

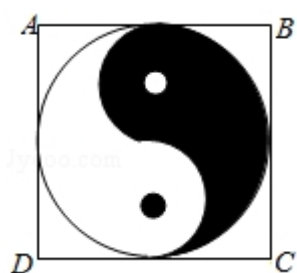
## 2017 年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标 I）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. (5 分) 已知集合  $A = \{x | x < 1\}$ ,  $B = \{x | 3^x < 1\}$ , 则 ( )

- A.  $A \cap B = \{x | x < 0\}$  B.  $A \cup B = \mathbb{R}$  C.  $A \cup B = \{x | x > 1\}$  D.  $A \cap B = \emptyset$

2. (5 分) 如图，正方形 ABCD 内的图形来自中国古代的太极图。正方形内切圆中的黑色部分和白色部分关于正方形的中心成中心对称。在正方形内随机取一点，则此点取自黑色部分的概率是 ( )



- A.  $\frac{1}{4}$  B.  $\frac{\pi}{8}$  C.  $\frac{1}{2}$  D.  $\frac{\pi}{4}$

3. (5 分) 设有下面四个命题

$p_1$ : 若复数  $z$  满足  $\frac{1}{z} \in \mathbb{R}$ , 则  $z \in \mathbb{R}$ ;

$p_2$ : 若复数  $z$  满足  $z^2 \in \mathbb{R}$ , 则  $z \in \mathbb{R}$ ;

$p_3$ : 若复数  $z_1, z_2$  满足  $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ , 则  $z_1 = \overline{z_2}$ ;

$p_4$ : 若复数  $z \in \mathbb{R}$ , 则  $\overline{z} \in \mathbb{R}$ .

其中的真命题为 ( )

- A.  $p_1, p_3$  B.  $p_1, p_4$  C.  $p_2, p_3$  D.  $p_2, p_4$

4. (5 分) 记  $S_n$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和。若  $a_4 + a_5 = 24$ ,  $S_6 = 48$ , 则  $\{a_n\}$  的公差为 ( )

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

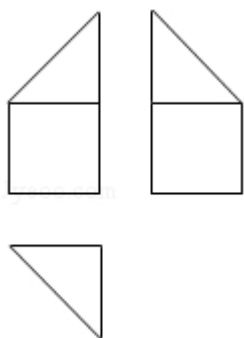
5. (5 分) 函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  单调递减, 且为奇函数。若  $f(1) = -1$ , 则满足  $-1 \leq f(x-2) \leq 1$  的  $x$  的取值范围是 ( )

- A.  $[-2, 2]$  B.  $[-1, 1]$  C.  $[0, 4]$  D.  $[1, 3]$

6. (5 分)  $(1+\frac{1}{x^2})(1+x)^6$  展开式中  $x^2$  的系数为 ( )


- A. 15                      B. 20                      C. 30                      D. 35

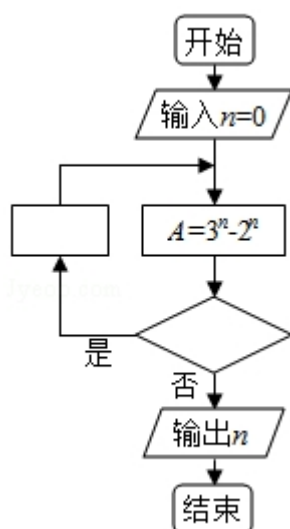
7. (5 分) 某多面体的三视图如图所示, 其中正视图和左视图都由正方形和等腰直角三角形组成, 正方形的边长为 2, 俯视图为等腰直角三角形, 该多面体的各个面中有若干个是梯形, 这些梯形的面积之和为 ( )



- A. 10                      B. 12                      C. 14                      D. 16

8. (5 分) 如图程序框图是为了求出满足  $3^n - 2^n > 1000$  的最小偶数  $n$ , 那么在

 两个空白框中, 可以分别填入 ( )



- A.  $A > 1000$  和  $n=n+1$                       B.  $A > 1000$  和  $n=n+2$   
 C.  $A \leq 1000$  和  $n=n+1$                       D.  $A \leq 1000$  和  $n=n+2$

9. (5 分) 已知曲线  $C_1: y = \cos x$ ,  $C_2: y = \sin(2x + \frac{2\pi}{3})$ , 则下面结论正确的是 ( )

- A. 把  $C_1$  上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线

向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到曲线  $C_2$

B. 把  $C_1$  上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到曲线  $C_2$

C. 把  $C_1$  上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到曲线  $C_2$

D. 把  $C_1$  上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到曲线  $C_2$

10. (5 分) 已知  $F$  为抛物线  $C: y^2=4x$  的焦点，过  $F$  作两条互相垂直的直线  $l_1, l_2$ ，直线  $l_1$  与  $C$  交于  $A, B$  两点，直线  $l_2$  与  $C$  交于  $D, E$  两点，则  $|AB|+|DE|$  的最小值为 ( )

- A. 16                      B. 14                      C. 12                      D. 10

11. (5 分) 设  $x, y, z$  为正数，且  $2^x=3^y=5^z$ ，则 ( )

- A.  $2x<3y<5z$       B.  $5z<2x<3y$       C.  $3y<5z<2x$       D.  $3y<2x<5z$

12. (5 分) 几位大学生响应国家的创业号召，开发了一款应用软件. 为激发大家学习数学的兴趣，他们推出了“解数学题获取软件激活码”的活动. 这款软件的激活码为下面数学问题的答案：已知数列 1, 1, 2, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 8, 1, 2, 4, 8, 16, ..., 其中第一项是  $2^0$ ，接下来的两项是  $2^0, 2^1$ ，再接下来的三项是  $2^0, 2^1, 2^2$ ，依此类推. 求满足如下条件的最小整数  $N$ ： $N>100$  且该数列的前  $N$  项和为 2 的整数幂. 那么该款软件的激活码是 ( )

- A. 440                      B. 330                      C. 220                      D. 110

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

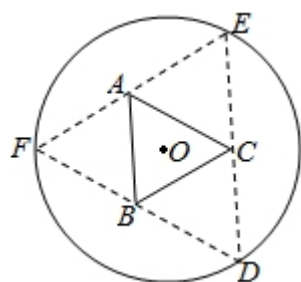
13. (5 分) 已知向量  $\vec{a}, \vec{b}$  的夹角为  $60^\circ$ ， $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1$ ，则  $|\vec{a}+2\vec{b}|=$ \_\_\_\_\_.

14. (5 分) 设  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x+2y \leq 1 \\ 2x+y \geq -1 \\ x-y \leq 0 \end{cases}$ ，则  $z=3x-2y$  的最小值为\_\_\_\_\_.

15. (5 分) 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a>0, b>0$ ) 的右顶点为  $A$ ，以  $A$  为

圆心， $b$  为半径作圆  $A$ ，圆  $A$  与双曲线  $C$  的一条渐近线交于  $M$ 、 $N$  两点．若  $\angle MAN=60^\circ$ ，则  $C$  的离心率为\_\_\_\_\_．

16. (5 分) 如图，圆形纸片的圆心为  $O$ ，半径为  $5\text{cm}$ ，该纸片上的等边三角形  $ABC$  的中心为  $O$ ． $D$ 、 $E$ 、 $F$  为圆  $O$  上的点， $\triangle DBC$ ， $\triangle ECA$ ， $\triangle FAB$  分别是以  $BC$ ， $CA$ ， $AB$  为底边的等腰三角形．沿虚线剪开后，分别以  $BC$ ， $CA$ ， $AB$  为折痕折起  $\triangle DBC$ ， $\triangle ECA$ ， $\triangle FAB$ ，使得  $D$ 、 $E$ 、 $F$  重合，得到三棱锥．当  $\triangle ABC$  的边长变化时，所得三棱锥体积（单位： $\text{cm}^3$ ）的最大值为\_\_\_\_\_．



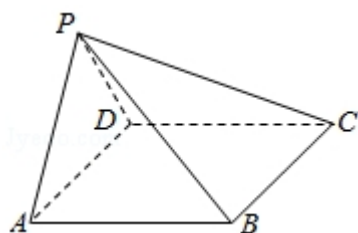
三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

17. (12 分)  $\triangle ABC$  的内角  $A$ ， $B$ ， $C$  的对边分别为  $a$ ， $b$ ， $c$ ，已知  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{a^2}{3\sin A}$ ．

- (1) 求  $\sin B \sin C$ ；
- (2) 若  $6\cos B \cos C = 1$ ， $a = 3$ ，求  $\triangle ABC$  的周长．

18. (12 分) 如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中， $AB \parallel CD$ ，且  $\angle BAP = \angle CDP = 90^\circ$ ．

- (1) 证明：平面  $PAB \perp$  平面  $PAD$ ；
- (2) 若  $PA = PD = AB = DC$ ， $\angle APD = 90^\circ$ ，求二面角  $A-PB-C$  的余弦值．



19. (12 分) 为了监控某种零件的一条生产线的生产过程，检验员每天从该生产线上随机抽取 16 个零件，并测量其尺寸（单位：cm）. 根据长期生产经验，可以认为这条生产线正常状态下生产的零件的尺寸服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$  .

(1) 假设生产状态正常，记  $X$  表示一天内抽取的 16 个零件中其尺寸在  $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$  之外的零件数，求  $P(X \geq 1)$  及  $X$  的数学期望；

(2) 一天内抽检零件中，如果出现了尺寸在  $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$  之外的零件，就认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况，需对当天的生产过程进行检查.

(i) 试说明上述监控生产过程方法的合理性；

(ii) 下面是检验员在一天内抽取的 16 个零件的尺寸：

9.95	10.12	9.96	9.96	10.01	9.92	9.98	10.04
10.26	9.91	10.13	10.02	9.22	10.04	10.05	9.95

经计算得  $\bar{x} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} x_i = 9.97$ ,  $s = \sqrt{\frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{16} (\sum_{i=1}^{16} x_i^2 - 16\bar{x}^2)} \approx 0.212$ ,

其中  $x_i$  为抽取的第  $i$  个零件的尺寸,  $i=1, 2, \dots, 16$ .

用样本平均数  $\bar{x}$  作为  $\mu$  的估计值  $\hat{\mu}$ , 用样本标准差  $s$  作为  $\sigma$  的估计值  $\hat{\sigma}$ , 利用估计值判断是否需对当天的生产过程进行检查？剔除  $(\hat{\mu} - 3\hat{\sigma}, \hat{\mu} + 3\hat{\sigma})$  之外的数据，用剩下的数据估计  $\mu$  和  $\sigma$  (精确到 0.01) .

附：若随机变量  $Z$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ，则  $P(\mu - 3\sigma < Z < \mu + 3\sigma) = 0.9974$ ,

$0.9974^{16} \approx 0.9592$ ,  $\sqrt{0.008} \approx 0.09$ .

20. (12 分) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ), 四点  $P_1(1, 1)$ ,  $P_2(0, 1)$ ,  $P_3(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $P_4(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$  中恰有三点在椭圆  $C$  上.

(1) 求  $C$  的方程;

(2) 设直线  $l$  不经过  $P_2$  点且与  $C$  相交于  $A, B$  两点. 若直线  $P_2A$  与直线  $P_2B$  的斜率的和为  $-1$ , 证明:  $l$  过定点.

21. (12 分) 已知函数  $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x$ .

(1) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 若  $f(x)$  有两个零点, 求  $a$  的取值范围.

[选修 4-4，坐标系与参数方程]

22. (10 分) 在直角坐标系  $xOy$  中，曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x=3\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$ ，( $\theta$  为参数)，直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x=a+4t \\ y=1-t \end{cases}$ ，( $t$  为参数)。

(1) 若  $a=-1$ ，求  $C$  与  $l$  的交点坐标；

(2) 若  $C$  上的点到  $l$  距离的最大值为  $\sqrt{17}$ ，求  $a$ 。

[选修 4-5：不等式选讲]

23. 已知函数  $f(x) = -x^2 + ax + 4$ ， $g(x) = |x+1| + |x-1|$ 。

(1) 当  $a=1$  时，求不等式  $f(x) \geq g(x)$  的解集；

(2) 若不等式  $f(x) \geq g(x)$  的解集包含  $[-1, 1]$ ，求  $a$  的取值范围。

# 2017 年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标 I）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. （5 分）已知集合  $A = \{x | x < 1\}$ ， $B = \{x | 3^x < 1\}$ ，则（ ）

- A.  $A \cap B = \{x | x < 0\}$  B.  $A \cup B = \mathbb{R}$  C.  $A \cup B = \{x | x > 1\}$  D.  $A \cap B = \emptyset$

【考点】1E：交集及其运算．

【专题】11：计算题；37：集合思想；40：定义法；5J：集合．

【分析】先分别求出集合 A 和 B，再求出  $A \cap B$  和  $A \cup B$ ，由此能求出结果．

【解答】解：∵集合  $A = \{x | x < 1\}$ ，

$$B = \{x | 3^x < 1\} = \{x | x < 0\},$$

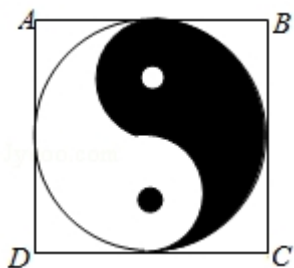
∴  $A \cap B = \{x | x < 0\}$ ，故 A 正确，D 错误；

$A \cup B = \{x | x < 1\}$ ，故 B 和 C 都错误．

故选：A．

【点评】本题考查交集和并集求法及应用，是基础题，解题时要认真审题，注意交集、并集定义的合理运用．

2. （5 分）如图，正方形 ABCD 内的图形来自中国古代的太极图．正方形内切圆中的黑色部分和白色部分关于正方形的中心成中心对称．在正方形内随机取一点，则此点取自黑色部分的概率是（ ）



A.  $\frac{1}{4}$

B.  $\frac{\pi}{8}$

C.  $\frac{1}{2}$

D.  $\frac{\pi}{4}$



【考点】CF：几何概型.

【专题】35：转化思想；40：定义法；51：概率与统计.

【分析】根据图象的对称性求出黑色图形的面积，结合几何概型的概率公式进行求解即可.

【解答】解：根据图象的对称性知，黑色部分为圆面积的一半，设圆的半径为 1，则正方形的边长为 2，

则黑色部分的面积  $S = \frac{\pi}{2}$ ,

则对应概率  $P = \frac{\frac{\pi}{2}}{4} = \frac{\pi}{8}$ ,

故选：B.

【点评】本题主要考查几何概型的概率计算，根据对称性求出黑色阴影部分的面积是解决本题的关键.

3. (5 分) 设有下面四个命题

$p_1$ : 若复数  $z$  满足  $\frac{1}{z} \in \mathbb{R}$ , 则  $z \in \mathbb{R}$ ;

$p_2$ : 若复数  $z$  满足  $z^2 \in \mathbb{R}$ , 则  $z \in \mathbb{R}$ ;

$p_3$ : 若复数  $z_1, z_2$  满足  $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ , 则  $z_1 = \overline{z_2}$ ;

$p_4$ : 若复数  $z \in \mathbb{R}$ , 则  $\overline{z} \in \mathbb{R}$ .

其中的真命题为 ( )

A.  $p_1, p_3$

B.  $p_1, p_4$

C.  $p_2, p_3$

D.  $p_2, p_4$

【考点】2K：命题的真假判断与应用；A1：虚数单位 i、复数；A5：复数的运算

【专题】2A：探究型；5L：简易逻辑；5N：数系的扩充和复数.

【分析】根据复数的分类，有复数性质，逐一分析给定四个命题的真假，可得答案.

【解答】解：若复数  $z$  满足  $\frac{1}{z} \in \mathbb{R}$ , 则  $z \in \mathbb{R}$ , 故命题  $p_1$  为真命题;

$p_2$ : 复数  $z=i$  满足  $z^2=-1 \in \mathbb{R}$ , 则  $z \notin \mathbb{R}$ , 故命题  $p_2$  为假命题;

$p_3$ : 若复数  $z_1=i$ ,  $z_2=2i$  满足  $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ , 但  $z_1 \neq \overline{z_2}$ , 故命题  $p_3$  为假命题;

$p_4$ : 若复数  $z \in \mathbb{R}$ , 则  $\overline{z}=z \in \mathbb{R}$ , 故命题  $p_4$  为真命题.

故选: B.

**【点评】** 本题以命题的真假判断与应用为载体, 考查了复数的运算, 复数的分类, 复数的运算性质, 难度不大, 属于基础题.

4. (5 分) 记  $S_n$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和. 若  $a_4+a_5=24$ ,  $S_6=48$ , 则  $\{a_n\}$  的公差为 ( )

A. 1

B. 2

C. 4

D. 8

**【考点】** 84: 等差数列的通项公式; 85: 等差数列的前  $n$  项和.

**【专题】** 11: 计算题; 34: 方程思想; 40: 定义法; 54: 等差数列与等比数列.

**【分析】** 利用等差数列通项公式及前  $n$  项和公式列出方程组, 求出首项和公差, 由此能求出  $\{a_n\}$  的公差.

**【解答】** 解:  $\because S_n$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和,  $a_4+a_5=24$ ,  $S_6=48$ ,

$$\therefore \begin{cases} a_1+3d+a_1+4d=24 \\ 6a_1+\frac{6 \times 5}{2}d=48 \end{cases},$$

解得  $a_1=-2$ ,  $d=4$ ,

$\therefore \{a_n\}$  的公差为 4.

故选: C.

**【点评】** 本题考查等差数列公式的求法及应用, 是基础题, 解题时要认真审题, 注意等差数列的性质的合理运用.

5. (5 分) 函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  单调递减, 且为奇函数. 若  $f(1)=-1$ , 则满足  $-1 \leq f(x-2) \leq 1$  的  $x$  的取值范围是 ( )

A.  $[-2, 2]$

B.  $[-1, 1]$

C.  $[0, 4]$

D.  $[1, 3]$

【考点】3P：抽象函数及其应用.

【专题】35：转化思想；4R：转化法；51：函数的性质及应用.

【分析】由已知中函数的单调性及奇偶性，可将不等式  $-1 \leq f(x-2) \leq 1$  化为  $-1 \leq x-2 \leq 1$ ，解得答案.

【解答】解：∵函数  $f(x)$  为奇函数.

若  $f(1) = -1$ ，则  $f(-1) = 1$ ，

又∵函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  单调递减， $-1 \leq f(x-2) \leq 1$ ，

∴  $f(1) \leq f(x-2) \leq f(-1)$ ，

∴  $-1 \leq x-2 \leq 1$ ，

解得：  $x \in [1, 3]$ ，

故选：D.

【点评】本题考查的知识点是抽象函数及其应用，函数的单调性，函数的奇偶性，难度中档.

6. (5分)  $(1 + \frac{1}{x^2})(1+x)^6$  展开式中  $x^2$  的系数为 ( )

A. 15

B. 20

C. 30

D. 35

【考点】DA：二项式定理.

【专题】35：转化思想；4R：转化法.

【分析】直接利用二项式定理的通项公式求解即可.

【解答】解：  $(1 + \frac{1}{x^2})(1+x)^6$  展开式中：

若  $(1 + \frac{1}{x^2}) = (1+x^{-2})$  提供常数项 1，则  $(1+x)^6$  提供含有  $x^2$  的项，可得展开

式中  $x^2$  的系数：

若  $(1 + \frac{1}{x^2})$  提供  $x^{-2}$  项，则  $(1+x)^6$  提供含有  $x^4$  的项，可得展开式中  $x^2$  的系数：

由  $(1+x)^6$  通项公式可得  $C_6^r x^r$ .

可知  $r=2$  时，可得展开式中  $x^2$  的系数为  $C_6^2=15$ 。

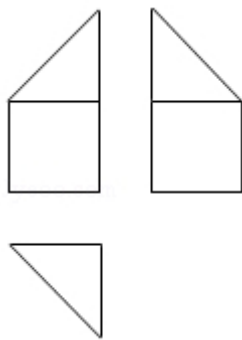
可知  $r=4$  时，可得展开式中  $x^2$  的系数为  $C_6^4=15$ 。

$(1+\frac{1}{x^2})(1+x)^6$  展开式中  $x^2$  的系数为：  $15+15=30$ 。

故选：C。

【点评】本题主要考查二项式定理的知识点，通项公式的灵活运用。属于基础题。

7. (5 分) 某多面体的三视图如图所示，其中正视图和左视图都由正方形和等腰直角三角形组成，正方形的边长为 2，俯视图为等腰直角三角形，该多面体的各个面中有若干个是梯形，这些梯形的面积之和为 ( )



- A. 10                      B. 12                      C. 14                      D. 16

【考点】L1：由三视图求面积、体积。

【专题】11：计算题；31：数形结合；44：数形结合法；5Q：立体几何。

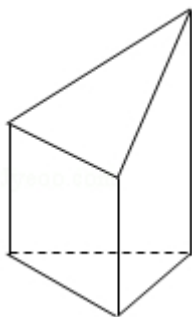
【分析】由三视图可得直观图，由图形可知该立体图中只有两个相同的梯形的面，根据梯形的面积公式计算即可。

【解答】解：由三视图可画出直观图，  
该立体图中只有两个相同的梯形的面，

$$S_{\text{梯形}} = \frac{1}{2} \times 2 \times (2+4) = 6,$$

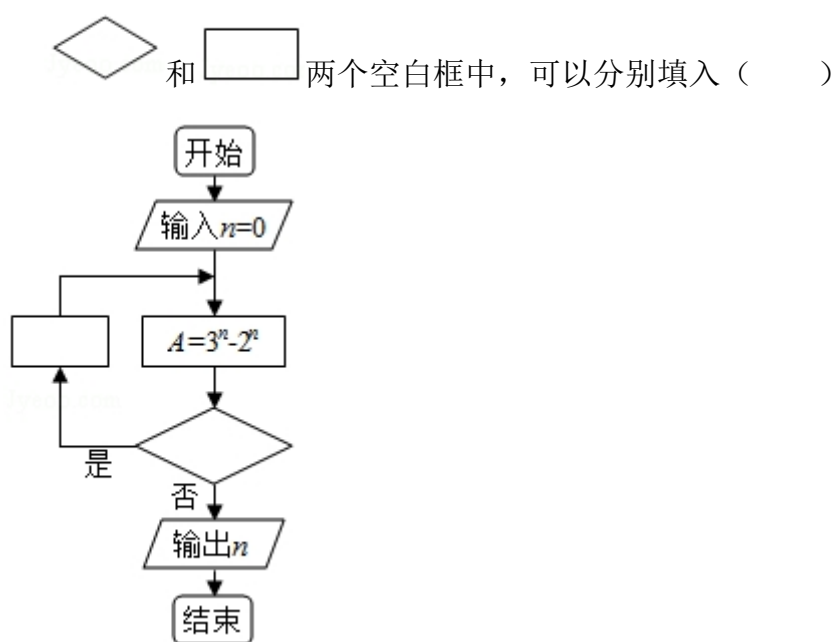
$\therefore$  这些梯形的面积之和为  $6 \times 2 = 12$ ，

故选：B。



【点评】 本题考查了体积计算公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

8. (5 分) 如图程序框图是为了求出满足  $3^n - 2^n > 1000$  的最小偶数  $n$ ，那么在



A.  $A > 1000$  和  $n=n+1$


B.  $A > 1000$  和  $n=n+2$

C.  $A \leq 1000$  和  $n=n+1$

D.  $A \leq 1000$  和  $n=n+2$

【考点】 EF: 程序框图.

【专题】 11: 计算题; 38: 对应思想; 49: 综合法; 5K: 算法和程序框图.

【分析】 通过要求  $A > 1000$  时输出且框图中在“否”时输出确定“”内不能输入“ $A > 1000$ ”，进而通过偶数的特征确定  $n=n+2$ .

【解答】 解：因为要求  $A > 1000$  时输出，且框图中在“否”时输出，

所以“”内不能输入“ $A > 1000$ ”，

又要求  $n$  为偶数，且  $n$  的初始值为 0，

所以“”中  $n$  依次加 2 可保证其为偶数，

所以 D 选项满足要求，

故选：D.

**【点评】** 本题考查程序框图，属于基础题，意在让大部分考生得分.

9. (5 分) 已知曲线  $C_1: y = \cos x$ ,  $C_2: y = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ , 则下面结论正确的是 ( )

A. 把  $C_1$  上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度，得到曲线  $C_2$

B. 把  $C_1$  上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位长度，得到曲线  $C_2$

C. 把  $C_1$  上各点的横坐标缩短到原来的  $\frac{1}{2}$  倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度，得到曲线  $C_2$

D. 把  $C_1$  上各点的横坐标缩短到原来的  $\frac{1}{2}$  倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位长度，得到曲线  $C_2$

**【考点】** HJ: 函数  $y = A \sin(\omega x + \phi)$  的图象变换.

**【专题】** 11: 计算题; 35: 转化思想; 57: 三角函数的图像与性质.

**【分析】** 利用三角函数的伸缩变换以及平移变换转化求解即可.

**【解答】** 解: 把  $C_1$  上各点的横坐标缩短到原来的  $\frac{1}{2}$  倍，纵坐标不变，得到函数

$y = \cos 2x$  图象，再把得到的曲线向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位长度，得到函数  $y = \cos 2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$

$= \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$  的图象，即曲线  $C_2$ ，

故选：D.

【点评】 本题考查三角函数的图象变换，诱导公式的应用，考查计算能力.

10. (5分) 已知  $F$  为抛物线  $C: y^2=4x$  的焦点，过  $F$  作两条互相垂直的直线  $l_1$ ,  $l_2$ , 直线  $l_1$  与  $C$  交于  $A$ 、 $B$  两点，直线  $l_2$  与  $C$  交于  $D$ 、 $E$  两点，则  $|AB|+|DE|$  的最小值为 ( )
- A. 16                      B. 14                      C. 12                      D. 10

【考点】 K8: 抛物线的性质.

【专题】 11: 计算题; 34: 方程思想; 4R: 转化法; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】 方法一: 根据题意可判断当  $A$  与  $D$ ,  $B$ ,  $E$  关于  $x$  轴对称, 即直线  $DE$  的斜率为 1,  $|AB|+|DE|$  最小, 根据弦长公式计算即可.

方法二: 设直线  $l_1$  的倾斜角为  $\theta$ , 则  $l_2$  的倾斜角为  $\frac{\pi}{2}+\theta$ , 利用焦点弦的弦长公式分别表示出  $|AB|$ ,  $|DE|$ , 整理求得答案

【解答】 解: 如图,  $l_1 \perp l_2$ , 直线  $l_1$  与  $C$  交于  $A$ 、 $B$  两点, 直线  $l_2$  与  $C$  交于  $D$ 、 $E$  两点,

要使  $|AB|+|DE|$  最小,

则  $A$  与  $D$ ,  $B$ ,  $E$  关于  $x$  轴对称, 即直线  $DE$  的斜率为 1,

又直线  $l_2$  过点  $(1, 0)$ ,

则直线  $l_2$  的方程为  $y=x-1$ ,

$$\text{联立方程组} \begin{cases} y^2=4x \\ y=x-1 \end{cases}, \text{ 则 } y^2-4y-4=0,$$

$$\therefore y_1+y_2=4, y_1y_2=-4,$$

$$\therefore |DE| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \cdot |y_1-y_2| = \sqrt{2} \times \sqrt{32} = 8,$$

$$\therefore |AB|+|DE| \text{ 的最小值为 } 2|DE|=16,$$

方法二: 设直线  $l_1$  的倾斜角为  $\theta$ , 则  $l_2$  的倾斜角为  $\frac{\pi}{2}+\theta$ ,

$$\text{根据焦点弦长公式可得 } |AB| = \frac{2p}{\sin^2 \theta} = \frac{4}{\sin^2 \theta}$$

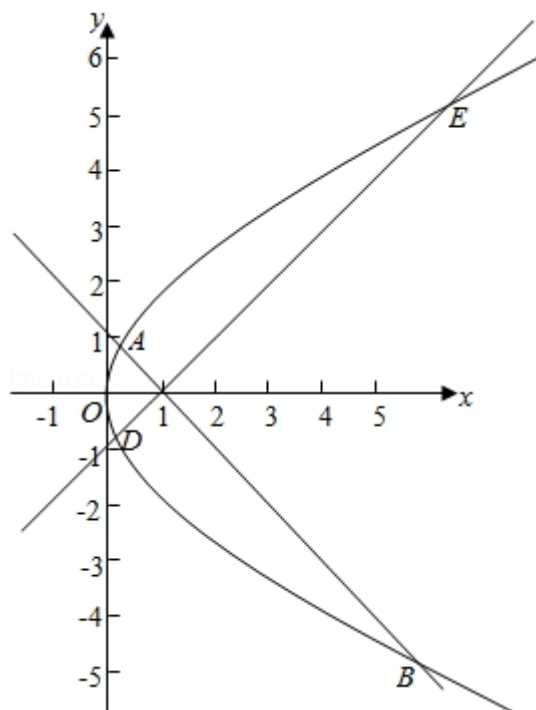
$$|DE| = \frac{2p}{\sin^2(\frac{\pi}{2} + \theta)} = \frac{2p}{\cos^2 \theta} = \frac{4}{\cos^2 \theta}$$

$$\therefore |AB| + |DE| = \frac{4}{\sin^2 \theta} + \frac{4}{\cos^2 \theta} = \frac{4}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \frac{16}{\sin^2 2\theta},$$

$\because 0 < \sin^2 2\theta \leq 1$ ,

$\therefore$  当  $\theta = 45^\circ$  时,  $|AB| + |DE|$  的最小, 最小为 16,

故选: A.



**【点评】** 本题考查了抛物线的简单性质以及直线和抛物线的位置关系, 弦长公式, 对于过焦点的弦, 能熟练掌握相关的结论, 解决问题事半功倍属于中档题.

11. (5 分) 设  $x$ 、 $y$ 、 $z$  为正数, 且  $2^x = 3^y = 5^z$ , 则 ( )

- A.  $2x < 3y < 5z$     B.  $5z < 2x < 3y$     C.  $3y < 5z < 2x$     D.  $3y < 2x < 5z$

**【考点】** 72: 不等式比较大小.

**【专题】** 35: 转化思想; 51: 函数的性质及应用; 59: 不等式的解法及应用.

**【分析】**  $x$ 、 $y$ 、 $z$  为正数, 令  $2^x = 3^y = 5^z = k > 1$ .  $\lg k > 0$ . 可得  $x = \frac{\lg k}{\lg 2}$ ,  $y = \frac{\lg k}{\lg 3}$ ,  $z = \frac{\lg k}{\lg 5}$

$\therefore$  可得  $3y = \frac{\lg k}{\lg^3 \sqrt{3}}$ ,  $2x = \frac{\lg k}{\lg \sqrt{2}}$ ,  $5z = \frac{\lg k}{\lg^5 \sqrt{5}}$ . 根据  $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9} > \sqrt[6]{8} = \sqrt{2}$ ,  $\sqrt{2} = \sqrt[10]{32}$



$> \sqrt[10]{25} = \sqrt[5]{5}$ . 即可得出大小关系.

另解:  $x$ 、 $y$ 、 $z$  为正数, 令  $2^x=3^y=5^z=k>1$ .  $\lg k>0$ . 可得  $x=\frac{\lg k}{\lg 2}$ ,  $y=\frac{\lg k}{\lg 3}$ ,  $z=\frac{\lg k}{\lg 5}$

$\therefore \frac{2x}{3y} = \frac{2}{3} \times \frac{\lg 3}{\lg 2} = \frac{\lg 9}{\lg 8} > 1$ , 可得  $2x>3y$ , 同理可得  $5z>2x$ .

【解答】解:  $x$ 、 $y$ 、 $z$  为正数,

令  $2^x=3^y=5^z=k>1$ .  $\lg k>0$ .

则  $x=\frac{\lg k}{\lg 2}$ ,  $y=\frac{\lg k}{\lg 3}$ ,  $z=\frac{\lg k}{\lg 5}$ .

$\therefore 3y = \frac{\lg k}{\lg \sqrt[3]{3}}$ ,  $2x = \frac{\lg k}{\lg \sqrt{2}}$ ,  $5z = \frac{\lg k}{\lg \sqrt[5]{5}}$ .

$\because \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9} > \sqrt[6]{8} = \sqrt{2}$ ,  $\sqrt{2} = \sqrt[10]{32} > \sqrt[10]{25} = \sqrt[5]{5}$ .

$\therefore \lg \sqrt[3]{3} > \lg \sqrt{2} > \lg \sqrt[5]{5} > 0$ .

$\therefore 3y < 2x < 5z$ .

另解:  $x$ 、 $y$ 、 $z$  为正数,

令  $2^x=3^y=5^z=k>1$ .  $\lg k>0$ .

则  $x=\frac{\lg k}{\lg 2}$ ,  $y=\frac{\lg k}{\lg 3}$ ,  $z=\frac{\lg k}{\lg 5}$ .

$\therefore \frac{2x}{3y} = \frac{2}{3} \times \frac{\lg 3}{\lg 2} = \frac{\lg 9}{\lg 8} > 1$ , 可得  $2x>3y$ ,

$\frac{5z}{2x} = \frac{5}{2} \times \frac{\lg 2}{\lg 5} = \frac{\lg 2^5}{\lg 5^2} > 1$ . 可得  $5z>2x$ .

综上所述可得:  $5z>2x>3y$ .

解法三: 对  $k$  取特殊值, 也可以比较出大小关系.

故选: D.

【点评】本题考查了对数函数的单调性、换底公式、不等式的性质, 考查了推理能力与计算能力, 属于中档题.

12. (5 分) 几位大学生响应国家的创业号召, 开发了一款应用软件. 为激发大家学习数学的兴趣, 他们推出了“解数学题获取软件激活码”的活动. 这款软件的激活码为下面数学问题的答案: 已知数列 1, 1, 2, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 8, 1, 2, 4, 8, 16, ..., 其中第一项是  $2^0$ , 接下来的两项是  $2^0, 2^1$ , 再接下

来的三项是  $2^0, 2^1, 2^2$ , 依此类推. 求满足如下条件的最小整数  $N$ :  $N > 100$  且该数列的前  $N$  项和为 2 的整数幂. 那么该款软件的激活码是 ( )

- A. 440                      B. 330                      C. 220                      D. 110

【考点】8E: 数列的求和.

【专题】35: 转化思想; 4R: 转化法; 54: 等差数列与等比数列.

【分析】方法一: 由数列的性质, 求得数列  $\{b_n\}$  的通项公式及前  $n$  项和, 可知当  $N$  为  $\frac{n(n+1)}{2}$  时 ( $n \in \mathbb{N}_+$ ), 数列  $\{a_n\}$  的前  $N$  项和为数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和, 即为  $2^{n+1} - n - 2$ , 容易得到  $N > 100$  时,  $n \geq 14$ , 分别判断, 即可求得该款软件的激活码;

方法二: 由题意求得数列的每一项, 及前  $n$  项和  $S_n = 2^{n+1} - n - 2$ , 及项数, 由题意可知:  $2^{n+1}$  为 2 的整数幂. 只需将  $-n - 2$  消去即可, 分别即可求得  $N$  的值.

【解答】解: 设该数列为  $\{a_n\}$ , 设  $b_n = a_{\frac{(n-1)n}{2}+1} + \dots + a_{\frac{n(n+1)}{2}} = 2^{n+1} - 1$ , ( $n \in \mathbb{N}_+$ ),

$$\text{则 } \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} a_i,$$

由题意可设数列  $\{a_n\}$  的前  $N$  项和为  $S_N$ , 数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 则

$$T_n = 2^1 - 1 + 2^2 - 1 + \dots + 2^{n+1} - 1 = 2^{n+1} - n - 2,$$

可知当  $N$  为  $\frac{n(n+1)}{2}$  时 ( $n \in \mathbb{N}_+$ ), 数列  $\{a_n\}$  的前  $N$  项和为数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和,

$$\text{即为 } 2^{n+1} - n - 2,$$

容易得到  $N > 100$  时,  $n \geq 14$ ,

A 项, 由  $\frac{29 \times 30}{2} = 435$ ,  $440 = 435 + 5$ , 可知  $S_{440} = T_{29} + b_5 = 2^{30} - 29 - 2 + 2^5 - 1 = 2^{30}$ , 故 A

项符合题意.

B 项, 仿上可知  $\frac{25 \times 26}{2} = 325$ , 可知  $S_{330} = T_{25} + b_5 = 2^{26} - 25 - 2 + 2^5 - 1 = 2^{26} + 4$ , 显然不

为 2 的整数幂, 故 B 项不符合题意.

C 项, 仿上可知  $\frac{20 \times 21}{2} = 210$ , 可知  $S_{220} = T_{20} + b_{10} = 2^{21} - 20 - 2 + 2^{10} - 1 = 2^{21} + 2^{10} - 23$ ,

显然不为 2 的整数幂, 故 C 项不符合题意.

D 项，仿上可知  $\frac{14 \times 15}{2} = 105$ ，可知  $S_{110} = T_{14} + b_5 = 2^{15} - 14 - 2 + 2^{5-1} = 2^{15} + 15$ ，显然

不为 2 的整数幂，故 D 项不符合题意。

故选 A.

方法二：由题意可知：第一项， $\frac{2^0, 2^1}{\text{第二项}}$ ， $\frac{2^0, 2^1, 2^2}{\text{第三项}}$ ，...

$$\frac{2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{n-1}}{\text{第 } n \text{ 项}},$$

根据等比数列前 n 项和公式，求得每项和分别为  $2^{1-1}, 2^{2-1}, 2^{3-1}, \dots, 2^{n-1}$

,

每项含有的项数为：1, 2, 3, ..., n,

总共的项数为  $N = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(1+n)n}{2}$ ,

所有项数的和为  $S_n: 2^{1-1} + 2^{2-1} + 2^{3-1} + \dots + 2^{n-1} = (2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n) - n =$

$$\frac{2(1-2^n)}{1-2} - n = 2^{n+1} - 2 - n,$$

由题意可知： $2^{n+1}$  为 2 的整数幂。只需将  $-2 - n$  消去即可，

则①  $1 + 2 + (-2 - n) = 0$ ，解得： $n = 1$ ，总共有  $\frac{(1+1) \times 1}{2} + 2 = 3$ ，不满足  $N > 100$ ，

②  $1 + 2 + 4 + (-2 - n) = 0$ ，解得： $n = 5$ ，总共有  $\frac{(1+5) \times 5}{2} + 3 = 18$ ，不满足  $N > 100$ ，

③  $1 + 2 + 4 + 8 + (-2 - n) = 0$ ，解得： $n = 13$ ，总共有  $\frac{(1+13) \times 13}{2} + 4 = 95$ ，不满足  $N >$

100，

④  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + (-2 - n) = 0$ ，解得： $n = 29$ ，总共有  $\frac{(1+29) \times 29}{2} + 5 = 440$ ，满足  $N$

$> 100$ ，

∴ 该款软件的激活码 440.

故选：A.

【点评】本题考查数列的应用，等差数列与等比数列的前 n 项和，考查计算能力，属于难题.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. (5分) 已知向量 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 的夹角为 $60^\circ$ ,  $|\vec{a}|=2$ ,  $|\vec{b}|=1$ , 则 $|\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{3}$ .

【考点】90: 平面向量数量积的性质及其运算.

【专题】31: 数形结合; 40: 定义法; 5A: 平面向量及应用.

【分析】根据平面向量的数量积求出模长即可.

【解答】解: 【解法一】向量 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 的夹角为 $60^\circ$ , 且 $|\vec{a}|=2$ ,  $|\vec{b}|=1$ ,

$$\begin{aligned}\therefore (\vec{a}+2\vec{b})^2 &= \vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 \\ &= 2^2 + 4 \times 2 \times 1 \times \cos 60^\circ + 4 \times 1^2 \\ &= 12,\end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{3}.$$

【解法二】根据题意画出图形, 如图所示;

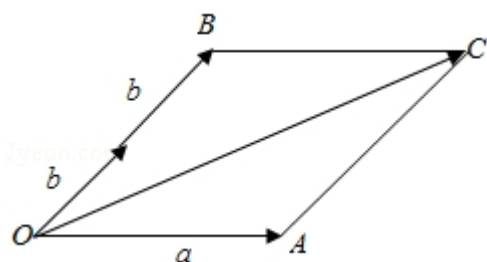
结合图形 $\vec{OC}=\vec{OA}+\vec{OB}=\vec{a}+\vec{b}$ ;

在 $\triangle OAC$ 中, 由余弦定理得

$$|\vec{OC}|=\sqrt{2^2+2^2-2 \times 2 \times 2 \times \cos 120^\circ}=2\sqrt{3},$$

$$\text{即 } |\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{3}.$$

故答案为:  $2\sqrt{3}$ .



【点评】本题考查了平面向量的数量积的应用问题, 解题时应利用数量积求出模长, 是基础题.

14. (5分) 设 $x, y$ 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y \leq 1 \\ 2x+y \geq -1 \\ x-y \leq 0 \end{cases}$ , 则 $z=3x-2y$ 的最小值为 $-5$ .

【考点】7C：简单线性规划.

【专题】11：计算题；31：数形结合；35：转化思想；5T：不等式.

【分析】由约束条件作出可行域，由图得到最优解，求出最优解的坐标，数形结合得答案.

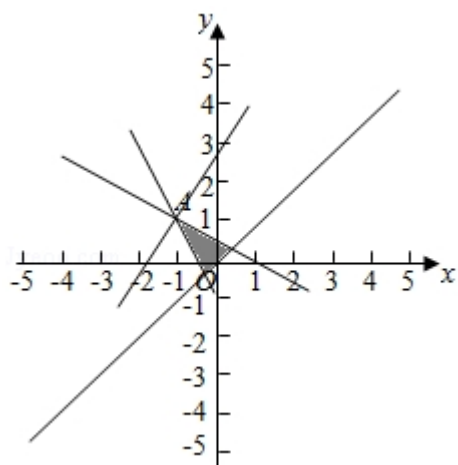
【解答】解：由  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x+2y \leq 1 \\ 2x+y \geq -1 \\ x-y \leq 0 \end{cases}$  作出可行域如图，

由图可知，目标函数的最优解为 A，

联立  $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+y=-1 \end{cases}$ ，解得 A  $(-1, 1)$ .

$\therefore z=3x-2y$  的最小值为  $-3 \times 1 - 2 \times 1 = -5$ .

故答案为：-5.



【点评】本题考查了简单的线性规划，考查了数形结合的解题思想方法，是中档题.

15. (5分) 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的右顶点为 A，以 A 为圆心，b 为半径作圆 A，圆 A 与双曲线 C 的一条渐近线交于 M、N 两点. 若  $\angle MAN = 60^\circ$ ，则 C 的离心率为  $\underline{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$ .

【考点】KC：双曲线的性质.

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】利用已知条件，转化求解 A 到渐近线的距离，推出 a，c 的关系，然后求解双曲线的离心率即可.

【解答】解：双曲线 C:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的右顶点为 A ( $a, 0$ ),

以 A 为圆心，b 为半径做圆 A，圆 A 与双曲线 C 的一条渐近线交于 M、N 两点.

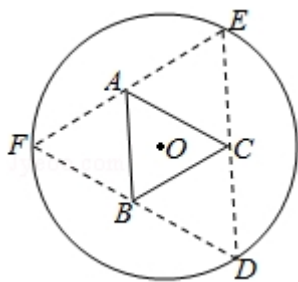
若  $\angle MAN = 60^\circ$ ，可得 A 到渐近线  $bx + ay = 0$  的距离为： $b \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}b$ ,

可得： $\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}b$ ，即  $\frac{a}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，可得离心率为： $e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

故答案为： $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

【点评】本题考查双曲线的简单性质的应用，点到直线的距离公式以及圆的方程的应用，考查转化思想以及计算能力.

16. (5 分) 如图，圆形纸片的圆心为 O，半径为 5cm，该纸片上的等边三角形 ABC 的中心为 O. D、E、F 为圆 O 上的点， $\triangle DBC$ ， $\triangle ECA$ ， $\triangle FAB$  分别是以 BC，CA，AB 为底边的等腰三角形. 沿虚线剪开后，分别以 BC，CA，AB 为折痕折起  $\triangle DBC$ ， $\triangle ECA$ ， $\triangle FAB$ ，使得 D、E、F 重合，得到三棱锥. 当  $\triangle ABC$  的边长变化时，所得三棱锥体积 (单位： $\text{cm}^3$ ) 的最大值为  $4\sqrt{15}\text{cm}^3$ .



【考点】LF：棱柱、棱锥、棱台的体积.

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；5E：圆锥曲线中的最值与范围问题.

【分析】法一：由题，连接 OD，交 BC 于点 G，由题意得  $OD \perp BC$ ， $OG = \frac{\sqrt{3}}{6}BC$ ，

设  $OG=x$ ，则  $BC=2\sqrt{3}x$ ， $DG=5-x$ ，三棱锥的高  $h=\sqrt{25-10x}$ ，求出  $S_{\triangle ABC}=3\sqrt{3}x^2$ ， $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \times h=\sqrt{3} \cdot \sqrt{25x^4-10x^5}$ ，令  $f(x)=25x^4-10x^5$ ， $x \in (0, \frac{5}{2})$ ， $f'(x)=100x^3-50x^4$ ， $f(x) \leq f(2)=80$ ，由此能求出体积最大值。

法二：设正三角形的边长为  $x$ ，则  $OG=\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{6}x$ ， $FG=SG=5-\frac{\sqrt{3}}{6}x$ ， $SO=h=\sqrt{SG^2-OG^2}=\sqrt{(5-\frac{\sqrt{3}}{6}x)^2-(\frac{\sqrt{3}}{6}x)^2}=\sqrt{5(5-\frac{\sqrt{3}}{3}x)}$ ，由此能示出三棱锥的体积的最大值。

【解答】解法一：由题意，连接 OD，交 BC 于点 G，由题意得  $OD \perp BC$ ， $OG=\frac{\sqrt{3}}{6}BC$ ，

即 OG 的长度与 BC 的长度成正比，

设  $OG=x$ ，则  $BC=2\sqrt{3}x$ ， $DG=5-x$ ，

三棱锥的高  $h=\sqrt{DG^2-OG^2}=\sqrt{25-10x+x^2-x^2}=\sqrt{25-10x}$ ，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times (2\sqrt{3}x)^2=3\sqrt{3}x^2$ ，

则  $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \times h=\sqrt{3}x^2 \times \sqrt{25-10x}=\sqrt{3} \cdot \sqrt{25x^4-10x^5}$ ，

令  $f(x)=25x^4-10x^5$ ， $x \in (0, \frac{5}{2})$ ， $f'(x)=100x^3-50x^4$ ，

令  $f'(x) \geq 0$ ，即  $x^4-2x^3 \leq 0$ ，解得  $x \leq 2$ ，

则  $f(x) \leq f(2)=80$ ，

$\therefore V \leq \sqrt{3} \times \sqrt{80}=4\sqrt{15}\text{cm}^3$ ， $\therefore$  体积最大值为  $4\sqrt{15}\text{cm}^3$ 。

故答案为： $4\sqrt{15}\text{cm}^3$ 。

解法二：如图，设正三角形的边长为  $x$ ，则  $OG=\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{6}x$ ，

$\therefore FG=SG=5-\frac{\sqrt{3}}{6}x$ ，

$SO=h=\sqrt{SG^2-OG^2}=\sqrt{(5-\frac{\sqrt{3}}{6}x)^2-(\frac{\sqrt{3}}{6}x)^2}=\sqrt{5(5-\frac{\sqrt{3}}{3}x)}$ ，

$\therefore$  三棱锥的体积  $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot h$

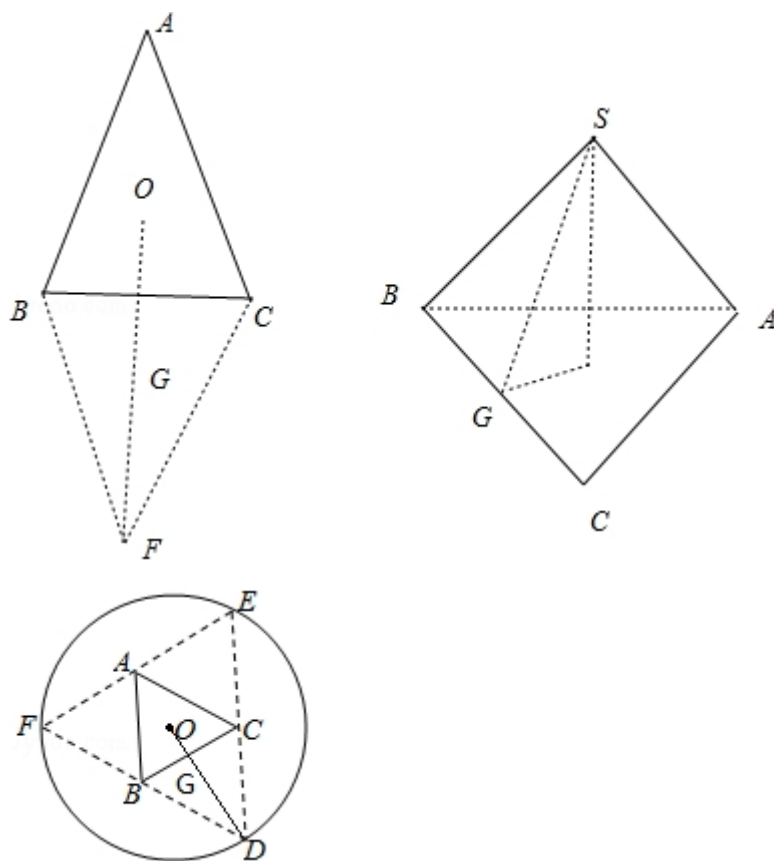
$$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \sqrt{5(5 - \frac{\sqrt{3}}{3}x)} = \frac{\sqrt{15}}{12} \sqrt{5x^4 - \frac{\sqrt{3}}{3}x^5},$$

$$\text{令 } b(x) = 5x^4 - \frac{\sqrt{3}}{3}x^5, \text{ 则 } b'(x) = 20x^3 - \frac{5\sqrt{3}}{3}x^4,$$

$$\text{令 } b'(x) = 0, \text{ 则 } 4x^3 - \frac{x^4}{\sqrt{3}} = 0, \text{ 解得 } x = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore V_{\max} = \frac{\sqrt{75}}{12} \times 48 \times \sqrt{5-4} = 4\sqrt{15} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

故答案为:  $4\sqrt{15}\text{cm}^3$ .



**【点评】** 本题考查三棱锥的体积的最大值的求法，考查空间中中线、线面、面面之间的位置关系、函数性质、导数等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力、空间想象能力，考查数形结合思想、化归与转化思想，是中档题.

**三、解答题:** 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

17. (12 分)  $\triangle ABC$  的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知  $\triangle ABC$  的面积



$$\text{为} \frac{a^2}{3\sin A}.$$

(1) 求  $\sin B \sin C$ ;

(2) 若  $6\cos B \cos C = 1$ ,  $a = 3$ , 求  $\triangle ABC$  的周长.

**【考点】** HP: 正弦定理; HR: 余弦定理.

**【专题】** 11: 计算题; 33: 函数思想; 4R: 转化法; 56: 三角函数的求值; 58: 解三角形.

**【分析】** (1) 根据三角形面积公式和正弦定理可得答案,

(2) 根据两角余弦公式可得  $\cos A = \frac{1}{2}$ , 即可求出  $A = \frac{\pi}{3}$ , 再根据正弦定理可得  $bc = 8$ , 根据余弦定理即可求出  $b + c$ , 问题得以解决.

**【解答】** 解: (1) 由三角形的面积公式可得  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{a^2}{3\sin A}$ ,

$$\therefore 3c\sin B \sin A = 2a,$$

由正弦定理可得  $3\sin C \sin B \sin A = 2\sin A$ ,

$$\therefore \sin A \neq 0,$$

$$\therefore \sin B \sin C = \frac{2}{3};$$

$$(2) \because 6\cos B \cos C = 1,$$

$$\therefore \cos B \cos C = \frac{1}{6},$$

$$\therefore \cos B \cos C - \sin B \sin C = \frac{1}{6} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \cos(B+C) = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \cos A = \frac{1}{2},$$

$$\because 0 < A < \pi,$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \sin B \sin C = \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} = \frac{bc}{(2\sqrt{3})^2} = \frac{bc}{12} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore bc=8,$$

$$\because a^2=b^2+c^2-2bccosA,$$

$$\therefore b^2+c^2-bc=9,$$

$$\therefore (b+c)^2=9+3cb=9+24=33,$$

$$\therefore b+c=\sqrt{33}$$

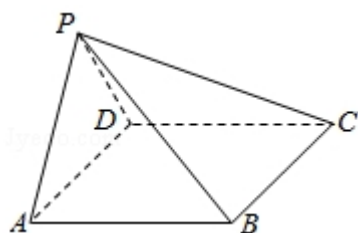
$$\therefore \text{周长 } a+b+c=3+\sqrt{33}.$$

【点评】 本题考查了三角形的面积公式和两角和的余弦公式和诱导公式和正弦定理余弦定理，考查了学生的运算能力，属于中档题.

18. (12 分) 如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中， $AB \parallel CD$ ，且  $\angle BAP = \angle CDP = 90^\circ$ .

(1) 证明：平面  $PAB \perp$  平面  $PAD$ ；

(2) 若  $PA=PD=AB=DC$ ， $\angle APD=90^\circ$ ，求二面角  $A-PB-C$  的余弦值.



【考点】 LY：平面与平面垂直； MJ：二面角的平面角及求法.

【专题】 15：综合题； 31：数形结合； 41：向量法； 5G：空间角.

【分析】 (1) 由已知可得  $PA \perp AB$ ， $PD \perp CD$ ，再由  $AB \parallel CD$ ，得  $AB \perp PD$ ，利用线面垂直的判定可得  $AB \perp$  平面  $PAD$ ，进一步得到平面  $PAB \perp$  平面  $PAD$ ；

(2) 由已知可得四边形  $ABCD$  为平行四边形，由 (1) 知  $AB \perp$  平面  $PAD$ ，得到  $AB \perp AD$ ，则四边形  $ABCD$  为矩形，设  $PA=AB=2a$ ，则  $AD=2\sqrt{2}a$ . 取  $AD$  中点  $O$ ， $BC$  中点  $E$ ，连接  $PO$ 、 $OE$ ，以  $O$  为坐标原点，分别以  $OA$ 、 $OE$ 、 $OP$  所在直线为  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴建立空间直角坐标系，求出平面  $PBC$  的一个法向量，再证明  $PD \perp$  平面  $PAB$ ，得  $\overrightarrow{PD}$  为平面  $PAB$  的一个法向量，由两法向量所成角的余弦值得二面角  $A-PB-C$  的余弦值.

【解答】(1) 证明:  $\because \angle BAP = \angle CDP = 90^\circ$ ,  $\therefore PA \perp AB$ ,  $PD \perp CD$ ,

$\because AB \parallel CD$ ,  $\therefore AB \perp PD$ ,

又  $\because PA \cap PD = P$ , 且  $PA \subset \text{平面 PAD}$ ,  $PD \subset \text{平面 PAD}$ ,

$\therefore AB \perp \text{平面 PAD}$ , 又  $AB \subset \text{平面 PAB}$ ,

$\therefore \text{平面 PAB} \perp \text{平面 PAD}$ ;

(2) 解:  $\because AB \parallel CD$ ,  $AB = CD$ ,  $\therefore$  四边形 ABCD 为平行四边形,

由 (1) 知  $AB \perp \text{平面 PAD}$ ,  $\therefore AB \perp AD$ , 则四边形 ABCD 为矩形,

在  $\triangle APD$  中, 由  $PA = PD$ ,  $\angle APD = 90^\circ$ , 可得  $\triangle PAD$  为等腰直角三角形,

设  $PA = AB = 2a$ , 则  $AD = 2\sqrt{2}a$ .

取 AD 中点 O, BC 中点 E, 连接 PO、OE,

以 O 为坐标原点, 分别以 OA、OE、OP 所在直线为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系,

则  $D(-\sqrt{2}a, 0, 0)$ ,  $B(\sqrt{2}a, 2a, 0)$ ,  $P(0, 0, \sqrt{2}a)$ ,  $C(-\sqrt{2}a, 2a, 0)$ .

$\overrightarrow{PD} = (-\sqrt{2}a, 0, -\sqrt{2}a)$ ,  $\overrightarrow{PB} = (\sqrt{2}a, 2a, -\sqrt{2}a)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (-2\sqrt{2}a, 0, 0)$ .

设平面 PBC 的一个法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$ ,

由  $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases}$ , 得  $\begin{cases} \sqrt{2}ax + 2ay - \sqrt{2}az = 0 \\ -2\sqrt{2}ax = 0 \end{cases}$ , 取  $y = 1$ , 得  $\vec{n} = (0, 1, \sqrt{2})$ .

$\because AB \perp \text{平面 PAD}$ ,  $AD \subset \text{平面 PAD}$ ,  $\therefore AB \perp PD$ ,

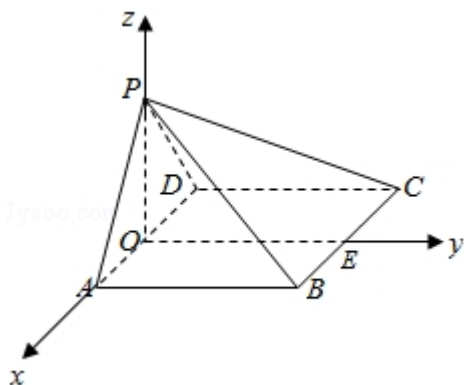
又  $PD \perp PA$ ,  $PA \cap AB = A$ ,

$\therefore PD \perp \text{平面 PAB}$ , 则  $\overrightarrow{PD}$  为平面 PAB 的一个法向量,  $\overrightarrow{PD} = (-\sqrt{2}a, 0, -\sqrt{2}a)$ .

$\therefore \cos \langle \overrightarrow{PD}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{PD} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{PD}| |\vec{n}|} = \frac{-2a}{2a \times \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

由图可知, 二面角 A-PB-C 为钝角,

$\therefore$  二面角 A-PB-C 的余弦值为  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ .



【点评】本题考查平面与平面垂直的判定，考查空间想象能力和思维能力，训练了利用空间向量求二面角的平面角，是中档题.

19. (12 分) 为了监控某种零件的一条生产线的生产过程，检验员每天从该生产线上随机抽取 16 个零件，并测量其尺寸（单位：cm）. 根据长期生产经验，可以认为这条生产线正常状态下生产的零件的尺寸服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$  .

(1) 假设生产状态正常，记  $X$  表示一天内抽取的 16 个零件中其尺寸在  $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$  之外的零件数，求  $P(X \geq 1)$  及  $X$  的数学期望；

(2) 一天内抽检零件中，如果出现了尺寸在  $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$  之外的零件，就认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况，需对当天的生产过程进行检查.

(i) 试说明上述监控生产过程方法的合理性；

(ii) 下面是检验员在一天内抽取的 16 个零件的尺寸：

9.95	10.12	9.96	9.96	10.01	9.92	9.98	10.04
10.26	9.91	10.13	10.02	9.22	10.04	10.05	9.95

经计算得  $\bar{x} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} x_i = 9.97$ ,  $s = \sqrt{\frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{16} (\sum_{i=1}^{16} x_i^2 - 16\bar{x}^2)} \approx 0.212$ ,

其中  $x_i$  为抽取的第  $i$  个零件的尺寸,  $i=1, 2, \dots, 16$ .

用样本平均数  $\bar{x}$  作为  $\mu$  的估计值  $\hat{\mu}$ , 用样本标准差  $s$  作为  $\sigma$  的估计值  $\hat{\sigma}$ , 利用估计值判断是否需对当天的生产过程进行检查？剔除  $(\hat{\mu} - 3\hat{\sigma}, \hat{\mu} + 3\hat{\sigma})$  之

外的数据，用剩下的数据估计  $\mu$  和  $\sigma$ （精确到 0.01）.

附：若随机变量  $Z$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ，则  $P(\mu - 3\sigma < Z < \mu + 3\sigma) = 0.9974$ ， $0.9974^{16} \approx 0.9592$ ， $\sqrt{0.008} \approx 0.09$ .

【考点】CP：正态分布曲线的特点及曲线所表示的意义.

【专题】11：计算题；35：转化思想；4A：数学模型法；5I：概率与统计.

【分析】（1）通过  $P(X=0)$  可求出  $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 0.0408$ ，利用二项分布的期望公式计算可得结论；

（2）（i）由（1）及知落在  $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$  之外为小概率事件可知该监控生产过程方法合理；

（ii）通过样本平均数  $\bar{x}$ 、样本标准差  $s$  估计  $\hat{\mu}$ 、 $\hat{\sigma}$  可知  $(\hat{\mu} - 3\hat{\sigma}, \hat{\mu} + 3\hat{\sigma}) = (9.334, 10.606)$ ，进而需剔除  $(\hat{\mu} - 3\hat{\sigma}, \hat{\mu} + 3\hat{\sigma})$  之外的数据 9.22，利用公式计算即得结论.

【解答】解：（1）由题可知尺寸落在  $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$  之内的概率为 0.9974，

则落在  $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$  之外的概率为  $1 - 0.9974 = 0.0026$ ，

因为  $P(X=0) = C_{16}^0 \times (1 - 0.9974)^0 \times 0.9974^{16} \approx 0.9592$ ，

所以  $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 0.0408$ ，

又因为  $X \sim B(16, 0.0026)$ ，

所以  $E(X) = 16 \times 0.0026 = 0.0416$ ；

（2）（i）如果生产状态正常，一个零件尺寸在  $(\hat{\mu} - 3\hat{\sigma}, \hat{\mu} + 3\hat{\sigma})$  之外的概率只有 0.0026，一天内抽取的 16 个零件中，出现尺寸在  $(\hat{\mu} - 3\hat{\sigma}, \hat{\mu} + 3\hat{\sigma})$  之外的零件的概率只有 0.0408，发生的概率很小. 因此一旦发生这种状况，就有理由认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况，需对当天的生产过程进行检查，可见上述监控生产过程的方法是合理的.

（ii）由  $\bar{x} = 9.97$ ， $s \approx 0.212$ ，得  $\mu$  的估计值为  $\hat{\mu} = 9.97$ ， $\sigma$  的估计值为  $\hat{\sigma} = 0.212$ ，

由样本数据可以看出一个零件的尺寸在  $(\hat{\mu} - 3\hat{\sigma}, \hat{\mu} + 3\hat{\sigma})$  之外，因此需对当天的生产过程进行检查.

剔除  $(\hat{\mu} - 3\hat{\sigma}, \hat{\mu} + 3\hat{\sigma})$  之外的数据 9.22，剩下的数据的平均数为

$$\frac{1}{15} (16 \times 9.97 - 9.22) = 10.02,$$

因此  $\mu$  的估计值为 10.02.

$$\sum_{i=1}^{16} x_i^2 = 16 \times 0.212^2 + 16 \times 9.97^2 \approx 1591.134,$$

剔除  $(\hat{\mu} - 3\hat{\sigma}, \hat{\mu} + 3\hat{\sigma})$  之外的数据 9.22，剩下的数据的样本方差为

$$\frac{1}{15} (1591.134 - 9.22^2 - 15 \times 10.02^2) \approx 0.008,$$

因此  $\sigma$  的估计值为  $\sqrt{0.008} \approx 0.09$ .

**【点评】** 本题考查正态分布，考查二项分布，考查方差、标准差，考查概率的计算，考查运算求解能力，注意解题方法的积累，属于中档题.

20. (12 分) 已知椭圆 C:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ )，四点  $P_1(1, 1)$ ， $P_2(0, 1)$ ， $P_3(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ， $P_4(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$  中恰有三点在椭圆 C 上.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设直线 l 不经过  $P_2$  点且与 C 相交于 A, B 两点. 若直线  $P_2A$  与直线  $P_2B$  的斜率的和为 -1，证明：l 过定点.

**【考点】** K3：椭圆的标准方程；K1：圆锥曲线的综合.

**【专题】** 14：证明题；35：转化思想；49：综合法；5E：圆锥曲线中的最值与范围问题.

**【分析】** (1) 根据椭圆的对称性，得到  $P_2(0, 1)$ ， $P_3(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ， $P_4(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$  三点在椭圆 C 上. 把  $P_2(0, 1)$ ， $P_3(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$  代入椭圆 C，求出  $a^2=4$ ， $b^2=1$ ，由此能求出椭圆 C 的方程.

(2) 当斜率不存在时, 不满足; 当斜率存在时, 设  $l: y=kx+t$ , ( $t \neq 1$ ), 联立

$$\begin{cases} y=kx+t \\ x^2+4y^2-4=0 \end{cases}, \text{ 得 } (1+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-4=0, \text{ 由此利用根的判别式、韦达定}$$

理、直线方程, 结合已知条件能证明直线  $l$  过定点  $(2, -1)$ .

**【解答】**解: (1) 根据椭圆的对称性,  $P_3(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $P_4(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$  两点必在椭圆  $C$  上,

又  $P_4$  的横坐标为 1,  $\therefore$  椭圆必不过  $P_1(1, 1)$ ,

$\therefore P_2(0, 1)$ ,  $P_3(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $P_4(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$  三点在椭圆  $C$  上.

把  $P_2(0, 1)$ ,  $P_3(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$  代入椭圆  $C$ , 得:

$$\begin{cases} \frac{1}{b^2}=1 \\ \frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1 \end{cases}, \text{ 解得 } a^2=4, b^2=1,$$

$\therefore$  椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ .

证明: (2) ①当斜率不存在时, 设  $l: x=m$ ,  $A(m, y_A)$ ,  $B(m, -y_A)$ ,

$\therefore$  直线  $P_2A$  与直线  $P_2B$  的斜率的和为  $-1$ ,

$$\therefore k_{P_2A}+k_{P_2B}=\frac{y_A-1}{m}+\frac{-y_A-1}{m}=\frac{-2}{m}=-1,$$

解得  $m=2$ , 此时  $l$  过椭圆右顶点, 不存在两个交点, 故不满足.

②当斜率存在时, 设  $l: y=kx+t$ , ( $t \neq 1$ ),  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,

$$\text{联立 } \begin{cases} y=kx+t \\ x^2+4y^2-4=0 \end{cases}, \text{ 整理, 得 } (1+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-4=0,$$

$$x_1+x_2=\frac{-8kt}{1+4k^2}, x_1x_2=\frac{4t^2-4}{1+4k^2},$$

$$\text{则 } k_{P_2A}+k_{P_2B}=\frac{y_1-1}{x_1}+\frac{y_2-1}{x_2}=\frac{x_2(kx_1+t)-x_2+x_1(kx_2+t)-x_1}{x_1x_2}$$

$$\frac{8kt^2 - 8k - 8kt^2 + 8kt}{\frac{1+4k^2}{4t^2-4}} = \frac{8k(t-1)}{4(t+1)(t-1)} = -1, \text{ 又 } t \neq 1,$$

$\therefore t = -2k - 1$ , 此时  $\Delta = -64k$ , 存在  $k$ , 使得  $\Delta > 0$  成立,

$\therefore$  直线  $l$  的方程为  $y = kx - 2k - 1$ ,

当  $x = 2$  时,  $y = -1$ ,

$\therefore l$  过定点  $(2, -1)$ .

**【点评】** 本题考查椭圆方程的求法, 考查椭圆、直线方程、根的判别式、韦达定理、直线方程位置关系等基础知识, 考查推理论证能力、运算求解能力, 考查函数与方程思想、化归与转化思想, 是中档题.

21. (12 分) 已知函数  $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x$ .

(1) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 若  $f(x)$  有两个零点, 求  $a$  的取值范围.

**【考点】** 52: 函数零点的判定定理; 6B: 利用导数研究函数的单调性.

**【专题】** 32: 分类讨论; 35: 转化思想; 4R: 转化法; 53: 导数的综合应用.

**【分析】** (1) 求导, 根据导数与函数单调性的关系, 分类讨论, 即可求得  $f(x)$  单调性;

(2) 由 (1) 可知: 当  $a > 0$  时才有两个零点, 根据函数的单调性求得  $f(x)$  最小值, 由  $f(x)_{\min} < 0$ ,  $g(a) = a \ln a + a - 1$ ,  $a > 0$ , 求导, 由  $g(a)_{\min} = g(e^{-2}) = e^{-2} \ln e^{-2} + e^{-2} - 1 = -\frac{1}{e^2} - 1$ ,  $g(1) = 0$ , 即可求得  $a$  的取值范围.

(1) 求导, 根据导数与函数单调性的关系, 分类讨论, 即可求得  $f(x)$  单调性;

(2) 分类讨论, 根据函数的单调性及函数零点的判断, 分别求得函数的零点, 即可求得  $a$  的取值范围.

**【解答】** 解 (1) 由  $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x$ , 求导  $f'(x) = 2ae^{2x} + (a-2)e^x - 1$



当  $a=0$  时,  $f'(x) = -2e^{x-1} < 0$ ,

$\therefore$  当  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x)$  单调递减,

当  $a > 0$  时,  $f'(x) = (2e^x + 1)(ae^{x-1} - 1) = 2a(e^{x+\frac{1}{2}} - \frac{1}{a})$ ,

令  $f'(x) = 0$ , 解得:  $x = \ln \frac{1}{a}$ ,

当  $f'(x) > 0$ , 解得:  $x > \ln \frac{1}{a}$ ,

当  $f'(x) < 0$ , 解得:  $x < \ln \frac{1}{a}$ ,

$\therefore x \in (-\infty, \ln \frac{1}{a})$  时,  $f(x)$  单调递减,  $x \in (\ln \frac{1}{a}, +\infty)$  单调递增;

当  $a < 0$  时,  $f'(x) = 2a(e^{x+\frac{1}{2}} - \frac{1}{a}) < 0$ , 恒成立,

$\therefore$  当  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x)$  单调递减,

综上所述: 当  $a \leq 0$  时,  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  单调减函数,

当  $a > 0$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, \ln \frac{1}{a})$  是减函数, 在  $(\ln \frac{1}{a}, +\infty)$  是增函数;

(2) ①若  $a \leq 0$  时, 由 (1) 可知:  $f(x)$  最多有一个零点,

当  $a > 0$  时,  $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^{x-1} - x$ ,

当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $e^{2x} \rightarrow 0$ ,  $e^x \rightarrow 0$ ,

$\therefore$  当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $f(x) \rightarrow +\infty$ ,

当  $x \rightarrow \infty$ ,  $e^{2x} \rightarrow +\infty$ , 且远远大于  $e^x$  和  $x$ ,

$\therefore$  当  $x \rightarrow \infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$ ,

$\therefore$  函数有两个零点,  $f(x)$  的最小值小于 0 即可,

由  $f(x)$  在  $(-\infty, \ln \frac{1}{a})$  是减函数, 在  $(\ln \frac{1}{a}, +\infty)$  是增函数,

$\therefore f(x)_{\min} = f(\ln \frac{1}{a}) = a \times (\frac{1}{a^2}) + (a-2) \times \frac{1}{a} - \ln \frac{1}{a} < 0$ ,

$\therefore 1 - \frac{1}{a} - \ln \frac{1}{a} < 0$ , 即  $\ln \frac{1}{a} + \frac{1}{a} - 1 > 0$ ,

设  $t = \frac{1}{a}$ , 则  $g(t) = \ln t + t - 1$ , ( $t > 0$ ),

求导  $g'(t) = \frac{1}{t} + 1$ , 由  $g(1) = 0$ ,

$\therefore t = \frac{1}{a} > 1$ , 解得:  $0 < a < 1$ ,

$\therefore a$  的取值范围  $(0, 1)$ .

方法二: (1) 由  $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x$ , 求导  $f'(x) = 2ae^{2x} + (a-2)e^x - 1$

,

当  $a=0$  时,  $f'(x) = -2e^x - 1 < 0$ ,

$\therefore$  当  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x)$  单调递减,

当  $a > 0$  时,  $f'(x) = (2e^x + 1)(ae^x - 1) = 2a(e^x + \frac{1}{2})(e^x - \frac{1}{a})$ ,

令  $f'(x) = 0$ , 解得:  $x = -\ln a$ ,

当  $f'(x) > 0$ , 解得:  $x > -\ln a$ ,

当  $f'(x) < 0$ , 解得:  $x < -\ln a$ ,

$\therefore x \in (-\infty, -\ln a)$  时,  $f(x)$  单调递减,  $x \in (-\ln a, +\infty)$  单调递增;

当  $a < 0$  时,  $f'(x) = 2a(e^x + \frac{1}{2})(e^x - \frac{1}{a}) < 0$ , 恒成立,

$\therefore$  当  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x)$  单调递减,

综上所述: 当  $a \leq 0$  时,  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  单调减函数,

当  $a > 0$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, -\ln a)$  是减函数, 在  $(-\ln a, +\infty)$  是增函数;

(2) ①若  $a \leq 0$  时, 由 (1) 可知:  $f(x)$  最多有一个零点,

②当  $a > 0$  时, 由 (1) 可知: 当  $x = -\ln a$  时,  $f(x)$  取得最小值,  $f(x)_{\min} = f(-\ln a)$

$$= 1 - \frac{1}{a} - \ln \frac{1}{a},$$

当  $a=1$ , 时,  $f(-\ln a) = 0$ , 故  $f(x)$  只有一个零点,

当  $a \in (1, +\infty)$  时, 由  $1 - \frac{1}{a} - \ln \frac{1}{a} > 0$ , 即  $f(-\ln a) > 0$ ,

故  $f(x)$  没有零点,

当  $a \in (0, 1)$  时,  $1 - \frac{1}{a} - \ln \frac{1}{a} < 0$ ,  $f(-\ln a) < 0$ ,

由  $f(-2) = ae^{-4} + (a-2)e^{-2} + 2 > -2e^{-2} + 2 > 0$ ,

故  $f(x)$  在  $(-\infty, -\ln a)$  有一个零点,

假设存在正整数  $n_0$ , 满足  $n_0 > \ln\left(\frac{3}{a} - 1\right)$ , 则  $f(n_0) = e^{n_0} (a e^{n_0+a-2}) - n_0 >$

$$e^{n_0} - n_0 > 2^{n_0} - n_0 > 0,$$

由  $\ln\left(\frac{3}{a} - 1\right) > -\ln a$ ,

因此在  $(-\ln a, +\infty)$  有一个零点.

$\therefore a$  的取值范围  $(0, 1)$ .

**【点评】** 本题考查导数的综合应用, 考查利用导数求函数单调性及最值, 考查函数零点的判断, 考查计算能力, 考查分类讨论思想, 属于中档题.

#### [选修 4-4, 坐标系与参数方程]

22. (10 分) 在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x=3\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$ , ( $\theta$  为参数), 直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x=a+4t \\ y=1-t \end{cases}$ , ( $t$  为参数).

(1) 若  $a=-1$ , 求  $C$  与  $l$  的交点坐标;

(2) 若  $C$  上的点到  $l$  距离的最大值为  $\sqrt{17}$ , 求  $a$ .

**【考点】** IT: 点到直线的距离公式; QH: 参数方程化成普通方程.

**【专题】** 34: 方程思想; 4Q: 参数法; 5S: 坐标系和参数方程.

**【分析】** (1) 将曲线  $C$  的参数方程化为标准方程, 直线  $l$  的参数方程化为一般方程, 联立两方程可以求得焦点坐标;

(2) 曲线  $C$  上的点可以表示成  $P(3\cos\theta, \sin\theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ , 运用点到直线距离公式可以表示出  $P$  到直线  $l$  的距离, 再结合距离最大值为  $\sqrt{17}$  进行分析, 可以求出  $a$  的值.

**【解答】** 解: (1) 曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x=3\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$  ( $\theta$  为参数), 化为标准方程

$$\text{是: } \frac{x^2}{9} + y^2 = 1;$$

$a=-1$  时, 直线  $l$  的参数方程化为一般方程是:  $x+4y-3=0$ ;

$$\text{联立方程 } \begin{cases} \frac{x^2}{9} + y^2 = 1, \\ x+4y-3=0 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=-\frac{21}{25} \\ y=\frac{24}{25} \end{cases},$$

所以椭圆 C 和直线 l 的交点为  $(3, 0)$  和  $(-\frac{21}{25}, \frac{24}{25})$ .

(2) l 的参数方程  $\begin{cases} x=a+4t \\ y=1-t \end{cases}$  (t 为参数) 化为一般方程是:  $x+4y-a-4=0$ ,

椭圆 C 上的任一点 P 可以表示成  $P(3\cos\theta, \sin\theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ ,

所以点 P 到直线 l 的距离 d 为:

$$d = \frac{|3\cos\theta + 4\sin\theta - a - 4|}{\sqrt{17}} = \frac{|5\sin(\theta + \phi) - a - 4|}{\sqrt{17}}, \quad \phi \text{ 满足 } \tan\phi = \frac{3}{4}, \text{ 且的 } d \text{ 的最大值为 } \sqrt{17}.$$

①当  $-a-4 \leq 0$  时, 即  $a \geq -4$  时,

$$|5\sin(\theta + \phi) - a - 4| \leq |-5 - a - 4| = 5 + a + 4 = 17$$

解得  $a \geq -4$ , 符合题意.

②当  $-a-4 > 0$  时, 即  $a < -4$  时

$$|5\sin(\theta + \phi) - a - 4| \leq |5 - a - 4| = 5 - a - 4 = 1 - a = 17$$

解得  $a = -16 < -4$ , 符合题意.

**【点评】** 本题主要考查曲线的参数方程、点到直线距离和三角函数的最值, 难点在于如何根据曲线 C 上的点到直线 l 距离的最大值求出 a.

#### [选修 4-5: 不等式选讲]

23. 已知函数  $f(x) = -x^2 + ax + 4$ ,  $g(x) = |x+1| + |x-1|$ .

(1) 当  $a=1$  时, 求不等式  $f(x) \geq g(x)$  的解集;

(2) 若不等式  $f(x) \geq g(x)$  的解集包含  $[-1, 1]$ , 求 a 的取值范围.

**【考点】** R5: 绝对值不等式的解法.

**【专题】** 32: 分类讨论; 4R: 转化法; 51: 函数的性质及应用; 5T: 不等式.

【分析】(1) 当  $a=1$  时,  $f(x) = -x^2+x+4$ ,  $g(x) = |x+1| + |x-1| = \begin{cases} 2x, & x > 1 \\ 2, & -1 \leq x \leq 1 \\ -2x, & x < -1 \end{cases}$

, 分  $x > 1$ 、 $x \in [-1, 1]$ 、 $x \in (-\infty, -1)$  三类讨论, 结合  $g(x)$  与  $f(x)$

的单调性质即可求得  $f(x) \geq g(x)$  的解集为  $[-1, \frac{\sqrt{17}-1}{2}]$ ;

(2) 依题意得:  $-x^2+ax+4 \geq 2$  在  $[-1, 1]$  恒成立  $\Leftrightarrow x^2-ax-2 \leq 0$  在  $[-1, 1]$  恒

成立, 只需  $\begin{cases} 1^2-a \cdot 1-2 \leq 0 \\ (-1)^2-a(-1)-2 \leq 0 \end{cases}$ , 解之即可得  $a$  的取值范围.

【解答】解: (1) 当  $a=1$  时,  $f(x) = -x^2+x+4$ , 是开口向下, 对称轴为  $x=\frac{1}{2}$  的二次函数,

$$g(x) = |x+1| + |x-1| = \begin{cases} 2x, & x > 1 \\ 2, & -1 \leq x \leq 1 \\ -2x, & x < -1 \end{cases}$$

当  $x \in (1, +\infty)$  时, 令  $-x^2+x+4=2x$ , 解得  $x=\frac{\sqrt{17}-1}{2}$ ,  $g(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增,  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减,  $\therefore$  此时  $f(x) \geq g(x)$  的解集为  $(1, \frac{\sqrt{17}-1}{2}]$ ;

当  $x \in [-1, 1]$  时,  $g(x) = 2$ ,  $f(x) \geq f(-1) = 2$ .

当  $x \in (-\infty, -1)$  时,  $g(x)$  单调递减,  $f(x)$  单调递增, 且  $g(-1) = f(-1) = 2$ .

综上所述,  $f(x) \geq g(x)$  的解集为  $[-1, \frac{\sqrt{17}-1}{2}]$ ;

(2) 依题意得:  $-x^2+ax+4 \geq 2$  在  $[-1, 1]$  恒成立, 即  $x^2-ax-2 \leq 0$  在  $[-1, 1]$

恒成立, 则只需  $\begin{cases} 1^2-a \cdot 1-2 \leq 0 \\ (-1)^2-a(-1)-2 \leq 0 \end{cases}$ , 解得  $-1 \leq a \leq 1$ ,

故  $a$  的取值范围是  $[-1, 1]$ .

【点评】本题考查绝对值不等式的解法, 去掉绝对值符号是关键, 考查分类讨论思想与等价转化思想的综合运用, 属于中档题.