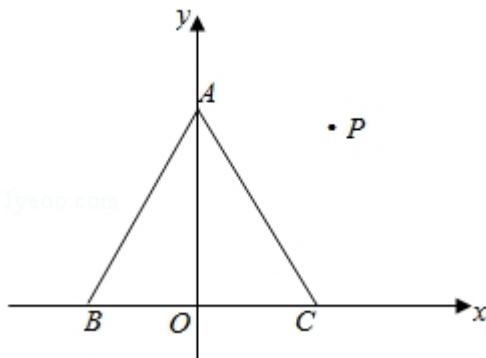
则 $A(0, \sqrt{3})$ ， $B(-1, 0)$ ， $C(1, 0)$ ，

设 $P(x, y)$ ，则 $\overrightarrow{PA} = (-x, \sqrt{3}-y)$ ， $\overrightarrow{PB} = (-1-x, -y)$ ， $\overrightarrow{PC} = (1-x, -y)$ ，

$$\text{则 } \overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) = 2x^2 - 2\sqrt{3}y + 2y^2 = 2[x^2 + (y - \frac{\sqrt{3}}{2})^2] - \frac{3}{4}$$

\therefore 当 $x=0$ ， $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，取得最小值 $2 \times (-\frac{3}{4}) = -\frac{3}{2}$ ，

故选：B.



【点评】本题主要考查平面向量数量积的应用，根据条件建立坐标系，利用坐标法是解决本题的关键。

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. (5 分)一批产品的二等品率为 0.02，从这批产品中每次随机取一件，有放回地抽取 100 次。 X 表示抽到的二等品件数，则 $DX= \underline{1.96}$ 。

【考点】CH：离散型随机变量的期望与方差。

【专题】11：计算题；35：转化思想；51：概率与统计。

【分析】判断概率满足的类型，然后求解方差即可。

【解答】解：由题意可知，该事件满足独立重复试验，是一个二项分布模型，其中， $p=0.02$, $n=100$,

则 $DX=npq=np(1-p)=100\times 0.02\times 0.98=1.96$.

故答案为：1.96。

【点评】本题考查离散性随机变量的期望与方差的求法，判断概率类型满足二项分布是解题的关键。

14. (5 分) 函数 $f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\cos x-\frac{3}{4}$ ($x\in[0, \frac{\pi}{2}]$) 的最大值是 1。

【考点】HW：三角函数的最值。

【专题】11：计算题；33：函数思想；41：换元法；51：函数的性质及应用；57：三角函数的图像与性质。

【分析】同角的三角函数的关系以及二次函数的性质即可求出。

【解答】解： $f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\cos x-\frac{3}{4}=1-\cos^2x+\sqrt{3}\cos x-\frac{3}{4}$,

令 $\cos x=t$ 且 $t\in[0, 1]$ ，

则 $y=-t^2+\sqrt{3}t+\frac{1}{4}=-\left(t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1$ ，

当 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时， $f(t)_{\max}=1$ ，

即 $f(x)$ 的最大值为 1，

故答案为：1

【点评】本题考查了同角的三角函数的关系以及二次函数的性质，属于基础题

15. (5分) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前n项和为 S_n , $a_3=3$, $S_4=10$, 则 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{S_k} = \underline{\underline{\frac{2n}{n+1}}}.$

【考点】85: 等差数列的前n项和; 8E: 数列的求和.

【专题】11: 计算题; 35: 转化思想; 49: 综合法; 54: 等差数列与等比数列.

【分析】利用已知条件求出等差数列的前n项和, 然后化简所求的表达式, 求解即可.

【解答】解: 等差数列 $\{a_n\}$ 的前n项和为 S_n , $a_3=3$, $S_4=10$, $S_4=2(a_2+a_3)=10$, 可得 $a_2=2$, 数列的首项为1, 公差为1,

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \frac{1}{S_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

$$\text{则 } \sum_{k=1}^n \frac{1}{S_k} = 2\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{2n}{n+1}.$$

【点评】本题考查等差数列的求和, 裂项消项法求和的应用, 考查计算能力.

16. (5分) 已知F是抛物线C: $y^2=8x$ 的焦点, M是C上一点, FM的延长线交y轴于点N. 若M为FN的中点, 则 $|FN| = \underline{\underline{6}}$.

【考点】K8: 抛物线的性质.

【专题】11: 计算题; 35: 转化思想; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】求出抛物线的焦点坐标, 推出M坐标, 然后求解即可.

【解答】解: 抛物线C: $y^2=8x$ 的焦点F(2, 0), M是C上一点, FM的延长线交y轴于点N. 若M为FN的中点,

可知M的横坐标为: 1, 则M的纵坐标为: $\pm 2\sqrt{2}$,

$$|FN| = 2|FM| = 2\sqrt{(1-2)^2 + (\pm 2\sqrt{2}-0)^2} = 6.$$

故答案为：6.

【点评】本题考查抛物线的简单性质的应用，考查计算能力。

三、解答题 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。（一）必考题：共 60 分。

17. (12 分) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $\sin(A+C)=8\sin^2\frac{B}{2}$.

(1) 求 $\cos B$;

(2) 若 $a+c=6$, $\triangle ABC$ 的面积为 2, 求 b.

【考点】 GS: 二倍角的三角函数; HP: 正弦定理。

【专题】 11: 计算题; 35: 转化思想; 4R: 转化法; 58: 解三角形。

【分析】 (1) 利用三角形的内角和定理可知 $A+C=\pi-B$, 再利用诱导公式化简 $\sin(A+C)$, 利用降幂公式化简 $8\sin^2\frac{B}{2}$, 结合 $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$, 求出 $\cos B$,

(2) 由 (1) 可知 $\sin B = \frac{8}{17}$, 利用勾股定理公式求出 ac, 再利用余弦定理即可求出 b.

【解答】 解: (1) $\sin(A+C) = 8\sin^2\frac{B}{2}$,

$$\therefore \sin B = 4(1 - \cos B),$$

$$\because \sin^2 B + \cos^2 B = 1,$$

$$\therefore 16(1 - \cos B)^2 + \cos^2 B = 1,$$

$$\therefore 16(1 - \cos B)^2 + \cos^2 B - 1 = 0,$$

$$\therefore 16(\cos B - 1)^2 + (\cos B - 1)(\cos B + 1) = 0,$$

$$\therefore (17\cos B - 15)(\cos B - 1) = 0,$$

$$\therefore \cos B = \frac{15}{17};$$

(2) 由(1)可知 $\sin B = \frac{8}{17}$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B = 2,$$

$$\therefore ac = \frac{17}{2},$$

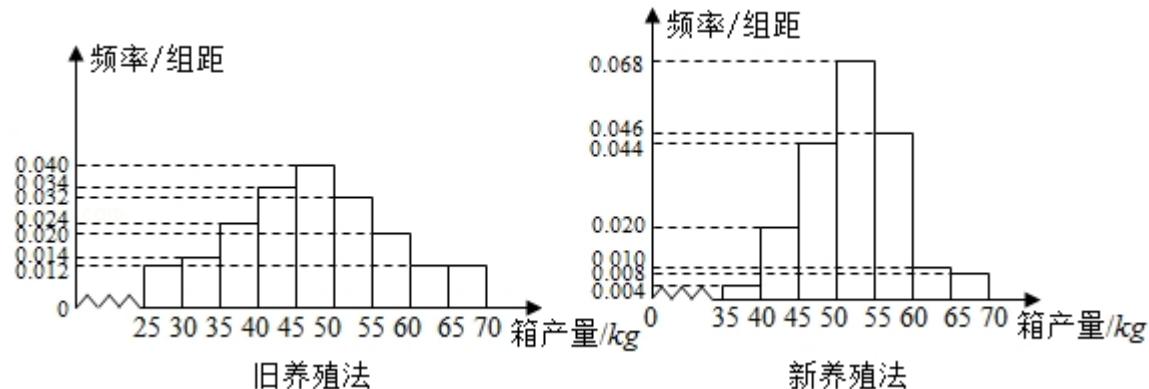
$$\therefore b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB = a^2 + c^2 - 2 \times \frac{17}{2} \times \frac{15}{17}$$

$$= a^2 + c^2 - 15 = (a+c)^2 - 2ac - 15 = 36 - 17 - 15 = 4,$$

$$\therefore b = 2.$$

【点评】本题考查了三角形的内角和定理，三角形的面积公式，二倍角公式和同角的三角函数的关系，属于中档题

18. (12分) 海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比，收获时各随机抽取了100个网箱，测量各箱水产品的产量（单位：kg），其频率分布直方图如图：



- (1) 设两种养殖方法的箱产量相互独立，记 A 表示事件“旧养殖法的箱产量低于 50kg，新养殖法的箱产量不低于 50kg”，估计 A 的概率；
(2) 填写下面列联表，并根据列联表判断是否有 99% 的把握认为箱产量与养殖方法有关：

	箱产量 < 50kg	箱产量 ≥ 50kg
旧养殖法		
新养殖法		

- (3) 根据箱产量的频率分布直方图，求新养殖法箱产量的中位数的估计值（精确到 0.01）。

附:

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

【考点】B8: 频率分布直方图; **BE:** 用样本的数字特征估计总体的数字特征; **BL:** 独立性检验.

【专题】31: 数形结合; **44:** 数形结合法; **5I:** 概率与统计.

【分析】 (1) 由题意可知: $P(A) = P(BC) = P(B)P(C)$, 分布求得发生的频率, 即可求得其概率;

(2) 完成 2×2 列联表: 求得观测值, 与参考值比较, 即可求得有 99% 的把握认为箱产量与养殖方法有关:

(3) 根据频率分布直方图即可求得其中位数.

【解答】解: (1) 记 B 表示事件“旧养殖法的箱产量低于 50kg”, C 表示事件“新养殖法的箱产量不低于 50kg”,

由 $P(A) = P(BC) = P(B)P(C)$,

则旧养殖法的箱产量低于 50kg: $(0.012+0.014+0.024+0.034+0.040) \times 5=0.62$,

故 $P(B)$ 的估计值 0.62,

新养殖法的箱产量不低于 50kg: $(0.068+0.046+0.010+0.008) \times 5=0.66$,

故 $P(C)$ 的估计值为,

则事件 A 的概率估计值为 $P(A) = P(B)P(C) = 0.62 \times 0.66 = 0.4092$;

$\therefore A$ 发生的概率为 0.4092;

(2) 2×2 列联表:

	箱产量 < 50kg	箱产量 $\geq 50kg$	总计
旧养殖法	62	38	100
新养殖法	34	66	100
总计	96	104	200

$$\text{则 } K^2 = \frac{200(62 \times 66 - 38 \times 34)^2}{100 \times 100 \times 96 \times 104} \approx 15.705,$$

由 $15.705 > 6.635$,

\therefore 有 99% 的把握认为箱产量与养殖方法有关;

(3) 由新养殖法的箱产量频率分布直方图中, 箱产量低于 50kg 的直方图的面积:

$$(0.004+0.020+0.044) \times 5=0.34,$$

箱产量低于 55kg 的直方图面积为:

$$(0.004+0.020+0.044+0.068) \times 5=0.68>0.5,$$

故新养殖法产量的中位数的估计值为: $50 + \frac{0.5 - 0.34}{0.068} \approx 52.35$ (kg),

新养殖法箱产量的中位数的估计值 52.35 (kg).

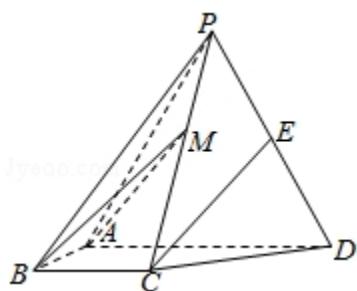
【点评】本题考查频率分布直方图的应用, 考查独立性检验, 考查计算能力, 属于中档题.

19. (12 分) 如图, 四棱锥 P-ABCD 中, 侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面

ABCD, $AB=BC=\frac{1}{2}AD$, $\angle BAD=\angle ABC=90^\circ$, E 是 PD 的中点.

(1) 证明: 直线 CE // 平面 PAB;

(2) 点 M 在棱 PC 上, 且直线 BM 与底面 ABCD 所成角为 45° , 求二面角 M-AB-D 的余弦值.



【考点】 LS: 直线与平面平行; MJ: 二面角的平面角及求法.

【专题】 31: 数形结合; 35: 转化思想; 49: 综合法; 5F: 空间位置关系与距离; 5G: 空间角.

【分析】 (1) 取 PA 的中点 F, 连接 EF, BF, 通过证明 $CE // BF$, 利用直线与平面平行的判定定理证明即可.

(2) 利用已知条件转化求解 M 到底面的距离, 作出二面角的平面角, 然后求解二面角 M- AB- D 的余弦值即可.

【解答】 (1) 证明: 取 PA 的中点 F, 连接 EF, BF, 因为 E 是 PD 的中点, 所以 $EF \parallel \frac{1}{2}AD$, $AB=BC=\frac{1}{2}AD$, $\angle BAD=\angle ABC=90^\circ$, $\therefore BC \parallel \frac{1}{2}AD$, $\therefore BCEF$ 是平行四边形, 可得 $CE \parallel BF$, $BF \subset$ 平面 PAB, $CE \not\subset$ 平面 PAB, \therefore 直线 CE // 平面 PAB;

(2) 解: 四棱锥 P- ABCD 中,

侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 ABCD, $AB=BC=\frac{1}{2}AD$,

$\angle BAD=\angle ABC=90^\circ$, E 是 PD 的中点.

取 AD 的中点 O, M 在底面 ABCD 上的射影 N 在 OC 上, 设 AD=2, 则 $AB=BC=1$,

$$OP=\sqrt{3},$$

$\therefore \angle PCO=60^\circ$, 直线 BM 与底面 ABCD 所成角为 45° ,

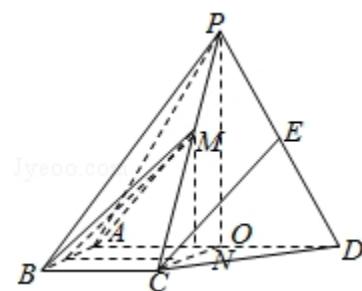
可得: $BN=MN$, $CN=\frac{\sqrt{3}}{3}MN$, $BC=1$,

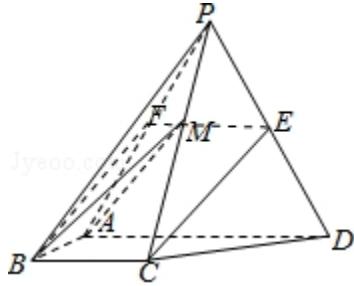
可得: $1+\frac{1}{3}BN^2=BN^2$, $BN=\frac{\sqrt{6}}{2}$, $MN=\frac{\sqrt{6}}{2}$,

作 NQ $\perp AB$ 于 Q, 连接 MQ, $AB \perp MN$,

所以 $\angle MQN$ 就是二面角 M- AB- D 的平面角, $MQ=\sqrt{1^2+(\frac{\sqrt{6}}{2})^2}$
 $=\frac{\sqrt{10}}{2}$,

二面角 M- AB- D 的余弦值为: $\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.





【点评】本题考查直线与平面平行的判定定理的应用，二面角的平面角的求法，考查空间想象能力以及计算能力.

20. (12分) 设 O 为坐标原点，动点 M 在椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 上，过 M 作 x 轴的垂线，垂足为 N ，点 P 满足 $\overrightarrow{NP} = \sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.

- (1) 求点 P 的轨迹方程；
- (2) 设点 Q 在直线 $x = -3$ 上，且 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 1$. 证明：过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F .

【考点】J3: 轨迹方程；KL: 直线与椭圆的综合.

【专题】34: 方程思想；48: 分析法；5A: 平面向量及应用；5B: 直线与圆.

【分析】 (1) 设 $M(x_0, y_0)$ ，由题意可得 $N(x_0, 0)$ ，设 $P(x, y)$ ，运用向量的坐标运算，结合 M 满足椭圆方程，化简整理可得 P 的轨迹方程；
(2) 设 $Q(-3, m)$ ， $P(\sqrt{2}\cos\alpha, \sqrt{2}\sin\alpha)$ ， $(0 \leq \alpha < 2\pi)$ ，运用向量的数量积的坐标表示，可得 m ，即有 Q 的坐标，求得椭圆的左焦点坐标，求得 OQ ， PF 的斜率，由两直线垂直的条件：向量数量积为 0，即可得证.

【解答】解：(1) 设 $M(x_0, y_0)$ ，由题意可得 $N(x_0, 0)$ ，

设 $P(x, y)$ ，由点 P 满足 $\overrightarrow{NP} = \sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.

可得 $(x - x_0, y) = \sqrt{2}(0, y_0)$ ，

可得 $x - x_0 = 0$, $y = \sqrt{2}y_0$,

即有 $x_0 = x$, $y_0 = \frac{y}{\sqrt{2}}$,

代入椭圆方程 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 可得 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 1$,

即有点 P 的轨迹方程为圆 $x^2 + y^2 = 2$;

(2) 证明: 设 Q (-3, m), P ($\sqrt{2}\cos\alpha, \sqrt{2}\sin\alpha$), ($0 \leq \alpha < 2\pi$),

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 1$, 可得 $(\sqrt{2}\cos\alpha, \sqrt{2}\sin\alpha) \cdot (-3 - \sqrt{2}\cos\alpha, m - \sqrt{2}\sin\alpha) = 1$,

即为 $-3\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + \sqrt{2}m\sin\alpha - 2\sin^2\alpha = 1$,

当 $\alpha=0$ 时, 上式不成立, 则 $0 < \alpha < 2\pi$,

解得 $m = \frac{3(1+\sqrt{2}\cos\alpha)}{\sqrt{2}\sin\alpha}$,

即有 Q (-3, $\frac{3(1+\sqrt{2}\cos\alpha)}{\sqrt{2}\sin\alpha}$),

椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左焦点 F (-1, 0),

由 $\overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{OQ} = (-1 - \sqrt{2}\cos\alpha, -\sqrt{2}\sin\alpha) \cdot (-3, \frac{3(1+\sqrt{2}\cos\alpha)}{\sqrt{2}\sin\alpha})$

$= 3 + 3\sqrt{2}\cos\alpha - 3(1 + \sqrt{2}\cos\alpha) = 0$.

可得过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

另解: 设 Q (-3, t), P (m, n), 由 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 1$,

可得 $(m, n) \cdot (-3 - m, t - n) = -3m - m^2 + nt - n^2 = 1$,

又 P 在圆 $x^2 + y^2 = 2$ 上, 可得 $m^2 + n^2 = 2$,

即有 $nt = 3 + 3m$,

又椭圆的左焦点 F (-1, 0),

$\overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{OQ} = (-1 - m, -n) \cdot (-3, t) = 3 + 3m - nt$

$= 3 + 3m - 3 - 3m = 0$,

则 $\overrightarrow{PF} \perp \overrightarrow{OQ}$,

可得过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

【点评】本题考查轨迹方程的求法, 注意运用坐标转移法和向量的加减运算,

考查圆的参数方程的运用和直线的斜率公式, 以及向量的数量积的坐标表示

和两直线垂直的条件: 向量数量积为 0, 考查化简整理的运算能力, 属于中

档题.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = ax^2 - ax - x \ln x$, 且 $f(x) \geq 0$.

(1) 求 a ;

(2) 证明: $f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0 , 且 $e^{-2} < f(x_0) < 2^{-2}$.

【考点】 6D: 利用导数研究函数的极值.

【专题】 11: 计算题; 35: 转化思想; 49: 综合法; 53: 导数的综合应用.

【分析】 (1) 通过分析可知 $f(x) \geq 0$ 等价于 $h(x) = ax - a - \ln x \geq 0$, 进而利

用 $h'(x) = a - \frac{1}{x}$ 可得 $h(x)_{\min} = h(\frac{1}{a})$, 从而可得结论;

(2) 通过(1)可知 $f(x) = x^2 - x - x \ln x$, 记 $t(x) = f'(x) = 2x - 2 - \ln x$, 解不

等式可知 $t(x)_{\min} = t(\frac{1}{2}) = \ln 2 - 1 < 0$, 从而可知 $f'(x) = 0$ 存在两根 x_0, x_2 ,

利用 $f(x)$ 必存在唯一极大值点 x_0 及 $x_0 < \frac{1}{2}$ 可知 $f(x_0) < \frac{1}{4}$, 另一方面可知

$$f(x_0) > f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e^2}.$$

【解答】 (1) 解: 因为 $f(x) = ax^2 - ax - x \ln x = x(ax - a - \ln x)$ ($x > 0$),

则 $f(x) \geq 0$ 等价于 $h(x) = ax - a - \ln x \geq 0$, 求导可知 $h'(x) = a - \frac{1}{x}$.

则当 $a \leq 0$ 时 $h'(x) < 0$, 即 $y=h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

所以当 $x_0 > 1$ 时, $h(x_0) < h(1) = 0$, 矛盾, 故 $a > 0$.

因为当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时 $h'(x) < 0$ 、当 $x > \frac{1}{a}$ 时 $h'(x) > 0$,

所以 $h(x)_{\min} = h(\frac{1}{a})$,

又因为 $h(1) = a - a - \ln 1 = 0$,

所以 $\frac{1}{a} = 1$, 解得 $a = 1$;

另解: 因为 $f(1) = 0$, 所以 $f(x) \geq 0$ 等价于 $f(x)$ 在 $x > 0$ 时的最小值为 $f(1)$

,

所以等价于 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是极小值,

所以解得 $a=1$;

(2) 证明: 由 (1) 可知 $f(x) = x^2 - x - x \ln x$, $f'(x) = 2x - 2 - \ln x$,

令 $f'(x) = 0$, 可得 $2x - 2 - \ln x = 0$, 记 $t(x) = 2x - 2 - \ln x$, 则 $t'(x) = 2 - \frac{1}{x}$,

令 $t'(x) = 0$, 解得: $x = \frac{1}{2}$,

所以 $t(x)$ 在区间 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $t(x)_{\min} = t(\frac{1}{2}) = \ln 2 - 1 < 0$, 从而 $t(x) = 0$ 有解, 即 $f'(x) = 0$ 存在两根 x_0 ,
 x_2 ,

且不妨设 $f'(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上为正、在 (x_0, x_2) 上为负、在 $(x_2, +\infty)$ 上为正,

所以 $f(x)$ 必存在唯一极大值点 x_0 , 且 $2x_0 - 2 - \ln x_0 = 0$,

所以 $f(x_0) = x_0^2 - x_0 - x_0 \ln x_0 = x_0^2 - x_0 + 2x_0 - 2x_0^2 = x_0 - x_0^2$,

由 $x_0 < \frac{1}{2}$ 可知 $f(x_0) < (x_0 - x_0^2)_{\max} = -\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$;

由 $f'(\frac{1}{e}) < 0$ 可知 $x_0 < \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0, \frac{1}{e})$ 上单调递减,

所以 $f(x_0) > f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e^2}$;

综上所述, $f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0 , 且 $e^{-2} < f(x_0) < 2^{-2}$.

【点评】本题考查利用导数研究函数的极值, 考查运算求解能力, 考查转化思想, 注意解题方法的积累, 属于难题.

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。[选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

22. (10 分) 在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho \cos \theta = 4$.

(1) M 为曲线 C_1 上的动点, 点 P 在线段 OM 上, 且满足 $|OM| \cdot |OP| = 16$, 求点 P 的轨迹 C_2 的直角坐标方程;

(2) 设点 A 的极坐标为 $(2, \frac{\pi}{3})$, 点 B 在曲线 C_2 上, 求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.

【考点】 Q4: 简单曲线的极坐标方程.

【专题】 38: 对应思想; 49: 综合法; 5S: 坐标系和参数方程.

【分析】 (1) 设 $P(x, y)$, 利用相似得出 M 点坐标, 根据 $|OM| \cdot |OP| = 16$ 列方程化简即可;

(2) 求出曲线 C_2 的圆心和半径, 得出 B 到 OA 的最大距离, 即可得出最大面积

【解答】 解: (1) 曲线 C_1 的直角坐标方程为: $x=4$,

$$\text{设 } P(x, y), M(4, y_0), \text{ 则 } \frac{x}{4} = \frac{y}{y_0}, \therefore y_0 = \frac{4y}{x},$$

$$\because |OM| \cdot |OP| = 16,$$

$$\therefore \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{16 + y_0^2} = 16,$$

$$\text{即 } (x^2 + y^2) \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = 16,$$

$$\therefore x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 16x^2, \text{ 即 } (x^2 + y^2)^2 = 16x^2,$$

$$\text{两边开方得: } x^2 + y^2 = 4x,$$

$$\text{整理得: } (x - 2)^2 + y^2 = 4 (x \neq 0),$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的轨迹 } C_2 \text{ 的直角坐标方程: } (x - 2)^2 + y^2 = 4 (x \neq 0).$$

(2) 点 A 的直角坐标为 $A(1, \sqrt{3})$, 显然点 A 在曲线 C_2 上, $|OA| = 2$,

$$\therefore \text{曲线 } C_2 \text{ 的圆心 } (2, 0) \text{ 到弦 } OA \text{ 的距离 } d = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \triangle AOB \text{ 的最大面积 } S = \frac{1}{2} |OA| \cdot (2 + \sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3}.$$

【点评】 本题考查了极坐标方程与直角坐标方程的转化, 轨迹方程的求解, 直线与圆的位置关系, 属于中档题.

[选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

23. 已知 $a > 0, b > 0, a^3 + b^3 = 2$. 证明:

$$(1) (a+b)(a^5 + b^5) \geq 4;$$

(2) $a+b \leq 2$.

【考点】R6: 不等式的证明.

【专题】14: 证明题; 35: 转化思想; 49: 综合法; 5T: 不等式.

【分析】(1) 由柯西不等式即可证明,

(2) 由 $a^3+b^3=2$ 转化为 $\frac{(a+b)^3-2}{3(a+b)}=ab$, 再由均值不等式可得: $\frac{(a+b)^3-2}{3(a+b)}=ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, 即可得到 $\frac{1}{4}(a+b)^3 \leq 2$, 问题得以证明.

【解答】证明: (1) 由柯西不等式得: $(a+b)(a^5+b^5) \geq (\sqrt{a \cdot a^5} + \sqrt{b \cdot b^5})^2 = (a^3+b^3)^2 \geq 4$,

当且仅当 $\sqrt{ab^5}=\sqrt{ba^5}$, 即 $a=b=1$ 时取等号,

(2) $\because a^3+b^3=2$,

$$\therefore (a+b)(a^2-ab+b^2)=2,$$

$$\therefore (a+b)[(a+b)^2-3ab]=2,$$

$$\therefore (a+b)^3-3ab(a+b)=2,$$

$$\therefore \frac{(a+b)^3-2}{3(a+b)}=ab,$$

由均值不等式可得: $\frac{(a+b)^3-2}{3(a+b)}=ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$,

$$\therefore (a+b)^3-2 \leq \frac{3(a+b)^3}{4},$$

$$\therefore \frac{1}{4}(a+b)^3 \leq 2,$$

$\therefore a+b \leq 2$, 当且仅当 $a=b=1$ 时等号成立.

【点评】本题考查了不等式的证明, 掌握柯西不等式和均值不等式是关键, 属于中档题