2016 年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标Ⅲ）

一、选择题:本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．（5 分）设集合 S={x|（x﹣2）（x﹣3）≥0}，T={x|x＞0}，则 S∩T=（　　）

A．[2，3]　　B．（﹣∞，2]∪[3，+∞）

C．[3，+∞）　　D．（0，2]∪[3，+∞）

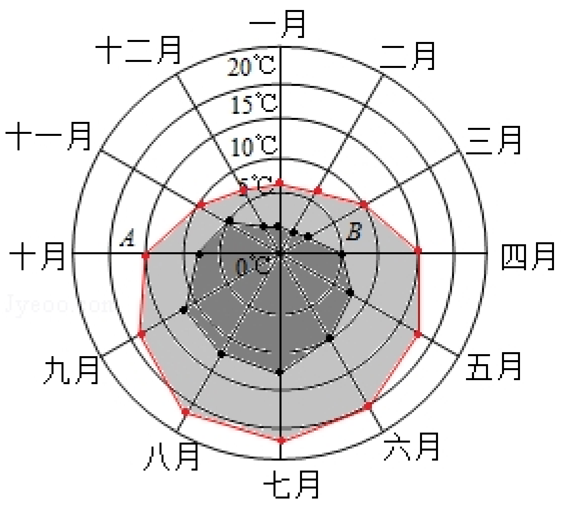
2．（5 分）若 z=1+2i，则 $\frac{4i}{z\cdot\overline{z}-1}$=（　　）

A．1　　B．﹣1　　C．i　　D．﹣i

3．（5 分）已知向量 $\overrightarrow{BA}$=（$\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$），$\overrightarrow{BC}$=（$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{1}{2}$），则∠ABC=（　　）

A．30°　　B．45°　　C．60°　　D．120°

4．（5 分）某旅游城市为向游客介绍本地的气温情况，绘制了一年中各月平均最高气温和平均最低气温的雷达图，图中 A 点表示十月的平均最高气温约为 15℃，B 点表示四月的平均最低气温约为 5℃，下面叙述不正确的是（　　）



———平均最低气温　　———平均最高气温

A．各月的平均最低气温都在 0℃以上

B．七月的平均温差比一月的平均温差大

C．三月和十一月的平均最高气温基本相同

D．平均最高气温高于 20℃的月份有 5 个

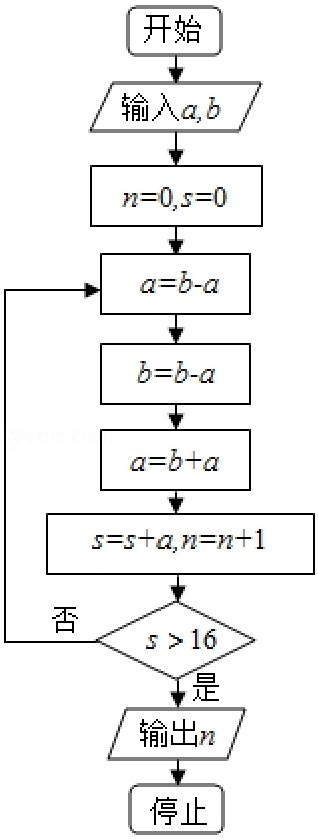
5．（5 分）若 tanα=$\frac{3}{4}$，则 $\cos^2\alpha+2\sin2\alpha$=（　　）

A. $\frac{64}{25}$　　B. $\frac{48}{25}$　　C. 1　　D. $\frac{16}{25}$

6. （5 分）已知 a=$2^{\frac{4}{3}}$，b=$3^{\frac{2}{3}}$，c=$25^{\frac{1}{3}}$，则（　　）

A. b＜a＜c　　B. a＜b＜c　　C. b＜c＜a　　D. c＜a＜b

7. （5 分）执行如图程序框图，如果输入的 a=4，b=6，那么输出的 n=（　　）

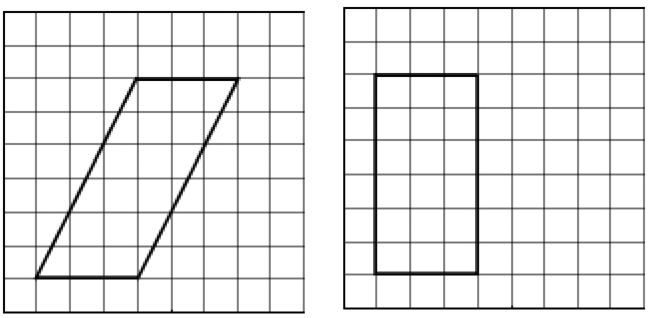


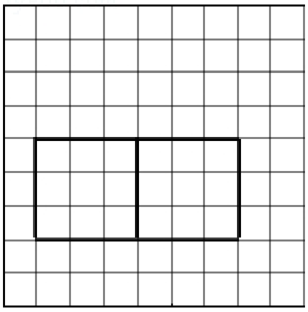
A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

8. （5 分）在△ABC 中，B=$\frac{\pi}{4}$，BC 边上的高等于$\frac{1}{3}$BC，则 cosA 等于（　　）

A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　C. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$　　D. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

9. （5 分）如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某多面体的三视图，则该多面体的表面积为（　　）





A．$18+36\sqrt{5}$　　B．$54+18\sqrt{5}$　　C．90　　D．81

10．（5 分）在封闭的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 V 的球，若 AB⊥BC，AB=6，BC=8，$AA_1=3$，则 V 的最大值是（　　）

A．4π　　B．$\frac{9\pi}{2}$　　C．6π　　D．$\frac{32\pi}{3}$

11．（5 分）已知 O 为坐标原点，F 是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的左焦点，A，B 分别为 C 的左，右顶点．P 为 C 上一点，且 PF⊥x 轴，过点 A 的直线 l 与线段 PF 交于点 M，与 y 轴交于点 E．若直线 BM 经过 OE 的中点，则 C 的离心率为（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{3}{4}$

12．（5 分）定义“规范 01 数列”$\{a_n\}$如下：$\{a_n\}$共有 2m 项，其中 m 项为 0，m 项为 1，且对任意 k≤2m，a_1，a_2，…，a_k 中 0 的个数不少于 1 的个数，若 m=4，则不同的“规范 01 数列”共有（　　）

A．18 个　　B．16 个　　C．14 个　　D．12 个

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分.

13．（5 分）若 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\x-2y\leqslant 0\\x+2y-2\leqslant 0\end{cases}$，则 z=x+y 的最大值为________.

14．（5 分）函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的图象可由函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的图象至少向右平移________个单位长度得到.

15．（5 分）已知 f（x）为偶函数，当 x＜0 时，f（x）=ln（﹣x）+3x，则曲线 y=f（x）在点（1，﹣3）处的切线方程是________.

16. （5 分）已知直线 l：$mx+y+3m-\sqrt{3}=0$ 与圆 $x^2+y^2=12$ 交于 A，B 两点，过 A,B 分别作 l 的垂线与 x 轴交于 C，D 两点，若$|AB|=2\sqrt{3}$，则$|CD|=$_______.

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. （12 分）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=1+\lambda a_n$，其中 $\lambda\neq0$.

（1）证明$\{a_n\}$是等比数列，并求其通项公式；

（2）若 $S_5=\frac{31}{32}$，求 λ.

18. （12 分）如图是我国 2008 年至 2014 年生活垃圾无害化处理量（单位：亿吨）的折线图.

注：年份代码 1－ 7 分别对应年份 2008－ 2014.

（Ⅰ）由折线图看出，可用线性回归模型拟合 y 与 t 的关系，请用相关系数加以证明；

（Ⅱ）建立 y 关于 t 的回归方程（系数精确到 0.01），预测 2016 年我国生活垃圾无害化处理量.

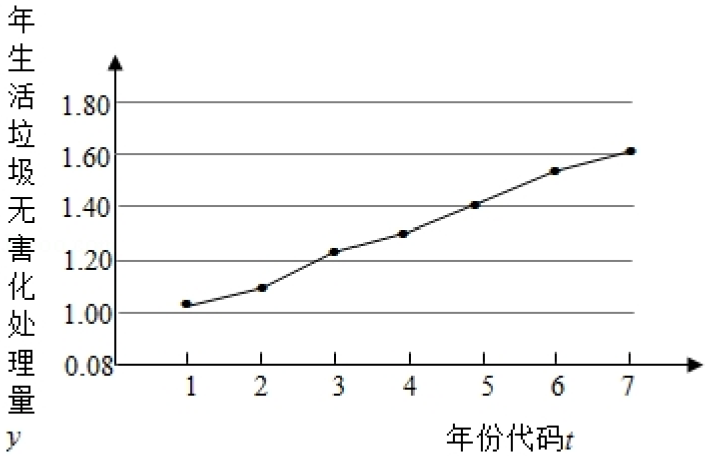
附注：

参考数据：$\sum_{i=1}^{7}y_i=9.32$，$\sum_{i=1}^{7}t_iy_i=40.17$，$\sqrt{\sum_{i=1}^{7}(y_i-\overline{y})^2}=0.55$，$\sqrt{7}\approx2.646$.

参考公式：相关系数 $r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$，

回归方程$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}t$中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：

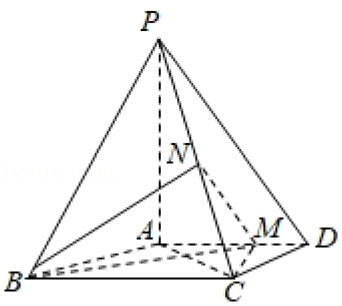
$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})^2}，\quad \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{t}.$$



19．（12 分）如图，四棱锥 P﹣ ABCD 中，PA⊥底面 ABCD，AD∥BC，AB=AD=AC=3，PA=BC=4，M 为线段 AD 上一点，AM=2MD，N 为 PC 的中点．

（1）证明：MN∥平面 PAB；

（2）求直线 AN 与平面 PMN 所成角的正弦值．



20．（12 分）已知抛物线 C：$y^2=2x$ 的焦点为 F，平行于 x 轴的两条直线 l_1，l_2 分别交 C 于 A，B 两点，交 C 的准线于 P，Q 两点．

（Ⅰ）若 F 在线段 AB 上，R 是 PQ 的中点，证明 AR∥FQ；

（Ⅱ）若△PQF 的面积是△ABF 的面积的两倍，求 AB 中点的轨迹方程．

21．（12 分）设函数 f（x）=acos2x+（a﹣1）（cosx+1），其中 a＞0，记|f（x）|的最大值为 A．

（Ⅰ）求 f′（x）；

（Ⅱ）求 A；

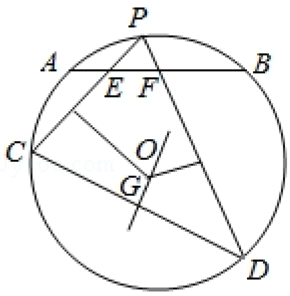
（Ⅲ）证明：|f′（x）|≤2A．

请考生在第 22-24 题中任选一题做答，如果多做，则按所做的第一题计分.[选修 4-1：几何证明选讲]

22．（10 分）如图，⊙O 中$\overset{\frown}{AB}$的中点为 P，弦 PC，PD 分别交 AB 于 E，F 两点.

（1）若∠PFB=2∠PCD，求∠PCD 的大小；

（2）若 EC 的垂直平分线与 FD 的垂直平分线交于点 G，证明：OG⊥CD.



[选修 4-4：坐标系与参数方程]

23．在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\alpha\\ y=\sin\alpha\end{cases}$（α 为参数），以坐标原点为极点，以 x 轴的正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=2\sqrt{2}$.

（1）写出 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程；

（2）设点 P 在 C_1 上，点 Q 在 C_2 上，求|PQ|的最小值及此时 P 的直角坐标.

[选修 4-5：不等式选讲]

24．已知函数 $f(x)=|2x-a|+a$．

（1）当 $a=2$ 时，求不等式 $f(x)\leqslant 6$ 的解集；

（2）设函数 $g(x)=|2x-1|$，当 $x\in R$ 时，$f(x)+g(x)\geqslant 3$，求 a 的取值范围．

2016年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标Ⅲ）

参考答案与试题解析

一、选择题:本大题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．（5分）设集合S={x|（x﹣2）（x﹣3）≥0}，T={x|x>0}，则S∩T=（　　）

A．[2，3]　　B．（﹣∞，2]∪[3，+∞）　　C．[3，+∞）　D．（0，2]∪[3，+∞）

【考点】1E：交集及其运算.

【专题】37：集合思想；4O：定义法；5J：集合.

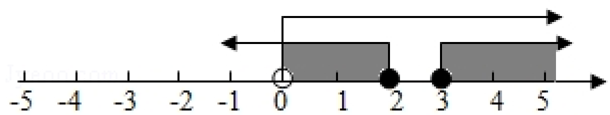
【分析】求出S中不等式的解集确定出S，找出S与T的交集即可.

【解答】解：由S中不等式解得：x≤2或x≥3，即S=（﹣∞，2]∪[3，+∞），

∵T=（0，+∞），

∴S∩T=（0，2]∪[3，+∞），

故选：D.



【点评】此题考查了交集及其运算，熟练掌握交集的定义是解本题的关键.

2．（5分）若z=1+2i，则$\frac{4i}{z\cdot\overline{z}-1}$=（　　）

A．1　　B．﹣1　　C．i　　D．﹣i

【考点】A5：复数的运算.

【专题】11：计算题；29：规律型；35：转化思想；5N：数系的扩充和复数.

【分析】利用复数的乘法运算法则，化简求解即可.

【解答】解：z=1+2i，则$\frac{4i}{z\overline{z}-1}=\frac{4i}{(1+2i)(1-2i)-1}=\frac{4i}{5-1}$=i.

故选：C.

【点评】本题考查复数的代数形式混合运算，考查计算能力.

3．（5 分）已知向量$\overrightarrow{BA}$=（$\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$），$\overrightarrow{BC}$=（$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{1}{2}$），则∠ABC=（　　）

A．30°　　B．45°　　C．60°　　D．120°

【考点】9S：数量积表示两个向量的夹角.

【专题】11：计算题；41：向量法；49：综合法；5A：平面向量及应用.

【分析】根据向量$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BC}$的坐标便可求出$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$，及$|\overrightarrow{BA}|$，$|\overrightarrow{BC}|$的值，从而根据向量夹角余弦公式即可求出 cos∠ABC 的值，根据∠ABC 的范围便可得出∠ABC 的值.

【解答】解：$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{BC}|=1$；

∴$\cos\angle ABC=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

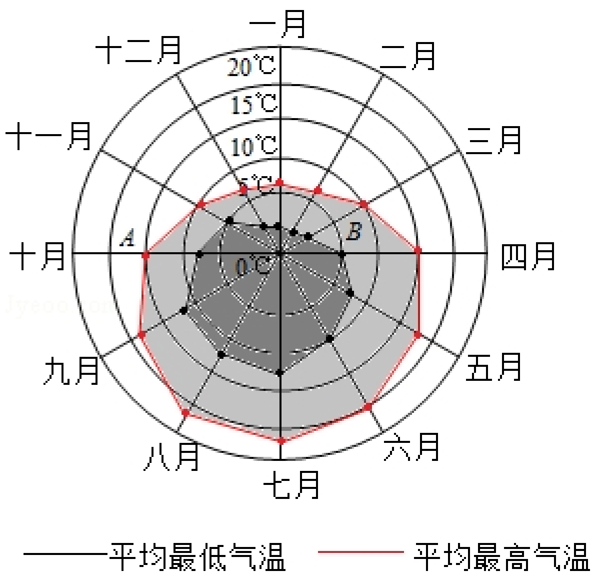
又 0°≤∠ABC≤180°；

∴∠ABC=30°.

故选：A.

【点评】考查向量数量积的坐标运算，根据向量坐标求向量长度的方法，以及向量夹角的余弦公式，向量夹角的范围，已知三角函数值求角.

4．（5 分）某旅游城市为向游客介绍本地的气温情况，绘制了一年中各月平均最高气温和平均最低气温的雷达图，图中 A 点表示十月的平均最高气温约为 15℃，B 点表示四月的平均最低气温约为 5℃，下面叙述不正确的是（　　）



A．各月的平均最低气温都在0℃以上

B．七月的平均温差比一月的平均温差大

C．三月和十一月的平均最高气温基本相同

D．平均最高气温高于20℃的月份有5个

【考点】F4：进行简单的合情推理．

【专题】31：数形结合；4A：数学模型法；5M：推理和证明．

【分析】根据平均最高气温和平均最低气温的雷达图进行推理判断即可．

【解答】解：A．由雷达图知各月的平均最低气温都在0℃以上，正确

B．七月的平均温差大约在10°左右，一月的平均温差在5°左右，故七月的平均温差比一月的平均温差大，正确

C．三月和十一月的平均最高气温基本相同，都为10°，正确

D．平均最高气温高于20℃的月份有7，8两个月，故D错误，

故选：D．

【点评】本题主要考查推理和证明的应用，根据平均最高气温和平均最低气温的雷达图，利用图象法进行判断是解决本题的关键．

5．（5分）若 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$，则 $\cos^2\alpha+2\sin2\alpha=$（　　）

A．$\frac{64}{25}$　　B．$\frac{48}{25}$　　C．1　　D．$\frac{16}{25}$

【考点】GF：三角函数的恒等变换及化简求值．

【专题】11：计算题；35：转化思想；4R：转化法；56：三角函数的求值．

【分析】将所求的关系式的分母“1”化为（$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$），再将“弦”化“切”即可得到答案．

【解答】解：∵$\tan\alpha=\frac{3}{4}$，

∴$\cos^2\alpha+2\sin2\alpha=\frac{\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{1+4\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{1+4\times\frac{3}{4}}{\frac{9}{16}+1}=\frac{64}{25}$．

故选：A．

【点评】本题考查三角函数的化简求值，“弦”化“切”是关键，是基础题．

6．（5 分）已知 $a=2^{\frac{4}{3}}$，$b=3^{\frac{2}{3}}$，$c=25^{\frac{1}{3}}$，则（　　）

A．b＜a＜c　　B．a＜b＜c　　C．b＜c＜a　　D．c＜a＜b

【考点】4Y：幂函数的单调性、奇偶性及其应用．

【专题】35：转化思想；4R：转化法；51：函数的性质及应用．

【分析】$b=4^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{4}{3}}$，$c=25^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{2}{3}}$，结合幂函数的单调性，可比较 a，b，c，进而得到答案．

【解答】解：∵$a=2^{\frac{4}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$，

$b=3^{\frac{2}{3}}$，

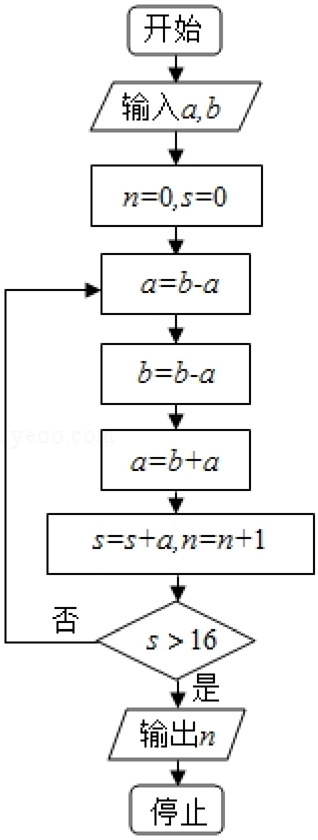
$c=25^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{2}{3}}$，

综上可得：b＜a＜c，

故选：A．

【点评】本题考查的知识点是指数函数的单调性，幂函数的单调性，是函数图象和性质的综合应用，难度中档．

7．（5 分）执行如图程序框图，如果输入的 a=4，b=6，那么输出的 n=（　　）



A．3　　　　　　B．4　　　　　　C．5　　　　　　D．6

【考点】EF：程序框图．

【专题】11：计算题；27：图表型；4B：试验法；5K：算法和程序框图．

【分析】模拟执行程序，根据赋值语句的功能依次写出每次循环得到的 a，b，s，n 的值，当 s=20 时满足条件 s＞16，退出循环，输出 n 的值为 4．

【解答】解：模拟执行程序，可得

a=4，b=6，n=0，s=0

执行循环体，a=2，b=4，a=6，s=6，n=1

不满足条件 s＞16，执行循环体，a=− 2，b=6，a=4，s=10，n=2

不满足条件 s＞16，执行循环体，a=2，b=4，a=6，s=16，n=3

不满足条件 s＞16，执行循环体，a=− 2，b=6，a=4，s=20，n=4

满足条件 s＞16，退出循环，输出 n 的值为 4．

故选：B．

【点评】本题主要考查了循环结构的程序框图的应用，正确依次写出每次循环得

到的 a，b，s 的值是解题的关键，属于基础题．

8．（5 分）在△ABC 中，B=$\frac{\pi}{4}$，BC 边上的高等于$\frac{1}{3}$BC，则 cosA 等于（　　）

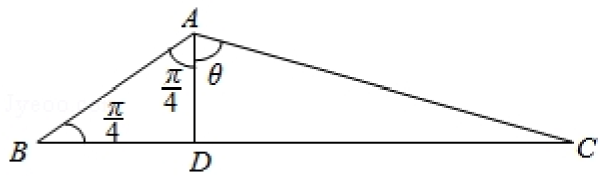
A．$\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　B．$\frac{\sqrt{10}}{10}$　　C．$-\frac{\sqrt{10}}{10}$　　D．$-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

【考点】HT：三角形中的几何计算．

【专题】35：转化思想；44：数形结合法；58：解三角形．

【分析】作出图形，令∠DAC=θ，依题意，可求得 cosθ=$\frac{AD}{AC}$=$\frac{\frac{a}{3}}{\sqrt{(\frac{1}{3}a)^2(\frac{2a}{3})^2}}$=$\frac{\sqrt{5}}{5}$，sinθ=$\frac{2\sqrt{5}}{5}$，利用两角和的余弦即可求得答案．

【解答】解：设△ABC 中角 A、B、C、对应的边分别为 a、b、c，AD⊥BC 于 D，令∠DAC=θ，



∵在△ABC 中，B=$\frac{\pi}{4}$，BC 边上的高 AD=h=$\frac{1}{3}$BC=$\frac{1}{3}$a，

∴BD=AD=$\frac{1}{3}$a，CD=$\frac{2}{3}$a，

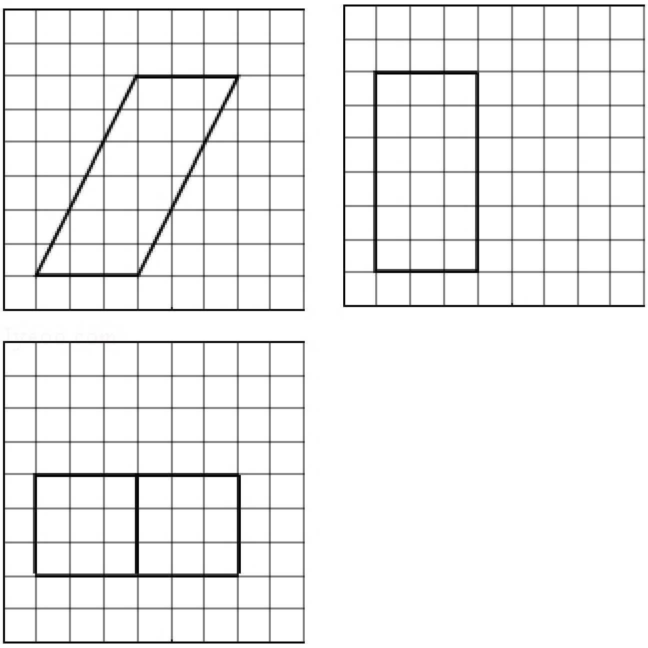
在 Rt△ADC 中，cosθ=$\frac{AD}{AC}$=$\frac{\frac{a}{3}}{\sqrt{(\frac{1}{3}a)^2+(\frac{2a}{3})^2}}$=$\frac{\sqrt{5}}{5}$，故 sinθ=$\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

∴cosA=cos（$\frac{\pi}{4}$+θ）=cos$\frac{\pi}{4}$cosθ− sin$\frac{\pi}{4}$sinθ=$\frac{\sqrt{2}}{2}$×$\frac{\sqrt{5}}{5}$− $\frac{\sqrt{2}}{2}$×$\frac{2\sqrt{5}}{5}$=− $\frac{\sqrt{10}}{10}$．

故选：C．

【点评】本题考查解三角形中，作出图形，令∠DAC=θ，利用两角和的余弦求 cosA 是关键，也是亮点，属于中档题．

9．（5 分）如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某多面体的三视图，则该多面体的表面积为（　　）



A． $18+36\sqrt{5}$　　B． $54+18\sqrt{5}$　　C． 90　　D． 81

【考点】L!：由三视图求面积、体积．

【专题】11：计算题；5F：空间位置关系与距离；5Q：立体几何．

【分析】由已知中的三视图可得：该几何体是一个以主视图为底面的直四棱柱，进而得到答案．

【解答】解：由已知中的三视图可得：该几何体是一个以主视图为底面的直四棱柱，

其底面面积为：$3\times6=18$，

侧面的面积为：$(3\times3+3\times\sqrt{3^2+6^2})\times2=18+18\sqrt{5}$，

故棱柱的表面积为：$18\times2+18+18\sqrt{5}=54+18\sqrt{5}$.

故选：B．

【点评】本题考查的知识点是由三视图，求体积和表面积，根据已知的三视图，判断几何体的形状是解答的关键．

10．（5 分）在封闭的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 V 的球，若 $AB\perp BC$，$AB=6$，$BC=8$，$AA_1=3$，则 V 的最大值是（　　）

A． 4π　　B． $\frac{9\pi}{2}$　　C． 6π　　D． $\frac{32\pi}{3}$

【考点】LF：棱柱、棱锥、棱台的体积．

【专题】11：计算题；5F：空间位置关系与距离；5Q：立体几何．

【分析】根据已知可得直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的内切球半径为$\frac{3}{2}$，代入球的体积公式，可得答案．

【解答】解：∵$AB\perp BC$，AB=6，BC=8，

∴AC=10．

故三角形 ABC 的内切圆半径 $r=\frac{6+8-10}{2}=2$，

又由 $AA_1=3$，

故直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的内切球半径为$\frac{3}{2}$，

此时 V 的最大值$\frac{4}{3}\pi\cdot(\frac{3}{2})^3=\frac{9\pi}{2}$，

故选：B．

【点评】本题考查的知识点是棱柱的几何特征，根据已知求出球的半径，是解答的关键．

11．（5 分）已知 O 为坐标原点，F 是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的左焦点，A，B 分别为 C 的左，右顶点．P 为 C 上一点，且 PF⊥x 轴，过点 A 的直线 l 与线段 PF 交于点 M，与 y 轴交于点 E．若直线 BM 经过 OE 的中点，则 C 的离心率为（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{3}{4}$

【考点】K4：椭圆的性质．

【专题】34：方程思想；48：分析法；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】由题意可得 F，A，B 的坐标，设出直线 AE 的方程为 y=k（x+a），分别令 x=﹣c，x=0，可得 M，E 的坐标，再由中点坐标公式可得 H 的坐标，运用三点共线的条件：斜率相等，结合离心率公式，即可得到所求值．

【解答】解：由题意可设 F（﹣ c，0），A（﹣ a，0），B（a，0），

设直线 AE 的方程为 y=k（x+a），

令 x=﹣ c，可得 M（﹣ c，k（a﹣ c）），令 x=0，可得 E（0，ka），

设 OE 的中点为 H，可得 H（0，$\frac{ka}{2}$），

由 B，H，M 三点共线，可得 $k_{BH}=k_{BM}$，

即为$\frac{\frac{ka}{2}}{-a}=\frac{k(a-c)}{-c-a}$，

化简可得$\frac{a-c}{a+c}=\frac{1}{2}$，即为 a=3c，

可得 e=$\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$.

另解：由△AMF∽△AEO，

可得$\frac{a-c}{a}=\frac{MF}{OE}$，

由△BOH∽△BFM，

可得$\frac{a}{a+c}=\frac{OH}{FM}=\frac{OE}{2FM}$，

即有$\frac{2(a-c)}{a}=\frac{a+c}{a}$即 a=3c，

可得 e=$\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$.

故选：A.

【点评】本题考查椭圆的离心率的求法，注意运用椭圆的方程和性质，以及直线方程的运用和三点共线的条件：斜率相等，考查化简整理的运算能力，属于中档题.

12．（5 分）定义“规范 01 数列”$\{a_n\}$如下：$\{a_n\}$共有 2m 项，其中 m 项为 0，m 项为 1，且对任意 k≤2m，a_1，a_2，…，a_k中 0 的个数不少于 1 的个数，若 m=4，则不同的“规范 01 数列”共有（　　）

A．18 个　　B．16 个　　C．14 个　　D．12 个

【考点】8B：数列的应用.

【专题】16：压轴题；23：新定义；38：对应思想；4B：试验法．

【分析】由新定义可得，“规范 01 数列”有偶数项 2m 项，且所含 0 与 1 的个数相等，首项为 0，末项为 1，当 m=4 时，数列中有四个 0 和四个 1，然后一一列举得答案．

【解答】解：由题意可知，“规范 01 数列”有偶数项 2m 项，且所含 0 与 1 的个数相等，首项为 0，末项为 1，若 m=4，说明数列有 8 项，满足条件的数列有：

0，0，0，0，1，1，1，1；　0，0，0，1，0，1，1，1；　0，0，0，1，1，0，1，1；　0，0，0，1，1，1，0，1；　0，0，1，0，0，1，1，1；
0，0，1，0，1，0，1，1；　0，0，1，0，1，1，0，1；　0，0，1，1，0，1，0，1；　0，0，1，1，0，0，1，1；　0，1，0，0，0，1，1，1；
0，1，0，0，1，0，1，1；　0，1，0，0，1，1，0，1；　0，1，0，1，0，0，1，1；　0，1，0，1，0，1，0，1．共 14 个．

故选：C．

【点评】本题是新定义题，考查数列的应用，关键是对题意的理解，枚举时做到不重不漏，是压轴题．

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分．

13．（5 分）若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\ x-2y\leqslant 0\\ x+2y-2\leqslant 0\end{cases}$，则 z=x+y 的最大值为__$\frac{3}{2}$__．

【考点】7C：简单线性规划．

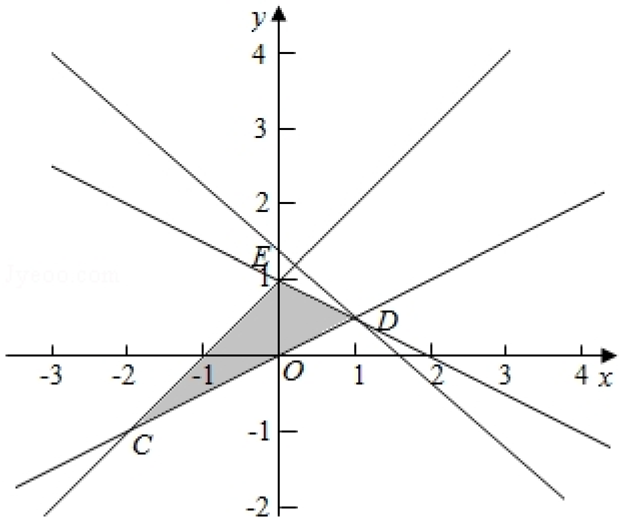
【专题】59：不等式的解法及应用．

【分析】首先画出平面区域，然后将目标函数变形为直线的斜截式，求在 y 轴的截距最大值．

【解答】解：不等式组表示的平面区域如图阴影部分，当直线经过 D 点时，z 最大，

由 $\begin{cases}x-2y=0\\ x+2y-2=0\end{cases}$ 得 D（1，$\frac{1}{2}$），

所以 z=x+y 的最大值为 $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$;



故答案为：$\frac{3}{2}$.

【点评】本题考查了简单线性规划；一般步骤是：①画出平面区域；②分析目标函数，确定求最值的条件.

14．（5 分）函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的图象可由函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的图象至少向右平移__$\frac{2\pi}{3}$__个单位长度得到.

【考点】HJ：函数 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 的图象变换.

【专题】33：函数思想；4R：转化法；57：三角函数的图像与性质.

【分析】令 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$，则 $f(x-\phi)=2\sin(x+\frac{\pi}{3}-\phi)$，依题意可得 $2\sin(x+\frac{\pi}{3}-\phi)=2\sin(x-\frac{\pi}{3})$，由 $\frac{\pi}{3}-\phi=2k\pi-\frac{\pi}{3}$（$k\in Z$），可得答案.

【解答】解：∵$y=f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$，$y=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin(x-\frac{\pi}{3})$，

∴$f(x-\phi)=2\sin(x+\frac{\pi}{3}-\phi)$ （$\phi>0$），

令 $2\sin(x+\frac{\pi}{3}-\phi)=2\sin(x-\frac{\pi}{3})$，

则$\frac{\pi}{3}-\phi=2k\pi-\frac{\pi}{3}$（k∈Z），

即$\phi=\frac{2\pi}{3}-2k\pi$（k∈Z），

当k=0时，正数$\phi_{min}=\frac{2\pi}{3}$，

故答案为：$\frac{2\pi}{3}$.

【点评】本题考查函数y=sinx的图象变换得到y=Asin（ωx+φ）（A＞0，ω＞0）的图象，得到$\frac{\pi}{3}-\phi=2k\pi-\frac{\pi}{3}$（k∈Z）是关键，也是难点，属于中档题.

15．（5分）已知f（x）为偶函数，当x＜0时，f（x）=ln（﹣x）+3x，则曲线y=f（x）在点（1，﹣3）处的切线方程是 <u>2x+y+1=0</u> .

【考点】6H：利用导数研究曲线上某点切线方程.

【专题】34：方程思想；51：函数的性质及应用；52：导数的概念及应用.

【分析】由偶函数的定义，可得f（﹣x）=f（x），即有x＞0时，f（x）=lnx﹣3x，求出导数，求得切线的斜率，由点斜式方程可得切线的方程.

【解答】解：f（x）为偶函数，可得f（﹣x）=f（x），

当x＜0时，f（x）=ln（﹣x）+3x，即有

x＞0时，f（x）=lnx﹣3x，f′（x）$=\frac{1}{x}-3$，

可得f（1）=ln1﹣3=﹣3，f′（1）=1﹣3=﹣2，

则曲线y=f（x）在点（1，﹣3）处的切线方程为y﹣（﹣3）=﹣2（x﹣1），

即为2x+y+1=0.

故答案为：2x+y+1=0.

【点评】本题考查导数的运用：求切线的方程，同时考查函数的奇偶性的定义和运用，考查运算能力，属于中档题.

16．（5分）已知直线l：$mx+y+3m-\sqrt{3}=0$与圆$x^2+y^2=12$交于A，B两点，过A， B 分别作 l 的垂线与 x 轴交于 C，D 两点，若|AB|=$2\sqrt{3}$，则|CD|=__4__.

【考点】J8：直线与圆相交的性质．

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；5B：直线与圆．

【分析】先求出 m，可得直线 l 的倾斜角为 30°，再利用三角函数求出|CD|即可．

【解答】解：由题意，|AB|=$2\sqrt{3}$，∴圆心到直线的距离 d=3，

∴$\frac{|3m-\sqrt{3}|}{\sqrt{m^2+1}}$=3，

∴m=$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

∴直线 l 的倾斜角为 30°，

∵过 A，B 分别作 l 的垂线与 x 轴交于 C，D 两点，

∴|CD|=$\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$=4．

故答案为：4．

【点评】本题考查直线与圆的位置关系，考查弦长的计算，考查学生的计算能力，比较基础．

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17．（12 分）已知数列{a_n}的前 n 项和 $S_n=1+\lambda a_n$，其中 $\lambda\neq0$．

（1）证明{a_n}是等比数列，并求其通项公式；

（2）若 $S_5=\frac{31}{32}$，求 λ．

【考点】87：等比数列的性质；8H：数列递推式．

【专题】34：方程思想；4R：转化法；54：等差数列与等比数列．

【分析】（1）根据数列通项公式与前 n 项和公式之间的关系进行递推，结合等比数列的定义进行证明求解即可．

（2）根据条件建立方程关系进行求解就可．

【解答】解：（1）∵$S_n=1+\lambda a_n$，$\lambda\neq0$．

∴$a_n\neq0$．

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=1+\lambda a_n-1-\lambda a_{n-1}=\lambda a_n-\lambda a_{n-1}$，

即（$\lambda-1$）$a_n=\lambda a_{n-1}$，

∵$\lambda\neq0$，$a_n\neq0$．∴$\lambda-1\neq0$．即 $\lambda\neq1$，

即$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{\lambda}{\lambda-1}$，（$n\geqslant2$），

∴$\{a_n\}$是等比数列，公比 $q=\frac{\lambda}{\lambda-1}$，

当 $n=1$ 时，$S_1=1+\lambda a_1=a_1$，

即 $a_1=\frac{1}{1-\lambda}$，

∴$a_n=\frac{1}{1-\lambda}\bullet\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^{n-1}$．

（2）若 $S_5=\frac{31}{32}$，

则若 $S_5=1+\lambda\left[\frac{1}{1-\lambda}\bullet\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^{4}\right]=\frac{31}{32}$，

即（$\frac{\lambda}{1-\lambda}$）$^5=\frac{31}{32}-1=-\frac{1}{32}$，

则$\frac{\lambda}{1-\lambda}=-\frac{1}{2}$，得 $\lambda=-1$．

【点评】本题主要考查数列递推关系的应用，根据 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$的关系进行递推是解决本题的关键．考查学生的运算和推理能力．

18．（12 分）如图是我国 2008 年至 2014 年生活垃圾无害化处理量（单位：亿吨）的折线图．

注：年份代码 1－7 分别对应年份 2008－2014．

（Ⅰ）由折线图看出，可用线性回归模型拟合 y 与 t 的关系，请用相关系数加以证明；

（Ⅱ）建立 y 关于 t 的回归方程（系数精确到 0.01），预测 2016 年我国生活垃圾无害化处理量．

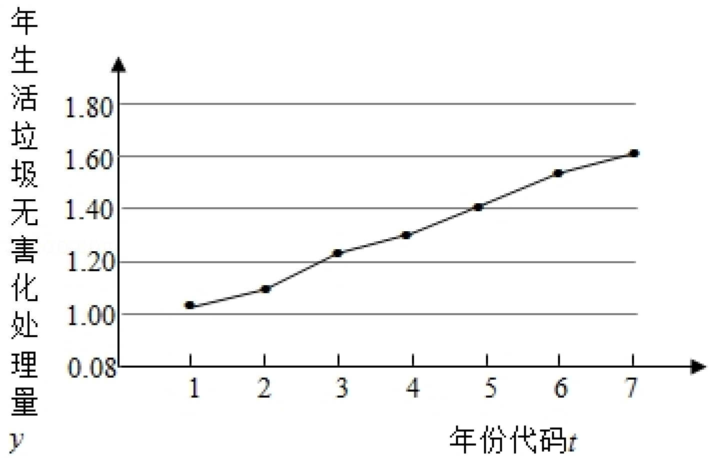
附注：

参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{7}y_i=9.32$，$\sum\limits_{i=1}^{7}t_iy_i=40.17$，$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\overline{y})^2}=0.55$，$\sqrt{7}\approx2.646$．

参考公式：相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$，

回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}t$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：

$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{t}$.



【考点】BK：线性回归方程.

【专题】11：计算题；35：转化思想；5I：概率与统计.

【分析】（1）由折线图看出，y 与 t 之间存在较强的正相关关系，将已知数据代入相关系数方程，可得答案；

（2）根据已知中的数据，求出回归系数，可得回归方程，2016 年对应的 t 值为 9，代入可预测 2016 年我国生活垃圾无害化处理量.

【解答】解：（1）由折线图看出，y 与 t 之间存在较强的正相关关系，理由如下：

$\because r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7}(t_i-\overline{t})^2\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\overline{y})^2}}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}t_iy_i-7\overline{t}\overline{y}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7}(t_i-\overline{t})^2\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\overline{y})^2}}\approx\dfrac{40.17-4\times9.32}{2\sqrt{7}\cdot0.55}$

$\approx\dfrac{2.89}{2.9106}\approx0.993$，

∵0.993＞0.75，

故 y 与 t 之间存在较强的正相关关系；

（2）$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}t_iy_i-7\overline{t}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{7}t_i^2-7\overline{t}^2}\approx\dfrac{2.89}{28}\approx0.103$，

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{t}\approx1.331-0.103\times4\approx0.92$，

∴y 关于 t 的回归方程 $\hat{y}=0.10t+0.92$，

2016 年对应的 t 值为 9，

故 $\hat{y}=0.10\times9+0.92=1.82$，

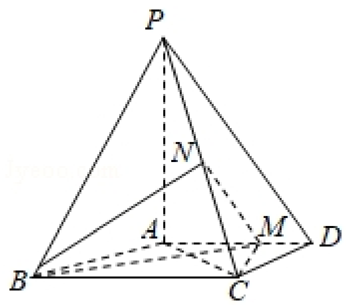
预测 2016 年我国生活垃圾无害化处理量为 1.82 亿吨.

【点评】本题考查的知识点是线性回归方程，回归分析，计算量比较大，计算时要细心.

19．（12 分）如图，四棱锥 P－ABCD 中，PA⊥底面 ABCD，AD∥BC，AB=AD=AC=3，PA=BC=4，M 为线段 AD 上一点，AM=2MD，N 为 PC 的中点.

（1）证明：MN∥平面 PAB；

（2）求直线 AN 与平面 PMN 所成角的正弦值.



【考点】LS：直线与平面平行；MI：直线与平面所成的角.

【专题】15：综合题；35：转化思想；44：数形结合法；5F：空间位置关系与距离；5G：空间角.

【分析】（1）法一、取 PB 中点 G，连接 AG，NG，由三角形的中位线定理可得

NG∥BC，且 NG=$\frac{1}{2}$BC，再由已知得 AM∥BC，且 AM=$\frac{1}{2}$BC，得到 NG∥AM，且 NG=AM，说明四边形 AMNG 为平行四边形，可得 NM∥AG，由线面平行的判定得到 MN∥平面 PAB；

法二、证明 MN∥平面 PAB，转化为证明平面 NEM∥平面 PAB，在△PAC 中，过 N 作 NE⊥AC，垂足为 E，连接 ME，由已知 PA⊥底面 ABCD，可得 PA∥NE，通过求解直角三角形得到 ME∥AB，由面面平行的判定可得平面 NEM∥平面 PAB，则结论得证；

（2）连接 CM，证得 CM⊥AD，进一步得到平面 PNM⊥平面 PAD，在平面 PAD 内，过 A 作 AF⊥PM，交 PM 于 F，连接 NF，则∠ANF 为直线 AN 与平面 PMN 所成角．然后求解直角三角形可得直线 AN 与平面 PMN 所成角的正弦值．

【解答】（1）证明：法一、如图，取 PB 中点 G，连接 AG，NG，

∵N 为 PC 的中点，

∴NG∥BC，且 NG=$\frac{1}{2}$BC，

又 AM=$\frac{2}{3}$AD=2，BC=4，且 AD∥BC，

∴AM∥BC，且 AM=$\frac{1}{2}$BC，

则 NG∥AM，且 NG=AM，

∴四边形 AMNG 为平行四边形，则 NM∥AG，

∵AG⊂平面 PAB，NM⊄平面 PAB，

∴MN∥平面 PAB；

法二、

在△PAC 中，过 N 作 NE⊥AC，垂足为 E，连接 ME，

在△ABC 中，由已知 AB=AC=3，BC=4，得 cos∠ACB=$\frac{4^2+3^2-3^2}{2\times4\times3}=\frac{2}{3}$，

∵AD∥BC，

∴cos∠EAM=$\frac{2}{3}$，则 sin∠EAM=$\frac{\sqrt{5}}{3}$，

在△EAM 中，

∵AM=$\frac{2}{3}$AD=2，AE=$\frac{1}{2}$AC=$\frac{3}{2}$，

由余弦定理得：EM=$\sqrt{AE^2+AM^2-2AE\cdot AM\cdot\cos\angle EAM}=\sqrt{\frac{9}{4}+4-2\times\frac{3}{2}\times2\times\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$，

$\therefore \cos\angle AEM=\dfrac{(\frac{3}{2})^2+(\frac{3}{2})^2-4}{2\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{9}$,

而在△ABC 中，$\cos\angle BAC=\dfrac{3^2+3^2-4^2}{2\times3\times3}=\dfrac{1}{9}$,

∴$\cos\angle AEM=\cos\angle BAC$，即$\angle AEM=\angle BAC$,

∴AB∥EM，则 EM∥平面 PAB.

由 PA⊥底面 ABCD，得 PA⊥AC，又 NE⊥AC,

∴NE∥PA，则 NE∥平面 PAB.

∵NE∩EM=E,

∴平面 NEM∥平面 PAB，则 MN∥平面 PAB；

（2）解：在△AMC 中，由 AM=2，AC=3，$\cos\angle MAC=\dfrac{2}{3}$，得 $CM^2=AC^2+AM^2-2AC\cdot AM\cdot\cos\angle MAC=9+4-2\times3\times2\times\dfrac{2}{3}=5$.

∴$AM^2+MC^2=AC^2$，则 AM⊥MC,

∵PA⊥底面 ABCD，PA⊂平面 PAD,

∴平面 ABCD⊥平面 PAD，且平面 ABCD∩平面 PAD=AD,

∴CM⊥平面 PAD，则平面 PNM⊥平面 PAD.

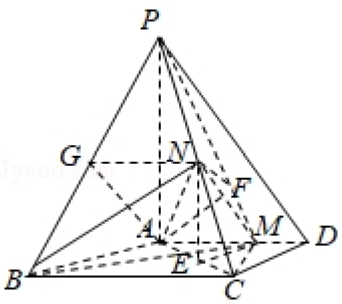
在平面 PAD 内，过 A 作 AF⊥PM，交 PM 于 F，连接 NF，则∠ANF 为直线 AN 与平面 PMN 所成角.

在 Rt△PAC 中，由 N 是 PC 的中点，得 $AN=\dfrac{1}{2}PC=\dfrac{1}{2}\sqrt{PA^2+PC^2}=\dfrac{5}{2}$,

在 Rt△PAM 中，由 PA•AM=PM•AF，得 $AF=\dfrac{PA\cdot AM}{PM}=\dfrac{4\times2}{\sqrt{4^2+2^2}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$,

∴$\sin\angle ANF=\dfrac{AF}{AN}=\dfrac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{\frac{5}{2}}=\dfrac{8\sqrt{5}}{25}$.

∴直线 AN 与平面 PMN 所成角的正弦值为$\dfrac{8\sqrt{5}}{25}$.



【点评】本题考查直线与平面平行的判定，考查直线与平面所成角的求法，考查数学转化思想方法，考查了空间想象能力和计算能力，是中档题．

20．（12 分）已知抛物线 C：$y^2=2x$ 的焦点为 F，平行于 x 轴的两条直线 l_1，l_2 分别交 C 于 A，B 两点，交 C 的准线于 P，Q 两点．

（Ⅰ）若 F 在线段 AB 上，R 是 PQ 的中点，证明 AR∥FQ；

（Ⅱ）若△PQF 的面积是△ABF 的面积的两倍，求 AB 中点的轨迹方程．

【考点】J3：轨迹方程；K8：抛物线的性质．

【专题】15：综合题；35：转化思想；49：综合法；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】（Ⅰ）连接 RF，PF，利用等角的余角相等，证明∠PRA=∠PQF，即可证明 AR∥FQ；

（Ⅱ）利用△PQF 的面积是△ABF 的面积的两倍，求出 N 的坐标，利用点差法求 AB 中点的轨迹方程．

【解答】（Ⅰ）证明：连接 RF，PF，

由 AP=AF，BQ=BF 及 AP∥BQ，得∠AFP+∠BFQ=90°，

∴∠PFQ=90°，

∵R 是 PQ 的中点，

∴RF=RP=RQ，

∴△PAR≌△FAR，

∴∠PAR=∠FAR，∠PRA=∠FRA，

∵∠BQF+∠BFQ=180°－∠QBF=∠PAF=2∠PAR，

∴∠FQB=∠PAR，

$\therefore \angle PRA=\angle PQF$，

$\therefore AR \parallel FQ$.

（Ⅱ）设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

F（$\frac{1}{2}$，0），准线为 $x=-\frac{1}{2}$，

$S_{\triangle PQF}=\frac{1}{2}|PQ|=\frac{1}{2}|y_1-y_2|$，

设直线 AB 与 x 轴交点为 N，

$\therefore S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}|FN||y_1-y_2|$，

$\because$ △PQF 的面积是△ABF 的面积的两倍，

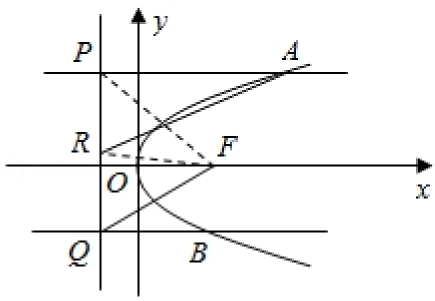
$\therefore 2|FN|=1$，$\therefore x_N=1$，即 N（1，0）.

设 AB 中点为 M（x，y），由 $\begin{cases}y_1^2=2x_1\\ y_2^2=2x_2\end{cases}$ 得 $y_1^2-y_2^2=2(x_1-x_2)$，

又 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y}{x-1}$，

$\therefore \frac{y}{x-1}=\frac{1}{y}$，即 $y^2=x-1$.

$\therefore$ AB 中点轨迹方程为 $y^2=x-1$.



【点评】本题考查抛物线的方程与性质，考查轨迹方程，考查学生的计算能力，属于中档题.

21．（12 分）设函数 f（x）=acos2x+（a－1）（cosx+1），其中 a＞0，记|f（x）|的最大值为 A.

（Ⅰ）求 f′（x）；

（Ⅱ）求 A；

（Ⅲ）证明：$|f'(x)|\leqslant 2A$．

【考点】6B：利用导数研究函数的单调性．

【专题】32：分类讨论；35：转化思想；4J：换元法；51：函数的性质及应用；53：导数的综合应用；56：三角函数的求值．

【分析】（Ⅰ）根据复合函数的导数公式进行求解即可求 $f'(x)$；

（Ⅱ）讨论 a 的取值，利用分类讨论的思想方法，结合换元法，以及一元二次函数的最值的性质进行求解；

（Ⅲ）由（I），结合绝对值不等式的性质即可证明：$|f'(x)|\leqslant 2A$．

【解答】（I）解：$f'(x)=-2a\sin 2x-(a-1)\sin x$．

（II）当 $a\geqslant 1$ 时，$|f(x)|=|a\cos 2x+(a-1)(\cos x+1)|\leqslant a|\cos 2x|+(a-1)|(\cos x+1)|\leqslant a|\cos 2x|+(a-1)(|\cos x|+1)|\leqslant a+2(a-1)=3a-2=f(0)$，因此 $A=3a-2$．

当 $0<a<1$ 时，$f(x)=a\cos 2x+(a-1)(\cos x+1)=2a\cos^2x+(a-1)\cos x-1$，

令 $g(t)=2at^2+(a-1)t-1$，

则 A 是 $|g(t)|$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值，$g(-1)=a$，$g(1)=3a-2$，

且当 $t=\frac{1-a}{4a}$ 时，$g(t)$ 取得极小值，极小值为 $g(\frac{1-a}{4a})=-\frac{(a-1)^2}{8a}-1=-\frac{a^2+6a+1}{8a}$，（二次函数在对称轴处取得极值）

令 $-1<\frac{1-a}{4a}<1$，得 $a<-\frac{1}{3}$（舍）或 $a>\frac{1}{5}$．

①当 $0<a\leqslant\frac{1}{5}$ 时，$g(t)$ 在 $(-1,1)$ 内无极值点，$|g(-1)|=a$，$|g(1)|=2-3a$，$|g(-1)|<|g(1)|$，

$\therefore A=2-3a$，

②当 $\frac{1}{5}<a<1$ 时，由 $g(-1)-g(1)=2(1-a)>0$，得 $g(-1)>g(1)>g(\frac{1-a}{4a})$，

又$|g(\frac{1-a}{4a})|-|g(-1)|=\frac{(1-a)(1+7a)}{8a}>0$，

$\therefore A=|g(\frac{1-a}{4a})|=\frac{a^2+6a+1}{8a}$，

综上，$A=\begin{cases}2-3a, & 0<a\leqslant\frac{1}{5}\\ \frac{a^2+6a+1}{8a}, & \frac{1}{5}<a<1\\ 3a-2, & a\geqslant 1\end{cases}$.

（III）证明：由（I）可得：$|f'(x)|=|-2a\sin 2x-(a-1)\sin x|\leqslant 2a+|a-1|$，

当$0<a\leqslant\frac{1}{5}$时，$|f'(x)|<1+a\leqslant 2-4a<2(2-3a)=2A$，

当$\frac{1}{5}<a<1$时，$A=\frac{a^2+6a+1}{8a}=\frac{a}{8}+\frac{1}{8a}+\frac{3}{4}>1$，

$\therefore |f'(x)|\leqslant 1+a\leqslant 2A$，

当$a\geqslant 1$时，$|f'(x)|\leqslant 3a-1\leqslant 6a-4=2A$，

综上：$|f'(x)|\leqslant 2A$.

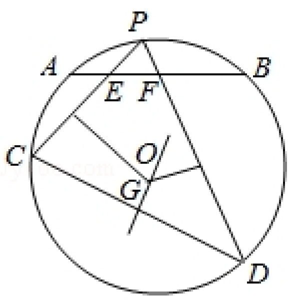
【点评】本题主要考查函数的导数以及函数最值的应用，求函数的导数，以及换元法，转化法转化为一元二次函数是解决本题的关键．综合性较强，难度较大．

请考生在第 22-24 题中任选一题做答，如果多做，则按所做的第一题计分.[选修 4-1：几何证明选讲]

22．（10 分）如图，⊙O 中$\overset{\frown}{AB}$的中点为 P，弦 PC，PD 分别交 AB 于 E，F 两点．

（1）若∠PFB=2∠PCD，求∠PCD 的大小；

（2）若 EC 的垂直平分线与 FD 的垂直平分线交于点 G，证明：OG⊥CD．



【考点】NC：与圆有关的比例线段.

【专题】35：转化思想；49：综合法；5M：推理和证明.

【分析】（1）连接 PA，PB，BC，设∠PEB=∠1，∠PCB=∠2，∠ABC=∠3，∠PBA=∠4，∠PAB=∠5，运用圆的性质和四点共圆的判断，可得 E，C，D，F 共圆，再由圆内接四边形的性质，即可得到所求∠PCD 的度数；

（2）运用圆的定义和 E，C，D，F 共圆，可得 G 为圆心，G 在 CD 的中垂线上，即可得证.

【解答】（1）解：连接 PB，BC，

设∠PEB=∠1，∠PCB=∠2，∠ABC=∠3，

∠PBA=∠4，∠PAB=∠5，

由⊙O 中$\overset{\frown}{AB}$的中点为 P，可得∠4=∠5，

在△EBC 中，∠1=∠2+∠3，

又∠D=∠3+∠4，∠2=∠5，

即有∠2=∠4，则∠D=∠1，

则四点 E，C，D，F 共圆，

可得∠EFD+∠PCD=180°，

由∠PFB=∠EFD=2∠PCD，

即有 3∠PCD=180°，

可得∠PCD=60°；

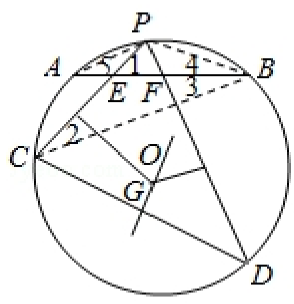
（2）证明：由 C，D，E，F 共圆，

由 EC 的垂直平分线与 FD 的垂直平分线交于点 G

可得 G 为圆心，即有 GC=GD，

则 G 在 CD 的中垂线，又 CD 为圆 G 的弦，

则 OG⊥CD.



【点评】本题考查圆内接四边形的性质和四点共圆的判断，以及圆的垂径定理的运用，考查推理能力，属于中档题.

[选修 4-4：坐标系与参数方程]

23．在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\alpha\\y=\sin\alpha\end{cases}$（α 为参数），以坐标原点为极点，以 x 轴的正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=2\sqrt{2}$.

（1）写出 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程；

（2）设点 P 在 C_1 上，点 Q 在 C_2 上，求|PQ|的最小值及此时 P 的直角坐标.

【考点】Q4：简单曲线的极坐标方程；QH：参数方程化成普通方程.

【专题】34：方程思想；48：分析法；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程；5S：坐标系和参数方程.

【分析】（1）运用两边平方和同角的平方关系，即可得到 C_1 的普通方程，运用 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，以及两角和的正弦公式，化简可得 C_2 的直角坐标方程；

（2）由题意可得当直线 $x+y-4=0$ 的平行线与椭圆相切时，|PQ|取得最值．设与直线 $x+y-4=0$ 平行的直线方程为 $x+y+t=0$，代入椭圆方程，运用判别式为 0，求得 t，再由平行线的距离公式，可得|PQ|的最小值，解方程可得 P 的直角坐标.

另外：设 P（$\sqrt{3}\cos\alpha$，$\sin\alpha$），由点到直线的距离公式，结合辅助角公式和正弦函数的值域，即可得到所求最小值和 P 的坐标.

【解答】解：（1）曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\alpha\\y=\sin\alpha\end{cases}$（α 为参数），

移项后两边平方可得 $\frac{x^2}{3}+y^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$，

即有椭圆 C_1：$\frac{x^2}{3}+y^2=1$；

曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=2\sqrt{2}$，

即有 $\rho(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta)=2\sqrt{2}$，

由 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，可得 $x+y-4=0$，

即有 C_2 的直角坐标方程为直线 $x+y-4=0$；

（2）由题意可得当直线 $x+y-4=0$ 的平行线与椭圆相切时，

$|PQ|$ 取得最值.

设与直线 $x+y-4=0$ 平行的直线方程为 $x+y+t=0$，

联立 $\begin{cases}x+y+t=0\\x^2+3y^2=3\end{cases}$ 可得 $4x^2+6tx+3t^2-3=0$，

由直线与椭圆相切，可得 $\triangle=36t^2-16(3t^2-3)=0$，

解得 $t=\pm2$，

显然 $t=-2$ 时，$|PQ|$ 取得最小值，

即有 $|PQ|=\dfrac{|-4-(-2)|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$，

此时 $4x^2-12x+9=0$，解得 $x=\dfrac{3}{2}$，

即为 P（$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{1}{2}$）.

另解：设 P（$\sqrt{3}\cos\alpha$，$\sin\alpha$），

由 P 到直线的距离为 $d=\dfrac{|\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha-4|}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{|2\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})-4|}{\sqrt{2}}$，

当 $\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{3})=1$ 时，$|PQ|$ 的最小值为 $\sqrt{2}$，

此时可取 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，即有 P（$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{1}{2}$）.

【点评】本题考查参数方程和普通方程的互化、极坐标和直角坐标的互化，同时考查直线与椭圆的位置关系，主要是相切，考查化简整理的运算能力，属于中档题.

[选修 4-5：不等式选讲]

24．已知函数 $f(x)=|2x-a|+a$.

（1）当 a=2 时，求不等式 f（x）≤6 的解集；

（2）设函数 g（x）=|2x－ 1|，当 x∈R 时，f（x）+g（x）≥3，求 a 的取值范围．

【考点】R5：绝对值不等式的解法．

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；59：不等式的解法及应用．

【分析】（1）当 a=2 时，由已知得|2x－ 2|+2≤6，由此能求出不等式 f（x）≤6 的解集．

（2）由 f（x）+g（x）=|2x－ 1|+|2x－ a|+a≥3，得$|x-\frac{1}{2}|+|x-\frac{a}{2}|\geq\frac{3-a}{2}$，由此能求出 a 的取值范围．

【解答】解：（1）当 a=2 时，f（x）=|2x－ 2|+2，

∵f（x）≤6，∴|2x－ 2|+2≤6，

|2x－ 2|≤4，|x－ 1|≤2，

∴－ 2≤x－ 1≤2，

解得－ 1≤x≤3，

∴不等式 f（x）≤6 的解集为{x|－ 1≤x≤3}．

（2）∵g（x）=|2x－ 1|，

∴f（x）+g（x）=|2x－ 1|+|2x－ a|+a≥3，

$2|x-\frac{1}{2}|+2|x-\frac{a}{2}|+a\geq3$，

$|x-\frac{1}{2}|+|x-\frac{a}{2}|\geq\frac{3-a}{2}$，

当 a≥3 时，成立，

当 a＜3 时，$|x-\frac{1}{2}|+|x-\frac{a}{2}|\geq\frac{1}{2}|a-1|\geq\frac{3-a}{2}>0$，

∴（a－ 1）^{2}≥（3－ a）^{2}，

解得 2≤a＜3，

∴a 的取值范围是[2，+∞）．

【点评】本题考查含绝对值不等式的解法，考查实数的取值范围的求法，是中档题，解题时要认真审题，注意不等式性质的合理运用.