

2015 年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标 II）

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分）

1. （5 分）已知集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x \mid (x-1)(x+2) < 0\}$,

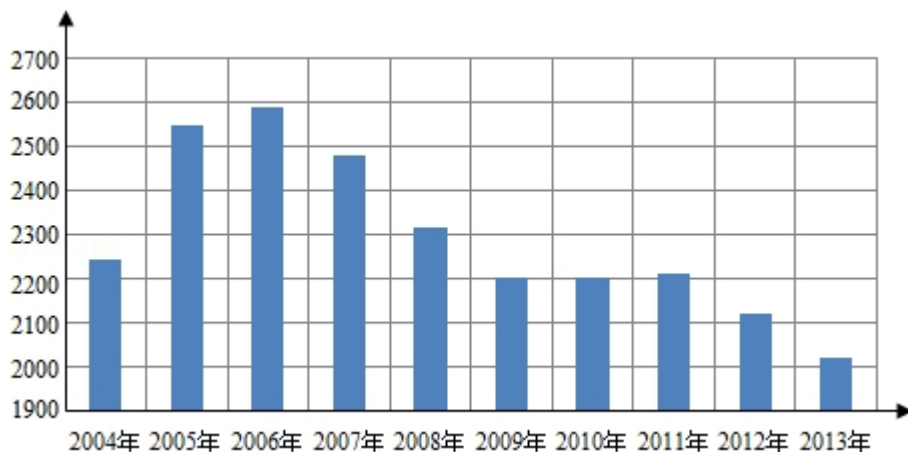
则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{-1, 0\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

2. （5 分）若 a 为实数，且 $(2+ai)(a-2i) = -4i$, 则 $a =$ ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

3. （5 分）根据如图给出的 2004 年至 2013 年我国二氧化硫年排放量（单位：万吨）柱形图，以下结论中不正确的是 ()



A. 逐年比较，2008 年减少二氧化硫排放量的效果最显著

B. 2007 年我国治理二氧化硫排放显现成效

C. 2006 年以来我国二氧化硫年排放量呈减少趋势

D. 2006 年以来我国二氧化硫年排放量与年份正相关

4. （5 分）已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$, $a_1+a_3+a_5=21$, 则 $a_3+a_5+a_7=$ ()

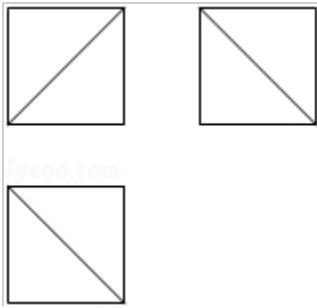
- A. 21 B. 42 C. 63 D. 84

5. （5 分）设函数 $f(x) = \begin{cases} 1+\log_2(2-x), & x < 1 \\ 2^{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}$, 则 $f(-2) + f(\log_2 12) =$ ()

- A. 3 B. 6 C. 9 D. 12

6. （5 分）一个正方体被一个平面截去一部分后，剩余部分的三视图如图，则

截去部分体积与剩余部分体积的比值为（ ）

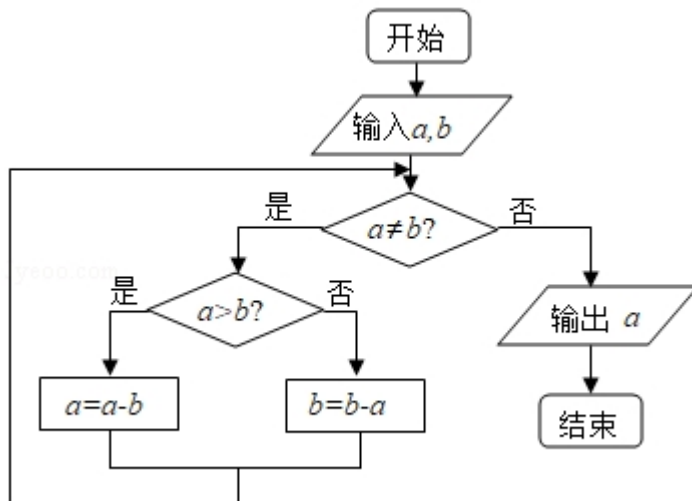


- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{7}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{5}$

7. (5分) 过三点 A (1, 3), B (4, 2), C (1, -7) 的圆交 y 轴于 M, N 两点, 则 $|MN| =$ ()

- A. $2\sqrt{6}$ B. 8 C. $4\sqrt{6}$ D. 10

8. (5分) 程序框图的算法思路源于我国古代数学名著《九章算术》中的“更相减损术”, 执行该程序框图, 若输入的 a, b 分别为 14, 18, 则输出的 a = ()

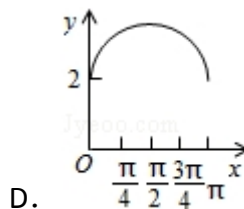
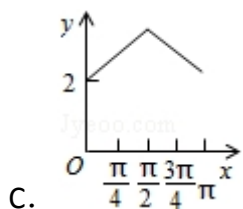
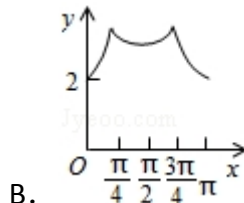
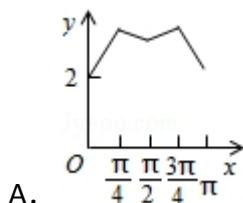
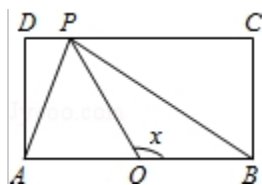


- A. 0 B. 2 C. 4 D. 14

9. (5分) 已知 A, B 是球 O 的球面上两点, $\angle AOB = 90^\circ$, C 为该球面上的动点, 若三棱锥 O-ABC 体积的最大值为 36, 则球 O 的表面积为 ()

- A. 36π B. 64π C. 144π D. 256π

10. (5分) 如图, 长方形 ABCD 的边 $AB=2$, $BC=1$, O 是 AB 的中点, 点 P 沿着边 BC, CD 与 DA 运动, 记 $\angle BOP = x$. 将动点 P 到 A, B 两点距离之和表示为 x 的函数 $f(x)$, 则 $y=f(x)$ 的图象大致为 ()



11. (5分) 已知 A, B 为双曲线 E 的左, 右顶点, 点 M 在 E 上, $\triangle ABM$ 为等腰三角形, 顶角为 120° , 则 E 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{5}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$

12. (5分) 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) 的导函数, $f(-1) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $xf'(x) - f(x) < 0$, 则使得 $f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ B. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
C. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ D. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

二、填空题 (共 4 小题, 每小题 5 分, 满分 20 分)

13. (5分) 设向量 \vec{a}, \vec{b} 不平行, 向量 $\lambda \vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 平行, 则实数 $\lambda =$ _____.

14. (5分) 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+1 \geq 0 \\ x-2y \leq 0 \\ x+2y-2 \leq 0 \end{cases}$, 则 $z=x+y$ 的最大值为 _____.

15. (5分) $(a+x)(1+x)^4$ 的展开式中 x 的奇数次幂项的系数之和为 32, 则 $a =$ _____.

16. (5分) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = -1$, $a_{n+1} = S_{n+1}S_n$, 则 $S_n =$ _____.

三、解答题（共 5 小题，满分 60 分）

17. （12 分） $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 上的点，AD 平分 $\angle BAC$ ， $\triangle ABD$ 面积是 $\triangle ADC$ 面积的 2 倍.

- (1) 求 $\frac{\sin B}{\sin C}$;
- (2) 若 $AD=1$ ， $DC=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，求 BD 和 AC 的长.

18. （12 分）某公司为了了解用户对其产品的满意度，从 A，B 两地区分别随机调查了 20 个用户，得到用户对产品的满意度评分如下：

A 地区：62 73 81 92 95 85 74 64 53 76
78 86 95 66 97 78 88 82 76 89

B 地区：73 83 62 51 91 46 53 73 64 82
93 48 65 81 74 56 54 76 65 79

- (1) 根据两组数据完成两地区用户满意度评分的茎叶图，并通过茎叶图比较两地区满意度评分的平均值及分散程度（不要求计算出具体值，给出结论即可）；
- (2) 根据用户满意度评分，将用户的满意度从低到高分三个等级：

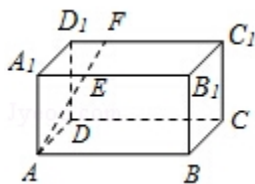
满意度评分	低于 70 分	70 分到 89 分	不低于 90 分
满意度等级	不满意	满意	非常满意

记事件 C：“A 地区用户的满意度等级高于 B 地区用户的满意度等级”，假设两地区用户的评价结果相互独立，根据所给数据，以事件发生的频率作为相应事件发生的概率，求 C 的概率.

A地区		B地区
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	

19. (12分) 如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=16$, $BC=10$, $AA_1=8$, 点 E , F 分别在 A_1B_1 , D_1C_1 上, $A_1E=D_1F=4$, 过点 E , F 的平面 α 与此长方体的面相交, 交线围成一个正方形.

- (1) 在图中画出这个正方形 (不必说明画法和理由);
- (2) 求直线 AF 与平面 α 所成角的正弦值.



20. (12分) 已知椭圆 $C: 9x^2+y^2=m^2$ ($m>0$), 直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴, l 与 C 有两个交点 A , B , 线段 AB 的中点为 M .

- (1) 证明: 直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值;
- (2) 若 l 过点 $(\frac{m}{3}, m)$, 延长线段 OM 与 C 交于点 P , 四边形 $OAPB$ 能否为平行四边形? 若能, 求此时 l 的斜率; 若不能, 说明理由.

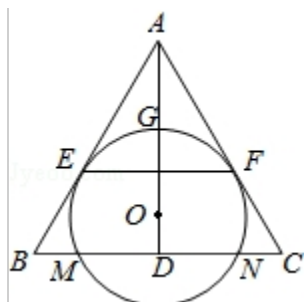
21. (12分) 设函数 $f(x) = e^{mx} + x^2 - mx$.

- (1) 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增;
- (2) 若对于任意 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq e - 1$, 求 m 的取值范围.

四、选做题.选修 4-1: 几何证明选讲

22. (10 分) 如图, O 为等腰三角形 ABC 内一点, $\odot O$ 与 $\triangle ABC$ 的底边 BC 交于 M, N 两点, 与底边上的高 AD 交于点 G , 且与 AB, AC 分别相切于 E, F 两点.

- (1) 证明: $EF \parallel BC$;
- (2) 若 AG 等于 $\odot O$ 的半径, 且 $AE = MN = 2\sqrt{3}$, 求四边形 $EBCF$ 的面积.



选修 4-4: 坐标系与参数方程

23. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C_1: \begin{cases} x = t \cos \alpha \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数, $t \neq 0$), 其中 $0 \leq \alpha \leq \pi$, 在以 O 为极点, x 轴正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 $C_2: \rho = 2 \sin \theta$, $C_3: \rho = 2\sqrt{3} \cos \theta$.

- (1) 求 C_2 与 C_3 交点的直角坐标;

(2) 若 C_1 与 C_2 相交于点 A, C_1 与 C_3 相交于点 B, 求 $|AB|$ 的最大值.

选修 4-5: 不等式选讲

24. 设 a, b, c, d 均为正数, 且 $a+b=c+d$, 证明:

(1) 若 $ab > cd$, 则 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$;

(2) $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$ 是 $|a - b| < |c - d|$ 的充要条件.

2015 年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标 II）

参考答案与试题解析

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分）

1. （5 分）已知集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x \mid (x-1)(x+2) < 0\}$,

则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{-1, 0\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

【考点】1E: 交集及其运算.

【专题】5J: 集合.

【分析】解一元二次不等式，求出集合 B，然后进行交集的运算即可.

【解答】解： $B = \{x \mid -2 < x < 1\}$, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$;

$\therefore A \cap B = \{-1, 0\}$.

故选：A.

【点评】考查列举法、描述法表示集合，解一元二次不等式，以及交集的运算.

2. （5 分）若 a 为实数，且 $(2+ai)(a-2i) = -4i$ ，则 $a =$ ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

【考点】A1: 虚数单位 i、复数.

【专题】5N: 数系的扩充和复数.

【分析】首先将坐标展开，然后利用复数相等解之.

【解答】解：因为 $(2+ai)(a-2i) = -4i$ ，所以 $4a + (a^2 - 4)i = -4i$,

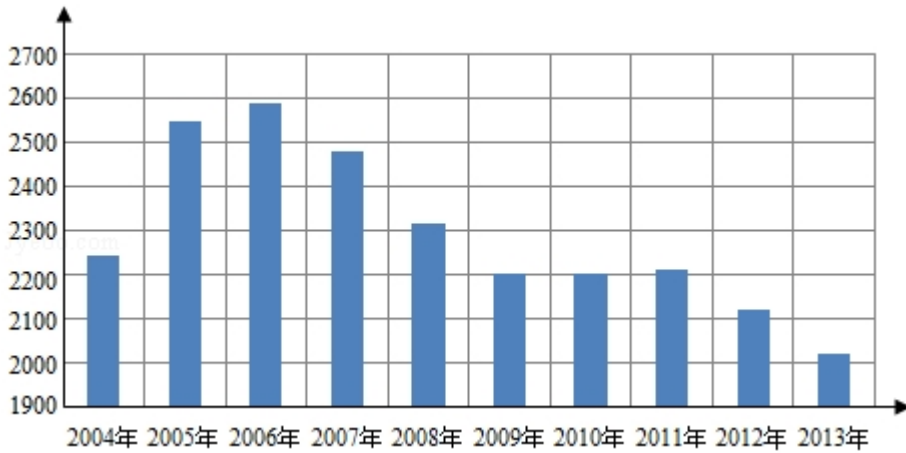
$4a = 0$ ，并且 $a^2 - 4 = -4$,

所以 $a = 0$;

故选：B.

【点评】 本题考查了复数的运算以及复数相等的条件，熟记运算法则以及复数相等的条件是关键.

3. （5 分）根据如图给出的 2004 年至 2013 年我国二氧化硫年排放量（单位：万吨）柱形图，以下结论中不正确的是（ ）



- A. 逐年比较，2008 年减少二氧化硫排放量的效果最显著
- B. 2007 年我国治理二氧化硫排放显现成效
- C. 2006 年以来我国二氧化硫年排放量呈减少趋势
- D. 2006 年以来我国二氧化硫年排放量与年份正相关

【考点】 B8： 频率分布直方图.

【专题】 5I： 概率与统计.

【分析】 A 从图中明显看出 2008 年二氧化硫排放量比 2007 年的二氧化硫排放量减少的最多，故 A 正确；

B 从 2007 年开始二氧化硫排放量变少，故 B 正确；

C 从图中看出，2006 年以来我国二氧化硫年排放量越来越少，故 C 正确；

D2006 年以来我国二氧化硫年排放量越来越少，与年份负相关，故 D 错误.

【解答】 解： A 从图中明显看出 2008 年二氧化硫排放量比 2007 年的二氧化硫排放量明显减少，且减少的最多，故 A 正确；

B2004– 2006 年二氧化硫排放量越来越多，从 2007 年开始二氧化硫排放量变少

，故 B 正确；

C 从图中看出，2006 年以来我国二氧化硫年排放量越来越少，故 C 正确；

D 2006 年以来我国二氧化硫年排放量越来越少，而不是与年份正相关，故 D 错误。

故选：D.

【点评】本题考查了学生识图的能力，能够从图中提取出所需要的信息，属于基础题。

4. (5 分) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$ ， $a_1+a_3+a_5=21$ ，则 $a_3+a_5+a_7=$ ()

A. 21

B. 42

C. 63

D. 84

【考点】88：等比数列的通项公式.

【专题】11：计算题；54：等差数列与等比数列.

【分析】由已知， $a_1=3$ ， $a_1+a_3+a_5=21$ ，利用等比数列的通项公式可求 q ，然后在代入等比数列通项公式即可求.

【解答】解：∵ $a_1=3$ ， $a_1+a_3+a_5=21$ ，

$$\therefore a_1(1+q^2+q^4)=21,$$

$$\therefore q^4+q^2+1=7,$$

$$\therefore q^4+q^2-6=0,$$

$$\therefore q^2=2,$$

$$\therefore a_3+a_5+a_7=a_1(q^2+q^4+q^6)=3 \times (2+4+8)=42.$$

故选：B.

【点评】本题主要考查了等比数列通项公式的应用，属于基础试题.

5. (5 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1+\log_2(2-x), & x < 1 \\ 2^{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}$ ，则 $f(-2)+f(\log_2 12)=$ ()

A. 3

B. 6

C. 9

D. 12

【考点】3T：函数的值.

【专题】11：计算题；51：函数的性质及应用.

【分析】先求 $f(-2) = 1 + \log_2(2+2) = 1+2=3$ ，再由对数恒等式，求得 $f(\log_2 12)$ $=6$ ，进而得到所求和.

【解答】解：函数 $f(x) = \begin{cases} 1 + \log_2(2-x), & x < 1 \\ 2^{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}$,

即有 $f(-2) = 1 + \log_2(2+2) = 1+2=3$,

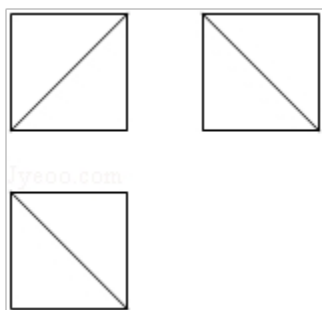
$f(\log_2 12) = 2^{\log_2 12 - 1} = 2^{\log_2 12} \times \frac{1}{2} = 12 \times \frac{1}{2} = 6$,

则有 $f(-2) + f(\log_2 12) = 3+6=9$.

故选：C.

【点评】本题考查分段函数的求值，主要考查对数的运算性质，属于基础题.

6. (5分) 一个正方体被一个平面截去一部分后，剩余部分的三视图如图，则截去部分体积与剩余部分体积的比值为 ()



A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{7}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{5}$

【考点】L1：由三视图求面积、体积.

【专题】11：计算题；5F：空间位置关系与距离.

【分析】由三视图判断，正方体被切掉的部分为三棱锥，把相关数据代入棱锥的体积公式计算即可.

【解答】解：设正方体的棱长为 1，由三视图判断，正方体被切掉的部分为三棱

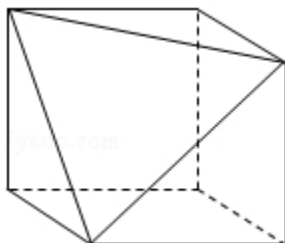
锥，

∴ 正方体切掉部分的体积为 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{6}$ ，

∴ 剩余部分体积为 $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ ，

∴ 截去部分体积与剩余部分体积的比值为 $\frac{1}{5}$ 。

故选：D。



【点评】本题考查了由三视图判断几何体的形状，求几何体的体积。

7. (5 分) 过三点 A (1, 3)，B (4, 2)，C (1, - 7) 的圆交 y 轴于 M, N

两点，则 |MN| = ()

A. $2\sqrt{6}$

B. 8

C. $4\sqrt{6}$

D. 10

【考点】IR：两点间的距离公式。

【专题】11：计算题；5B：直线与圆。

【分析】设圆的方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ，代入点的坐标，求出 D, E, F，令 $x=0$ ，即可得出结论。

【解答】解：设圆的方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ，则
$$\begin{cases} 1+9+D+3E+F=0 \\ 16+4+4D+2E+F=0, \\ 1+49+D-7E+F=0 \end{cases}$$

∴ $D=-2$ ， $E=4$ ， $F=-20$ ，

∴ $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ ，

令 $x=0$ ，可得 $y^2 + 4y - 20 = 0$ ，

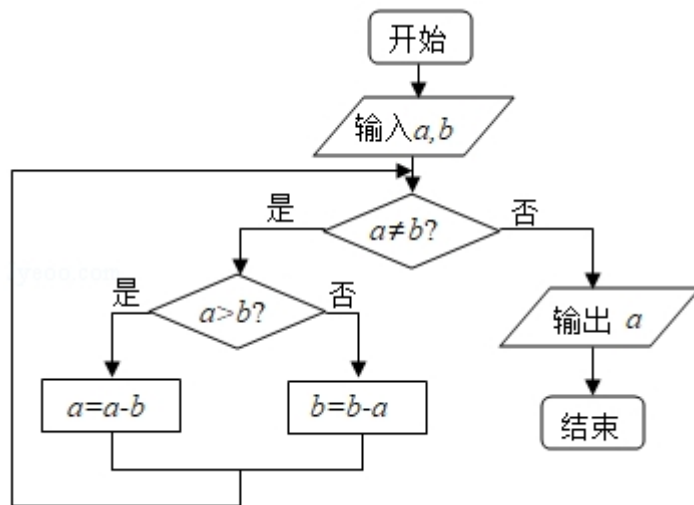
∴ $y = -2 \pm 2\sqrt{6}$ ，

∴ $|MN| = 4\sqrt{6}$ 。

故选：C。

【点评】 本题考查圆的方程，考查学生的计算能力，确定圆的方程是关键.

8. (5 分) 程序框图的算法思路源于我国古代数学名著《九章算术》中的“更相减损术”，执行该程序框图，若输入的 a, b 分别为 14, 18, 则输出的 $a =$ ()



- A. 0 B. 2 C. 4 D. 14

【考点】 EF: 程序框图.

【专题】 5K: 算法和程序框图.

【分析】 由循环结构的特点，先判断，再执行，分别计算出当前的 a, b 的值，即可得到结论.

【解答】 解：由 $a=14, b=18, a < b$,

则 b 变为 $18 - 14 = 4$,

由 $a > b$, 则 a 变为 $14 - 4 = 10$,

由 $a > b$, 则 a 变为 $10 - 4 = 6$,

由 $a > b$, 则 a 变为 $6 - 4 = 2$,

由 $a < b$, 则 b 变为 $4 - 2 = 2$,

由 $a = b = 2$,

则输出的 $a = 2$.

故选：B.

【点评】 本题考查算法和程序框图，主要考查循环结构的理解和运用，以及赋值语句的运用，属于基础题.

9. (5 分) 已知 A, B 是球 O 的球面上两点, $\angle AOB=90^\circ$, C 为该球面上的动点, 若三棱锥 $O-ABC$ 体积的最大值为 36, 则球 O 的表面积为 ()
- A. 36π B. 64π C. 144π D. 256π

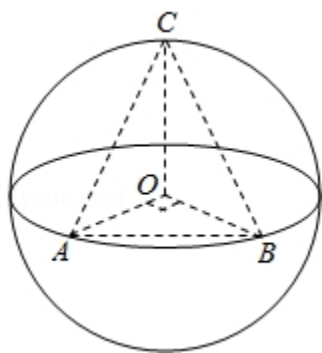
【考点】 LG: 球的体积和表面积.

【专题】 11: 计算题; 5F: 空间位置关系与距离.

【分析】 当点 C 位于垂直于面 AOB 的直径端点时, 三棱锥 $O-ABC$ 的体积最大, 利用三棱锥 $O-ABC$ 体积的最大值为 36, 求出半径, 即可求出球 O 的表面积.

【解答】 解: 如图所示, 当点 C 位于垂直于面 AOB 的直径端点时, 三棱锥 $O-ABC$ 的体积最大, 设球 O 的半径为 R , 此时 $V_{O-ABC}=V_{C-AOB}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times R^2\times R=\frac{1}{6}R^3=36$, 故 $R=6$, 则球 O 的表面积为 $4\pi R^2=144\pi$,

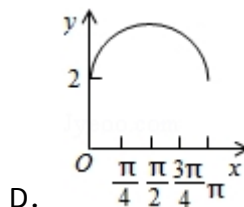
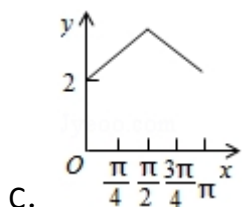
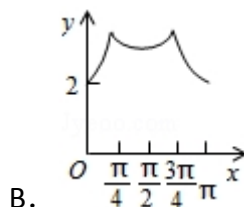
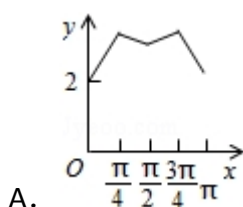
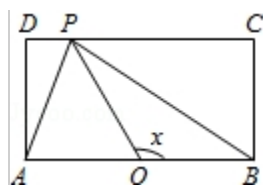
故选: C.



【点评】 本题考查球的半径与表面积, 考查体积的计算, 确定点 C 位于垂直于面 AOB 的直径端点时, 三棱锥 $O-ABC$ 的体积最大是关键.

10. (5 分) 如图, 长方形 $ABCD$ 的边 $AB=2$, $BC=1$, O 是 AB 的中点, 点 P 沿着

边 BC, CD 与 DA 运动, 记 $\angle BOP=x$. 将动点 P 到 A, B 两点距离之和表示为 x 的函数 $f(x)$, 则 $y=f(x)$ 的图象大致为 ()

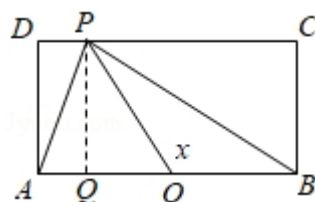


【考点】HC: 正切函数的图象.

【分析】根据函数图象关系, 利用排除法进行求解即可.

【解答】解: 当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 时, $BP = \tan x$, $AP = \sqrt{AB^2 + BP^2} = \sqrt{4 + \tan^2 x}$,

此时 $f(x) = \sqrt{4 + \tan^2 x} + \tan x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, 此时单调递增,



当 P 在 CD 边上运动时, $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ 且 $x \neq \frac{\pi}{2}$ 时,

如图所示, $\tan \angle POB = \tan(\pi - \angle POQ) = \tan x = -\tan \angle POQ = -\frac{PQ}{OQ} = -\frac{1}{OQ}$,

$$\therefore OQ = -\frac{1}{\tan x},$$

$$\therefore PD = AO - OQ = 1 + \frac{1}{\tan x}, \quad PC = BO + OQ = 1 - \frac{1}{\tan x},$$

$$\therefore PA + PB = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\tan x}\right)^2 + 1} + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\tan x}\right)^2 + 1},$$

当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $PA + PB = 2\sqrt{2}$,

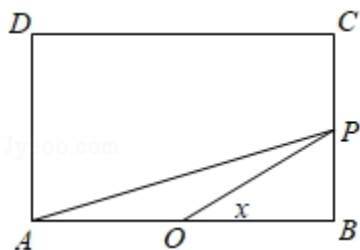
当 P 在 AD 边上运动时, $\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi$, $PA+PB=\sqrt{4+\tan^2 x}-\tan x$,

由对称性可知函数 $f(x)$ 关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称,

且 $f(\frac{\pi}{4}) > f(\frac{\pi}{2})$, 且轨迹为非线型,

排除 A, C, D,

故选: B.



【点评】 本题主要考查函数图象的识别和判断, 根据条件先求出 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 时的解析式是解决本题的关键.

11. (5 分) 已知 A, B 为双曲线 E 的左, 右顶点, 点 M 在 E 上, $\triangle ABM$ 为等腰三角形, 顶角为 120° , 则 E 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{5}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$

【考点】 KC: 双曲线的性质.

【专题】 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】 设 M 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左支上, 由题意可得 M 的坐标为 $(-2a,$

$\sqrt{3}a)$, 代入双曲线方程可得 $a=b$, 再由离心率公式即可得到所求值.

【解答】 解: 设 M 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左支上,

且 $MA=AB=2a$, $\angle MAB=120^\circ$,

则 M 的坐标为 $(-2a, \sqrt{3}a)$,

代入双曲线方程可得,

$$\frac{4a^2}{a^2} - \frac{3a^2}{b^2} = 1,$$

可得 $a=b$,

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}a,$$

$$\text{即有 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}.$$

故选: D.

【点评】 本题考查双曲线的方程和性质, 主要考查双曲线的离心率的求法, 运用任意角的三角函数的定义求得 M 的坐标是解题的关键.

12. (5 分) 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) 的导函数, $f(-1) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $xf'(x) - f(x) < 0$, 则使得 $f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是()

A. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ B. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

C. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ D. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

【考点】 6B: 利用导数研究函数的单调性.

【专题】 2: 创新题型; 51: 函数的性质及应用; 53: 导数的综合应用.

【分析】 由已知当 $x > 0$ 时总有 $xf'(x) - f(x) < 0$ 成立, 可判断函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 为减函数, 由已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数, 可证明 $g(x)$ 为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的偶函数, 根据函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性和奇偶性, 模拟 $g(x)$ 的图象, 而不等式 $f(x) > 0$ 等价于 $x \cdot g(x) > 0$, 数形结合解不等式组即可.

【解答】 解: 设 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 则 $g(x)$ 的导数为: $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$,

\therefore 当 $x > 0$ 时总有 $xf'(x) < f(x)$ 成立,

即当 $x > 0$ 时, $g'(x)$ 恒小于 0,

\therefore 当 $x > 0$ 时, 函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 为减函数,

又 $\because g(-x) = \frac{f(-x)}{-x} = -\frac{f(x)}{-x} = \frac{f(x)}{x} = g(x)$,

∴函数 $g(x)$ 为定义域上的偶函数

$$\text{又} \because g(-1) = \frac{f(-1)}{-1} = 0,$$

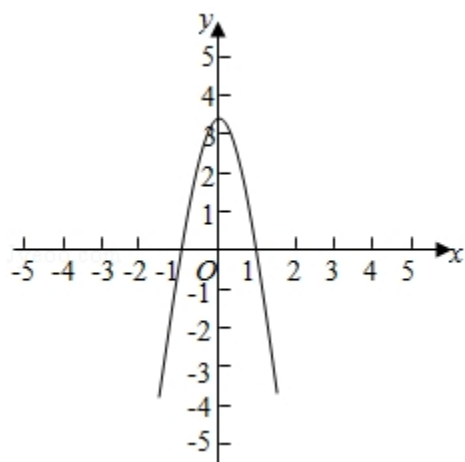
∴函数 $g(x)$ 的图象性质类似如图：

数形结合可得，不等式 $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \cdot g(x) > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases},$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 1 \text{ 或 } x < -1.$$

故选：A.



【点评】 本题主要考查了利用导数判断函数的单调性，并由函数的奇偶性和单调性解不等式，属于综合题.

二、填空题（共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分）

13. （5 分）设向量 \vec{a} , \vec{b} 不平行，向量 $\lambda \vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 平行，则实数 $\lambda = \underline{-\frac{1}{2}}$.

【考点】 96：平行向量（共线）.

【专题】 11：计算题；34：方程思想；40：定义法；5A：平面向量及应用.

【分析】 利用向量平行的条件直接求解.

【解答】 解：∵ 向量 \vec{a} , \vec{b} 不平行，向量 $\lambda \vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 平行，

$$\therefore \lambda \vec{a} + \vec{b} = t(\vec{a} + 2\vec{b}) = t\vec{a} + 2t\vec{b},$$

$$\therefore \begin{cases} \lambda = t \\ 1 = 2t \end{cases}, \text{解得实数 } \lambda = \frac{1}{2}.$$

故答案为: $\frac{1}{2}$.

【点评】本题考查实数值的解法，考查平面向量平行的条件及应用，考查推理论证能力、运算求解能力，考查化归与转化思想、函数与方程思想，是基础题.

14. (5分) 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+1 \geq 0 \\ x-2y \leq 0 \\ x+2y-2 \leq 0 \end{cases}$, 则 $z=x+y$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$.

【考点】7C: 简单线性规划.

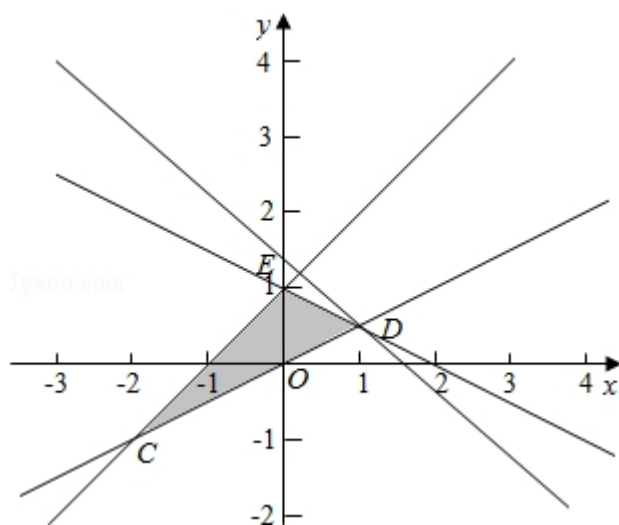
【专题】59: 不等式的解法及应用.

【分析】首先画出平面区域，然后将目标函数变形为直线的斜截式，求在 y 轴的截距最大值.

【解答】解: 不等式组表示的平面区域如图阴影部分，当直线经过 D 点时， z 最大，

$$\text{由 } \begin{cases} x-2y=0 \\ x+2y-2=0 \end{cases} \text{ 得 } D(1, \frac{1}{2}),$$

所以 $z=x+y$ 的最大值为 $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$;



故答案为: $\frac{3}{2}$.

【点评】 本题考查了简单线性规划；一般步骤是：①画出平面区域；②分析目标函数，确定求最值的条件.

15. (5 分) $(a+x)(1+x)^4$ 的展开式中 x 的奇数次幂项的系数之和为 32, 则 $a=$ 3 .

【考点】 DA: 二项式定理.

【专题】 11: 计算题; 5P: 二项式定理.

【分析】 给展开式中的 x 分别赋值 1, -1, 可得两个等式, 两式相减, 再除以 2 得到答案.

【解答】 解: 设 $f(x) = (a+x)(1+x)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_5x^5$,

令 $x=1$, 则 $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_5 = f(1) = 16(a+1)$, ①

令 $x=-1$, 则 $a_0 - a_1 + a_2 - \dots - a_5 = f(-1) = 0$. ②

①- ②得, $2(a_1 + a_3 + a_5) = 16(a+1)$,

所以 $2 \times 32 = 16(a+1)$,

所以 $a=3$.

故答案为: 3.

【点评】 本题考查解决展开式的系数和问题时, 一般先设出展开式, 再用赋值法代入特殊值, 相加或相减.

16. (5 分) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = -1$, $a_{n+1} = S_{n+1}S_n$, 则 $S_n =$ $-\frac{1}{n}$.

【考点】 8H: 数列递推式.

【专题】 54: 等差数列与等比数列.

【分析】 通过 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ 可知 $S_{n+1} - S_n = S_{n+1}S_n$, 两边同时除以 $S_{n+1}S_n$ 可知 $\frac{1}{S_{n+1}} - \frac{1}{S_n} = 1$, 进而可知数列 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 是以首项、公差均为 -1 的等差数列, 计算即得

结论.

【解答】解：∵ $a_{n+1}=S_{n+1}S_n$,

$$\therefore S_{n+1} - S_n = S_{n+1}S_n,$$

$$\therefore \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} = 1,$$

$$\text{又} \because a_1 = -1, \text{ 即 } \frac{1}{S_1} = -1,$$

∴数列 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 是以首项是 -1 、公差为 -1 的等差数列,

$$\therefore \frac{1}{S_n} = -n,$$

$$\therefore S_n = -\frac{1}{n},$$

故答案为: $-\frac{1}{n}$.

【点评】本题考查数列的通项,对表达式的灵活变形是解决本题的关键,注意解题方法的积累,属于中档题.

三、解答题(共5小题,满分60分)

17. (12分) $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 上的点, AD 平分 $\angle BAC$, $\triangle ABD$ 面积是 $\triangle ADC$ 面积的 2 倍.

(1) 求 $\frac{\sin B}{\sin C}$;

(2) 若 $AD=1$, $DC=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 BD 和 AC 的长.

【考点】HP: 正弦定理; HT: 三角形中的几何计算.

【专题】58: 解三角形.

【分析】(1) 如图, 过 A 作 $AE \perp BC$ 于 E , 由已知及面积公式可得 $BD=2DC$, 由

$$AD \text{ 平分 } \angle BAC \text{ 及正弦定理可得 } \sin \angle B = \frac{AD \times \sin \angle BAD}{BD}, \sin \angle C = \frac{AD \times \sin \angle DAC}{DC}$$

, 从而得解 $\frac{\sin \angle B}{\sin \angle C}$.

(2) 由 (1) 可求 $BD=\sqrt{2}$. 过 D 作 $DM \perp AB$ 于 M , 作 $DN \perp AC$ 于 N , 由 AD 平分 $\angle BAC$, 可求 $AB=2AC$, 令 $AC=x$, 则 $AB=2x$, 利用余弦定理即可解得 BD 和 AC 的长.

【解答】解：（1）如图，过 A 作 $AE \perp BC$ 于 E，

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2}BD \times AE}{\frac{1}{2}DC \times AE} = 2$$

$$\therefore BD = 2DC,$$

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$

$$\therefore \angle BAD = \angle DAC$$

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 中, } \frac{BD}{\sin \angle BAD} = \frac{AD}{\sin \angle B}, \therefore \sin \angle B = \frac{AD \times \sin \angle BAD}{BD}$$

$$\text{在 } \triangle ADC \text{ 中, } \frac{DC}{\sin \angle DAC} = \frac{AD}{\sin \angle C}, \therefore \sin \angle C = \frac{AD \times \sin \angle DAC}{DC};$$

$$\therefore \frac{\sin \angle B}{\sin \angle C} = \frac{DC}{BD} = \frac{1}{2}. \dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } BD = 2DC = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

过 D 作 $DM \perp AB$ 于 M，作 $DN \perp AC$ 于 N，

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$$\therefore DM = DN,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2}AB \times DM}{\frac{1}{2}AC \times DN} = 2,$$

$$\therefore AB = 2AC,$$

令 $AC = x$ ，则 $AB = 2x$ ，

$$\because \angle BAD = \angle DAC,$$

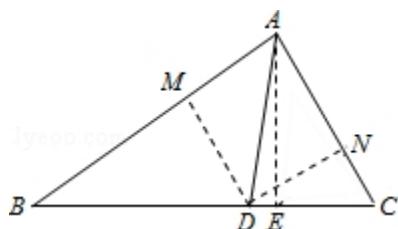
$$\therefore \cos \angle BAD = \cos \angle DAC,$$

$$\therefore \text{由余弦定理可得: } \frac{(2x)^2 + 1^2 - (\sqrt{2})^2}{2 \times 2x \times 1} = \frac{x^2 + 1^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{2 \times x \times 1},$$

$$\therefore x = 1,$$

$$\therefore AC = 1,$$

$$\therefore BD \text{ 的长为 } \sqrt{2}, AC \text{ 的长为 } 1.$$



【点评】本题主要考查了三角形面积公式，正弦定理，余弦定理等知识的应用，属于基本知识的考查.

18. (12 分) 某公司为了了解用户对其产品的满意度，从 A, B 两地区分别随机调查了 20 个用户，得到用户对产品的满意度评分如下：

A 地区：62 73 81 92 95 85 74 64 53 76

78 86 95 66 97 78 88 82 76 89

B 地区：73 83 62 51 91 46 53 73 64 82

93 48 65 81 74 56 54 76 65 79

(1) 根据两组数据完成两地区用户满意度评分的茎叶图，并通过茎叶图比较两地区满意度评分的平均值及分散程度（不要求计算出具体值，给出结论即可）；

(2) 根据用户满意度评分，将用户的满意度从低到高分三个等级：

满意度评分	低于 70 分	70 分到 89 分	不低于 90 分
满意度等级	不满意	满意	非常满意

记事件 C: “A 地区用户的满意度等级高于 B 地区用户的满意度等级”，假设两地区用户的评价结果相互独立，根据所给数据，以事件发生的频率作为相应事件发生的概率，求 C 的概率.

A地区	B地区
4	
5	
6	
7	
8	
9	

【考点】BA: 茎叶图；CB: 古典概型及其概率计算公式.

【专题】51：概率与统计.

【分析】（1）根据茎叶图的画法，以及有关茎叶图的知识，比较即可；

（2）根据概率的互斥和对立，以及概率的运算公式，计算即可.

【解答】解：（1）两地区用户满意度评分的茎叶图如下

A地区						B地区				
					4	6 8				
3					5	1 3 4 6				
6 4 2					6	2 4 5 5				
6 8 8 6 4 3					7	3 3 4 6 9				
9 8 6 5 2 1					8	1 2 3				
7 5 5 2					9	1 3				

通过茎叶图可以看出，A 地区用户满意评分的平均值高于 B 地区用户满意评分的平均值；A 地区用户满意度评分比较集中，B 地区用户满意度评分比较分散；

（2）记 C_{A1} 表示事件“A 地区用户满意度等级为满意或非常满意”，

记 C_{A2} 表示事件“A 地区用户满意度等级为非常满意”，

记 C_{B1} 表示事件“B 地区用户满意度等级为不满意”，

记 C_{B2} 表示事件“B 地区用户满意度等级为满意”，

则 C_{A1} 与 C_{B1} 独立， C_{A2} 与 C_{B2} 独立， C_{B1} 与 C_{B2} 互斥，

则 $C=C_{A1}C_{B1} \cup C_{A2}C_{B2}$ ，

$P(C) = P(C_{A1}C_{B1}) + P(C_{A2}C_{B2}) = P(C_{A1})P(C_{B1}) + P(C_{A2})P(C_{B2})$ ，

由所给的数据 C_{A1} ， C_{A2} ， C_{B1} ， C_{B2} ，发生的频率为 $\frac{16}{20}$ ， $\frac{4}{20}$ ， $\frac{10}{20}$ ， $\frac{8}{20}$ ，

所以 $P(C_{A1}) = \frac{16}{20}$ ， $P(C_{A2}) = \frac{4}{20}$ ， $P(C_{B1}) = \frac{10}{20}$ ， $P(C_{B2}) = \frac{8}{20}$ ，

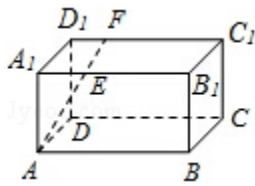
所以 $P(C) = \frac{16}{20} \times \frac{10}{20} + \frac{4}{20} \times \frac{8}{20} = 0.48$.

【点评】本题考查了茎叶图，概率的互斥与对立，用频率来估计概率，属于中档题.

19. （12 分）如图，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=16$ ， $BC=10$ ， $AA_1=8$ ，点 E，

F 分别在 A_1B_1 ， D_1C_1 上， $A_1E=D_1F=4$ ，过点 E，F 的平面 α 与此长方体的面相交，交线围成一个正方形.

- (1) 在图中画出这个正方形（不必说明画法和理由）；
 (2) 求直线 AF 与平面 α 所成角的正弦值.



【考点】MI：直线与平面所成的角.

【专题】5G：空间角；5H：空间向量及应用.

【分析】(1) 容易知道所围成正方形的边长为 10，再结合长方体各边的长度，即可找出正方形的位置，从而画出这个正方形；

(2) 分别以直线 DA, DC, DD₁ 为 x, y, z 轴，建立空间直角坐标系，考虑用空间向量解决本问，能够确定 A, H, E, F 几点的坐标. 设平面 EFGH 的法向量为 $\vec{n}=(x, y, z)$ ，根据 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{EH}=0 \\ \vec{n} \cdot \vec{EF}=0 \end{cases}$ 即可求出法向量 \vec{n} ， \vec{AF} 坐标可以求出，可设

直线 AF 与平面 EFGH 所成角为 θ ，由 $\sin\theta=|\cos\langle \vec{n}, \vec{AF} \rangle|$ 即可求得直线 AF

与平面 α 所成角的正弦值.

【解答】解：(1) 交线围成的正方形 EFGH 如图：

(2) 作 $EM \perp AB$ ，垂足为 M，则：

$$EH=EF=BC=10, EM=AA_1=8;$$

$$\therefore MH=\sqrt{EH^2-EM^2}=6, \therefore AH=10;$$

以边 DA, DC, DD₁ 所在直线为 x, y, z 轴，建立如图所示空间直角坐标系，则：

$$A(10, 0, 0), H(10, 10, 0), E(10, 4, 8), F(0, 4, 8);$$

$$\therefore \vec{EF}=(-10, 0, 0), \vec{EH}=(0, 6, -8);$$

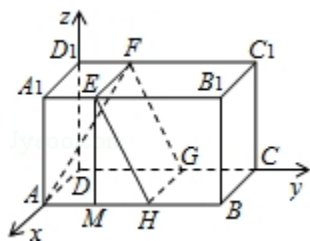
设 $\vec{n}=(x, y, z)$ 为平面 EFGH 的法向量，则：

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{EF} = -10x = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{EH} = 6y - 8z = 0 \end{cases}, \text{取 } z=3, \text{则 } \vec{n}=(0, 4, 3);$$

若设直线 AF 和平面 EFGH 所成的角为 θ ，则：

$$\sin\theta = |\cos\langle \overrightarrow{AF}, \vec{n} \rangle| = \frac{40}{\sqrt{180 \cdot 5}} = \frac{4\sqrt{5}}{15};$$

∴ 直线 AF 与平面 α 所成角的正弦值为 $\frac{4\sqrt{5}}{15}$.



【点评】 考查直角三角形边的关系，通过建立空间直角坐标系，利用空间向量解决线面角问题的方法，弄清直线和平面所成角与直线的方向向量和平面法向量所成角的关系，以及向量夹角余弦的坐标公式.

20. (12 分) 已知椭圆 C: $9x^2 + y^2 = m^2$ ($m > 0$), 直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴, l 与 C 有两个交点 A, B, 线段 AB 的中点为 M.

(1) 证明: 直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值;

(2) 若 l 过点 $(\frac{m}{3}, m)$, 延长线段 OM 与 C 交于点 P, 四边形 OAPB 能否为平行四边形? 若能, 求此时 l 的斜率; 若不能, 说明理由.

【考点】 I3: 直线的斜率; KH: 直线与圆锥曲线的综合.

【专题】 2: 创新题型; 5E: 圆锥曲线中的最值与范围问题.

【分析】 (1) 联立直线方程和椭圆方程, 求出对应的直线斜率即可得到结论.

(2) 四边形 OAPB 为平行四边形当且仅当线段 AB 与线段 OP 互相平分, 即 $x_P = 2x_M$, 建立方程关系即可得到结论.

【解答】 解: (1) 设直线 l: $y = kx + b$, ($k \neq 0, b \neq 0$), A (x_1, y_1), B (x_2, y_2), M (x_M, y_M),

将 $y = kx + b$ 代入 $9x^2 + y^2 = m^2$ ($m > 0$), 得 $(k^2 + 9)x^2 + 2kbx + b^2 - m^2 = 0$,

则判别式 $\Delta = 4k^2b^2 - 4(k^2 + 9)(b^2 - m^2) > 0$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{2kb}{9+k^2}, \text{ 则 } x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{kb}{9+k^2}, y_M = kx_M + b = \frac{9b}{9+k^2},$$

于是直线 OM 的斜率 $k_{OM} = \frac{y_M}{x_M} = -\frac{9}{k}$,

即 $k_{OM} \cdot k = -9$,

\therefore 直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值.

(2) 四边形 OAPB 能为平行四边形.

\because 直线 l 过点 $(\frac{m}{3}, m)$,

\therefore 由判别式 $\Delta = 4k^2b^2 - 4(k^2+9)(b^2-m^2) > 0$,

即 $k^2m^2 > 9b^2 - 9m^2$,

$\because b = m - \frac{k}{3}m$,

$\therefore k^2m^2 > 9(m - \frac{k}{3}m)^2 - 9m^2$,

即 $k^2 > k^2 - 6k$,

即 $6k > 0$,

则 $k > 0$,

\therefore l 不过原点且与 C 有两个交点的充要条件是 $k > 0, k \neq 3$,

由 (1) 知 OM 的方程为 $y = -\frac{9}{k}x$,

设 P 的横坐标为 x_P ,

$$\text{由 } \begin{cases} y = -\frac{9}{k}x \\ 9x^2 + y^2 = m^2 \end{cases} \text{ 得 } x_P^2 = \frac{k^2m^2}{9k^2+81}, \text{ 即 } x_P = \pm \frac{km}{3\sqrt{9+k^2}},$$

将点 $(\frac{m}{3}, m)$ 的坐标代入 l 的方程得 $b = \frac{m(3-k)}{3}$,

即 l 的方程为 $y = kx + \frac{m(3-k)}{3}$,

将 $y = -\frac{9}{k}x$ 代入 $y = kx + \frac{m(3-k)}{3}$,

得 $kx + \frac{m(3-k)}{3} = -\frac{9}{k}x$

解得 $x_M = \frac{k(k-3)m}{3(9+k^2)}$,

四边形 OAPB 为平行四边形当且仅当线段 AB 与线段 OP 互相平分, 即 $x_P = 2x_M$,

$$\text{于是 } \pm \frac{km}{3\sqrt{9+k^2}} = 2 \times \frac{k(k-3)m}{3(9+k^2)},$$

解得 $k_1 = 4 - \sqrt{7}$ 或 $k_2 = 4 + \sqrt{7}$,

$\because k_i > 0, k_i \neq 3, i=1, 2,$

\therefore 当 l 的斜率为 $4 - \sqrt{7}$ 或 $4 + \sqrt{7}$ 时, 四边形 $OAPB$ 能为平行四边形.

【点评】 本题主要考查直线和圆锥曲线的相交问题, 联立方程组转化为一元二次方程, 利用根与系数之间的关系是解决本题的关键. 综合性较强, 难度较大.

21. (12 分) 设函数 $f(x) = e^{mx+x^2} - mx$.

(1) 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增;

(2) 若对于任意 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq e - 1$, 求 m 的取值范围.

【考点】 6B: 利用导数研究函数的单调性; 6E: 利用导数研究函数的最值.

【专题】 2: 创新题型; 52: 导数的概念及应用.

【分析】 (1) 利用 $f'(x) \geq 0$ 说明函数为增函数, 利用 $f'(x) \leq 0$ 说明函数为减函数. 注意参数 m 的讨论;

(2) 由 (1) 知, 对任意的 m , $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 单调递减, 在 $[0, 1]$ 单调递增, 则恒成立问题转化为最大值和最小值问题. 从而求得 m 的取值范围.

【解答】 解: (1) 证明: $f'(x) = m(e^{mx-1}) + 2x$.

若 $m \geq 0$, 则当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $e^{mx-1} \leq 0$, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $e^{mx-1} \geq 0$, $f'(x) > 0$.

若 $m < 0$, 则当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $e^{mx-1} > 0$, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $e^{mx-1} < 0$, $f'(x) > 0$.

所以, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 时单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

(2) 由 (1) 知, 对任意的 m , $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 单调递减, 在 $[0, 1]$ 单调递增, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最小值.

所以对于任意 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, $|f(x_1) - f(x_2)| \leq e - 1$ 的充要条件是

$$\begin{cases} f(1) - f(0) \leq e - 1 \\ f(-1) - f(0) \leq e - 1 \end{cases}$$

即 $\begin{cases} e^m - m \leq e - 1 \\ e^{-m} + m \leq e - 1 \end{cases} \quad \textcircled{1}$

设函数 $g(t) = e^t - t - e + 1$, 则 $g'(t) = e^t - 1$.

当 $t < 0$ 时, $g'(t) < 0$; 当 $t > 0$ 时, $g'(t) > 0$. 故 $g(t)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

又 $g(1) = 0$, $g(-1) = e^{-1} + 2 - e < 0$, 故当 $t \in [-1, 1]$ 时, $g(t) \leq 0$.

当 $m \in [-1, 1]$ 时, $g(m) \leq 0$, $g(-m) \leq 0$, 即合式成立;

当 $m > 1$ 时, 由 $g(t)$ 的单调性, $g(m) > 0$, 即 $e^m - m > e - 1$.

当 $m < -1$ 时, $g(-m) > 0$, 即 $e^{-m} + m > e - 1$.

综上, m 的取值范围是 $[-1, 1]$

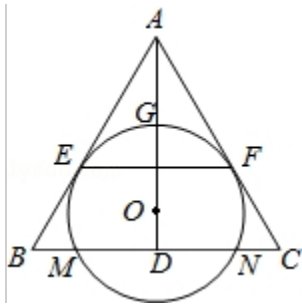
【点评】 本题主要考查导数在求单调函数中的应用和恒成立在求参数中的应用. 属于难题, 高考压轴题.

四、选做题.选修 4-1: 几何证明选讲

22. (10 分) 如图, O 为等腰三角形 ABC 内一点, $\odot O$ 与 $\triangle ABC$ 的底边 BC 交于 M, N 两点, 与底边上的高 AD 交于点 G , 且与 AB, AC 分别相切于 E, F 两点.

(1) 证明: $EF \parallel BC$;

(2) 若 AG 等于 $\odot O$ 的半径, 且 $AE = MN = 2\sqrt{3}$, 求四边形 $EBCF$ 的面积.



【考点】N4：相似三角形的判定.

【专题】26：开放型；5F：空间位置关系与距离.

【分析】（1）通过 AD 是 $\angle CAB$ 的角平分线及圆 O 分别与 AB、AC 相切于点 E、F，利用相似的性质即得结论；

（2）通过（1）知 AD 是 EF 的垂直平分线，连结 OE、OM，则 $OE \perp AE$ ，利用 $S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AEF}$ 计算即可.

【解答】（1）证明： $\because \triangle ABC$ 为等腰三角形， $AD \perp BC$ ，

$\therefore AD$ 是 $\angle CAB$ 的角平分线，

又 \because 圆 O 分别与 AB、AC 相切于点 E、F，

$\therefore AE=AF$ ， $\therefore AD \perp EF$ ，

$\therefore EF \parallel BC$ ；

（2）解：由（1）知 $AE=AF$ ， $AD \perp EF$ ， $\therefore AD$ 是 EF 的垂直平分线，

又 $\because EF$ 为圆 O 的弦， $\therefore O$ 在 AD 上，

连结 OE、OM，则 $OE \perp AE$ ，

由 AG 等于圆 O 的半径可得 $AO=2OE$ ，

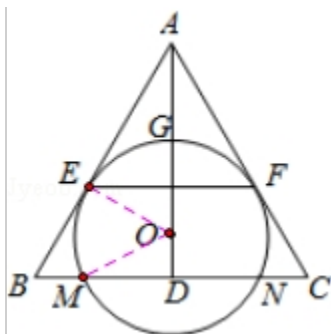
$\therefore \angle OAE=30^\circ$ ， $\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle AEF$ 都是等边三角形，

$\because AE=2\sqrt{3}$ ， $\therefore AO=4$ ， $OE=2$ ，

$\because OM=OE=2$ ， $DM=\frac{1}{2}MN=\sqrt{3}$ ， $\therefore OD=1$ ，

$\therefore AD=5$ ， $AB=\frac{10\sqrt{3}}{3}$ ，

\therefore 四边形 EBCF 的面积为 $\frac{1}{2} \times \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times (2\sqrt{3})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$.



【点评】 本题考查空间中线与线之间的位置关系，考查四边形面积的计算，注意解题方法的积累，属于中档题.

选修 4-4: 坐标系与参数方程

23. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C_1: \begin{cases} x=t\cos\alpha \\ y=t\sin\alpha \end{cases}$ (t 为参数, $t \neq 0$), 其中 $0 \leq \alpha \leq \pi$, 在以 O 为极点, x 轴正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 $C_2: \rho=2\sin\theta$, $C_3: \rho=2\sqrt{3}\cos\theta$.

(1) 求 C_2 与 C_3 交点的直角坐标;

(2) 若 C_1 与 C_2 相交于点 A , C_1 与 C_3 相交于点 B , 求 $|AB|$ 的最大值.

【考点】 Q4: 简单曲线的极坐标方程; QH: 参数方程化成普通方程.

【专题】 5S: 坐标系和参数方程.

【分析】 (I) 由曲线 $C_2: \rho=2\sin\theta$, 化为 $\rho^2=2\rho\sin\theta$, 把 $\begin{cases} \rho^2=x^2+y^2 \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$ 代入可得直角坐标方程. 同理由 $C_3: \rho=2\sqrt{3}\cos\theta$. 可得直角坐标方程, 联立解出可得 C_2 与 C_3 交点的直角坐标.

(2) 由曲线 C_1 的参数方程, 消去参数 t , 化为普通方程 $y=x\tan\alpha$, 其中 $0 \leq \alpha \leq \pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 为 $x=0$ ($y \neq 0$). 其极坐标方程为: $\theta=\alpha$ ($\rho \in \mathbb{R}$, $\rho \neq 0$), 利用 $|AB|=|2\sin\alpha-2\sqrt{3}\cos\alpha|$ 即可得出.

【解答】 解: (I) 由曲线 $C_2: \rho=2\sin\theta$, 化为 $\rho^2=2\rho\sin\theta$,
 $\therefore x^2+y^2=2y$.

同理由 $C_3: \rho=2\sqrt{3}\cos\theta$. 可得直角坐标方程: $x^2+y^2=2\sqrt{3}x$,

$$\text{联立} \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases},$$

$\therefore C_2$ 与 C_3 交点的直角坐标为 $(0, 0)$, $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$.

(2) 曲线 $C_1: \begin{cases} x = t \cos \alpha \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数, $t \neq 0$), 化为普通方程: $y = x \tan \alpha$, 其中 $0 \leq \alpha \leq \pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 为 $x = 0$ ($y \neq 0$). 其极坐标方程为: $\theta = \alpha$ ($\rho \in \mathbb{R}$, $\rho \neq 0$),

$\therefore A, B$ 都在 C_1 上,

$\therefore A(2 \sin \alpha, \alpha)$, $B(2\sqrt{3} \cos \alpha, \alpha)$.

$\therefore |AB| = |2 \sin \alpha - 2\sqrt{3} \cos \alpha| = 4 |\sin(\alpha - \frac{\pi}{3})|$,

当 $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ 时, $|AB|$ 取得最大值 4.

【点评】 本题考查了极坐标方程化为直角坐标方程、参数方程化为普通方程、曲线的交点、两点之间的距离公式、三角函数的单调性, 考查了推理能力与计算能力, 属于中档题.

选修 4-5: 不等式选讲

24. 设 a, b, c, d 均为正数, 且 $a+b=c+d$, 证明:

(1) 若 $ab > cd$, 则 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$;

(2) $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$ 是 $|a - b| < |c - d|$ 的充要条件.

【考点】 29: 充分条件、必要条件、充要条件; R6: 不等式的证明.

【专题】 59: 不等式的解法及应用; 5L: 简易逻辑.

【分析】 (1) 运用不等式的性质, 结合条件 a, b, c, d 均为正数, 且 $a+b=c+d$, $ab > cd$, 即可得证;

(2) 从两方面证, ①若 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$, 证得 $|a - b| < |c - d|$, ②若 $|a - b| < |c - d|$

$|c-d|$ ，证得 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$ ，注意运用不等式的性质，即可得证.

【解答】证明：（1）由于 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}$ ，

$$(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2=c+d+2\sqrt{cd},$$

由 a, b, c, d 均为正数，且 $a+b=c+d$ ， $ab>cd$ ，

$$\text{则}\sqrt{ab}>\sqrt{cd},$$

$$\text{即有}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2,$$

$$\text{则}\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d};$$

（2）①若 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$ ，则 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$ ，

$$\text{即为}a+b+2\sqrt{ab}>c+d+2\sqrt{cd},$$

由 $a+b=c+d$ ，则 $ab>cd$ ，

$$\text{于是}(a-b)^2=(a+b)^2-4ab,$$

$$(c-d)^2=(c+d)^2-4cd,$$

$$\text{即有}(a-b)^2<(c-d)^2, \text{即为}|a-b|<|c-d|;$$

$$\text{②若}|a-b|<|c-d|, \text{则}(a-b)^2<(c-d)^2,$$

$$\text{即有}(a+b)^2-4ab<(c+d)^2-4cd,$$

由 $a+b=c+d$ ，则 $ab>cd$ ，

$$\text{则有}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2.$$

综上可得， $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$ 是 $|a-b|<|c-d|$ 的充要条件.

【点评】本题考查不等式的证明，主要考查不等式的性质的运用，同时考查充要条件的判断，属于基础题.