2015 年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标 I ）

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分）

1．（5 分）设复数 z 满足$\frac{1+z}{1-z}$=i，则|z|=（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

2．（5 分）sin20°cos10°－ cos160°sin10°=（　　）

A．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{2}$

3．（5 分）设命题 p：∃n∈N，$n^2>2^n$，则¬p 为（　　）

A．∀n∈N，$n^2>2^n$　B．∃n∈N，$n^2\leqslant 2^n$　C．∀n∈N，$n^2\leqslant 2^n$　D．∃n∈N，$n^2=2^n$

4．（5 分）投篮测试中，每人投 3 次，至少投中 2 次才能通过测试．已知某同学每次投篮投中的概率为 0.6，且各次投篮是否投中相互独立，则该同学通过测试的概率为（　　）

A．0.648　　B．0.432　　C．0.36　　D．0.312

5．（5 分）已知 M（x_0，y_0）是双曲线 C：$\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 上的一点，F_1，F_2 是 C 的左、右两个焦点，若$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}<0$，则 y_0 的取值范围是（　　）

A．$(-\frac{\sqrt{3}}{3}，\frac{\sqrt{3}}{3})$　　B．$(-\frac{\sqrt{3}}{6}，\frac{\sqrt{3}}{6})$

C．$(-\frac{2\sqrt{2}}{3}，\frac{2\sqrt{2}}{3})$　　D．$(-\frac{2\sqrt{3}}{3}，\frac{2\sqrt{3}}{3})$

6．（5 分）《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著，书中有如下问题：”今有委米依垣内角，下周八尺，高五尺．问：积及为米几何？“其意思为：”在屋内墙角处堆放米（如图，米堆为一个圆锥的四分之一），米堆底部的弧长为 8 尺，米堆的高为 5 尺，问米堆的体积和堆放的米各为多少？“已知 1 斛米的体积约为 1.62 立方尺，圆周率约为 3，估算出堆放的米约有（　　）

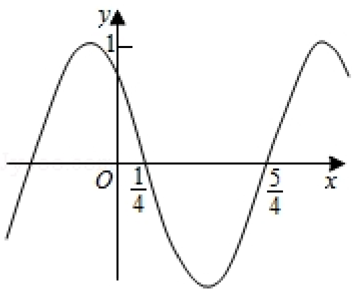
A．14 斛　　　B．22 斛　　　C．36 斛　　　D．66 斛

7．（5 分）设 D 为△ABC 所在平面内一点，$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$，则（　　）

A．$\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$　　B．$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

C．$\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　D．$\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

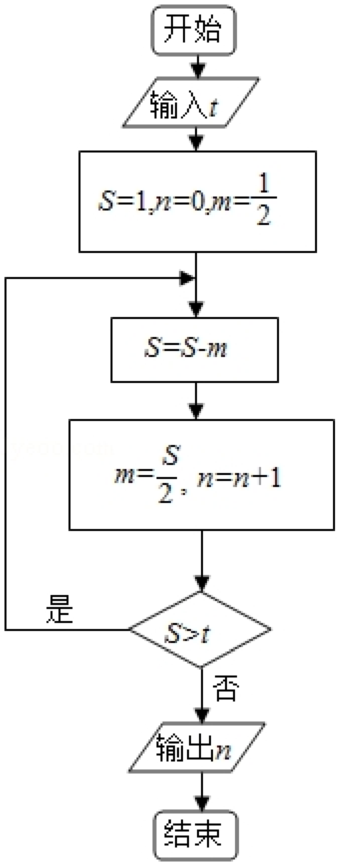
8．（5 分）函数 f（x）=cos（ωx+φ）的部分图象如图所示，则 f（x）的单调递减区间为（　　）



A．（kπ−$\frac{1}{4}$，kπ+$\frac{3}{4}$），k∈z　　B．（2kπ−$\frac{1}{4}$，2kπ+$\frac{3}{4}$），k∈z

C．（k−$\frac{1}{4}$，k+$\frac{3}{4}$），k∈z　　D．（$2k-\frac{1}{4}$，2k+$\frac{3}{4}$），k∈z

9．（5 分）执行如图所示的程序框图，如果输入的 t=0.01，则输出的 n=（　　）

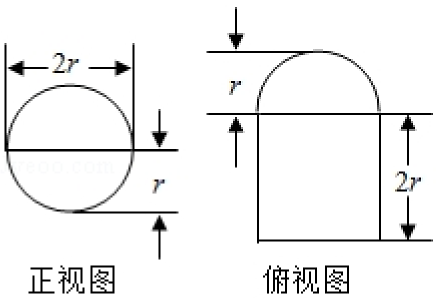


A．5　　B．6　　C．7　　D．8

10．（5 分）$(x^2+x+y)^5$ 的展开式中，x^5y^2 的系数为（　　）

A．10　　B．20　　C．30　　D．60

11．（5 分）圆柱被一个平面截去一部分后与半球（半径为 r）组成一个几何体，该几何体三视图中的正视图和俯视图如图所示．若该几何体的表面积为 $16+20\pi$，则 $r=$（　　）



A．1　　B．2　　C．4　　D．8

12．（5 分）设函数 $f(x)=e^x(2x-1)-ax+a$，其中 $a<1$，若存在唯一的整数 x_0 使得 $f(x_0)<0$，则 a 的取值范围是（　　）

A．$[-\frac{3}{2e}, 1)$　　B．$[-\frac{3}{2e}, \frac{3}{4})$　　C．$[\frac{3}{2e}, \frac{3}{4})$　　D．$[\frac{3}{2e}, 1)$

二、填空题（本大题共有 4 小题，每小题 5 分）

13．（5 分）若函数 $f(x)=x\ln(x+\sqrt{a+x^2})$ 为偶函数，则 a=_______.

14．（5 分）一个圆经过椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 的三个顶点．且圆心在 x 轴的正半轴上．则该圆标准方程为_______.

15．（5 分）若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x-1\geqslant 0 \\ x-y\leqslant 0 \\ x+y-4\leqslant 0 \end{cases}$．则 $\frac{y}{x}$ 的最大值为_______.

16．（5 分）在平面四边形 ABCD 中，∠A=∠B=∠C=75°．BC=2，则 AB 的取值范围是_______.

三、解答题：

17．（12 分）S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_n>0$，$a_n^2+2a_n=4S_n+3$

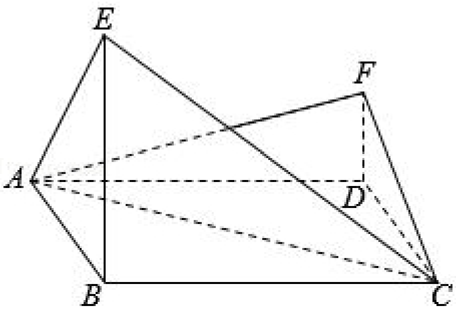
（I）求 $\{a_n\}$ 的通项公式：

（Ⅱ）设 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和．

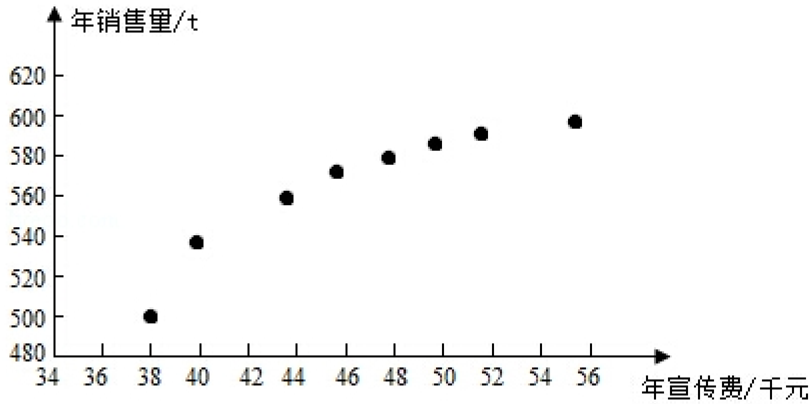
18．（12 分）如图，四边形 ABCD 为菱形，∠ABC=120°，E，F 是平面 ABCD 同一侧的两点，BE⊥平面 ABCD，DF⊥平面 ABCD，BE=2DF，AE⊥EC．

（Ⅰ）证明：平面 AEC⊥平面 AFC

（Ⅱ）求直线 AE 与直线 CF 所成角的余弦值．



19．（12 分）某公司为确定下一年度投入某种产品的宣传费，需了解年宣传费 x（单位：千元）对年销售量 y（单位：t）和年利润 z（单位：千元）的影响，对近 8 年的年宣传费 x_i 和年销售量 y_i（i=1，2，…，8）数据作了初步处理，得到下面的散点图及一些统计量的值．



$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{w}$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\overline{x})^2$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(w_i-\overline{w})^2$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(w_i-\overline{w})(y_i-\overline{y})$
46.6	563	6.8	289.8	1.6	1469	108.8

表中 $w_i=\sqrt{x_i}$，$\overline{w}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}w_i$

（Ⅰ）根据散点图判断，$y=a+bx$ 与 $y=c+d\sqrt{x}$ 哪一个适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型？（给出判断即可，不必说明理由）

（Ⅱ）根据（Ⅰ）的判断结果及表中数据，建立 y 关于 x 的回归方程；

（Ⅲ）已知这种产品的年利润 z 与 x、y 的关系为 $z=0.2y-x$．根据（Ⅱ）的结果回答下列问题：

（i）年宣传费 $x=49$ 时，年销售量及年利润的预报值是多少？

（ii）年宣传费 x 为何值时，年利润的预报值最大？

附：对于一组数据 $(u_1\ v_1)$，$(u_2\ v_2)$ …..$(u_n\ v_n)$，其回归线 $v=\alpha+\beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为：$\hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u})(v_i-\overline{v})}{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u})^2}$，$\hat{\alpha}=\overline{v}-\hat{\beta}\overline{u}$.

20．（12 分）在直角坐标系 xOy 中，曲线 C：$y=\frac{x^2}{4}$ 与直线 l：$y=kx+a$（$a>0$）交于 M，N 两点．

（Ⅰ）当 $k=0$ 时，分别求 C 在点 M 和 N 处的切线方程．

（Ⅱ）y 轴上是否存在点 P，使得当 k 变动时，总有∠OPM=∠OPN？（说明理由）

21．（12 分）已知函数 $f(x)=x^3+ax+\frac{1}{4}$，$g(x)=-\ln x$

（i）当 a 为何值时，x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线；

（ii）用 $\min\{m,n\}$ 表示 m，n 中的最小值，设函数 $h(x)=\min\{f(x),g(x)$

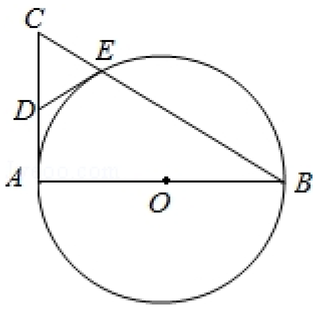
}（x＞0），讨论 h（x）零点的个数．

选修 4 一 1:几何证明选讲

22．（10 分）如图，AB 是⊙O 的直径，AC 是⊙O 的切线，BC 交⊙O 于点 E．

（Ⅰ）若 D 为 AC 的中点，证明：DE 是⊙O 的切线；

（Ⅱ）若 OA=$\sqrt{3}$CE，求∠ACB 的大小．



选修 4 一 4：坐标系与参数方程

23．（10 分）在直角坐标系 xOy 中，直线 C_1：x=﹣2，圆 C_2：$(x-1)^2+(y-2)^2=1$，以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系．

（Ⅰ）求 C_1，C_2 的极坐标方程；

（Ⅱ）若直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{4}$（ρ∈R），设 C_2 与 C_3 的交点为 M，N，求△C_2MN 的面积．

选修4一5：不等式选讲

24．（10分）已知函数 $f(x)=|x+1|-2|x-a|$，$a>0$．

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)>1$ 的解集；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 的图象与 x 轴围成的三角形面积大于6，求 a 的取值范围．

2015 年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标 I ）

参考答案与试题解析

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分）

1．（5 分）设复数 z 满足$\frac{1+z}{1-z}$=i，则|z|=（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

【考点】A8：复数的模．

【专题】11：计算题；5N：数系的扩充和复数．

【分析】先化简复数，再求模即可．

【解答】解：∵复数 z 满足$\frac{1+z}{1-z}$=i，

∴1+z=i﹣ zi，

∴z（1+i）=i﹣ 1，

∴z=$\frac{i-1}{i+1}$=i，

∴|z|=1，

故选：A．

【点评】本题考查复数的运算，考查学生的计算能力，比较基础．

2．（5 分）sin20°cos10°﹣ cos160°sin10°=（　　）

A．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{2}$

【考点】GP：两角和与差的三角函数．

【专题】56：三角函数的求值．

【分析】直接利用诱导公式以及两角和的正弦函数，化简求解即可．

【解答】解：sin20°cos10°﹣ cos160°sin10°

$=\sin20°\cos10°+\cos20°\sin10°$

$=\sin30°$

$=\frac{1}{2}$.

故选：D．

【点评】本题考查诱导公式以及两角和的正弦函数的应用，基本知识的考查．

3．（5 分）设命题 p：$\exists n\in N$，$n^2>2^n$，则$\neg p$为（　　）

A．$\forall n\in N$，$n^2>2^n$　B．$\exists n\in N$，$n^2\leqslant 2^n$　C．$\forall n\in N$，$n^2\leqslant 2^n$　D．$\exists n\in N$，$n^2=2^n$

【考点】2J：命题的否定．

【专题】5L：简易逻辑．

【分析】根据特称命题的否定是全称命题即可得到结论．

【解答】解：命题的否定是：$\forall n\in N$，$n^2\leqslant 2^n$，

故选：C．

【点评】本题主要考查含有量词的命题的否定，比较基础．

4．（5 分）投篮测试中，每人投 3 次，至少投中 2 次才能通过测试．已知某同学每次投篮投中的概率为 0.6，且各次投篮是否投中相互独立，则该同学通过测试的概率为（　　）

A．0.648　　B．0.432　　C．0.36　　D．0.312

【考点】C8：相互独立事件和相互独立事件的概率乘法公式．

【专题】5I：概率与统计．

【分析】判断该同学投篮投中是独立重复试验，然后求解概率即可．

【解答】解：由题意可知：同学 3 次测试满足 $X\sim B(3,0.6)$，

该同学通过测试的概率为$C_3^2(0.6)^2\times(1-0.6)+C_3^3(0.6)^3=0.648$．

故选：A．

【点评】本题考查独立重复试验概率的求法，基本知识的考查．

5．（5 分）已知 M（x_0，y_0）是双曲线 C：$\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 上的一点，F_1，F_2 是 C 的左、右两个焦点，若$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}<0$，则 y_0 的取值范围是（　　）

A．$(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$　B．$(-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{6})$　C．$(-\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3})$　D．$(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3})$

【考点】KC：双曲线的性质．

【专题】11：计算题；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】利用向量的数量积公式，结合双曲线方程，即可确定 y_0 的取值范围．

【解答】解：由题意，$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=(-\sqrt{3}-x_0,-y_0)\cdot(\sqrt{3}-x_0,-y_0)$

$=x_0^2-3+y_0^2=3y_0^2-1<0$，

所以$-\frac{\sqrt{3}}{3}<y_0<\frac{\sqrt{3}}{3}$．

故选：A．

【点评】本题考查向量的数量积公式，考查双曲线方程，考查学生的计算能力，比较基础．

6．（5 分）《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著，书中有如下问题：”今有委米依垣内角，下周八尺，高五尺．问：积及为米几何？“其意思为：”在屋内墙角处堆放米（如图，米堆为一个圆锥的四分之一），米堆底部的弧长为 8 尺，米堆的高为 5 尺，问米堆的体积和堆放的米各为多少？“已知 1 斛米的体积约为 1.62 立方尺，圆周率约为 3，估算出堆放的米约有（　　）

A．14 斛　　B．22 斛　　C．36 斛　　D．66 斛

【考点】LF：棱柱、棱锥、棱台的体积.

【专题】5F：空间位置关系与距离.

【分析】根据圆锥的体积公式计算出对应的体积即可.

【解答】解：设圆锥的底面半径为r，则$\frac{\pi}{2}$r=8，

解得 r=$\frac{16}{\pi}$，

故米堆的体积为$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\pi\times\left(\frac{16}{\pi}\right)^2\times5\approx\frac{320}{9}$，

∵1 斛米的体积约为 1.62 立方，

∴$\frac{320}{9}\div1.62\approx22$，

故选：B.

【点评】本题主要考查椎体的体积的计算，比较基础.

7．（5 分）设 D 为△ABC 所在平面内一点，$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$，则（　　）

A．$\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$　　B．$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

C．$\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　D．$\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

【考点】96：平行向量（共线）.

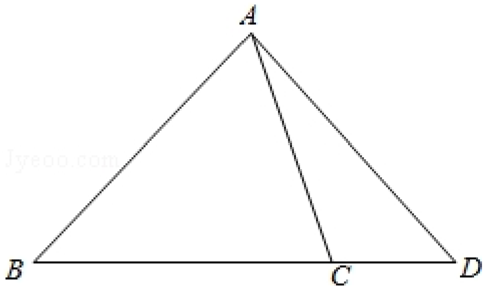
【专题】5A：平面向量及应用.

【分析】将向量$\overrightarrow{AD}$利用向量的三角形法则首先表示为$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$，然后结合已知表示为$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$的形式.

【解答】解：由已知得到如图

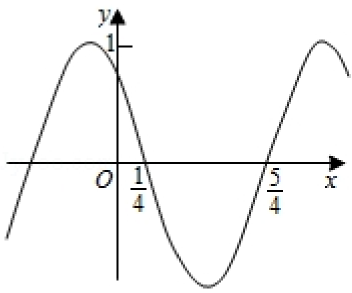
由$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$；

故选：A.



【点评】本题考查了向量的三角形法则的运用；关键是想法将向量$\overrightarrow{AD}$表示为$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$.

8．（5 分）函数 f（x）=cos（ωx+ϕ）的部分图象如图所示，则 f（x）的单调递减区间为（　　）



A．（kπ－$\frac{1}{4}$，kπ+$\frac{3}{4}$），k∈z　　B．（2kπ－$\frac{1}{4}$，2kπ+$\frac{3}{4}$），k∈z

C．（k－$\frac{1}{4}$，k+$\frac{3}{4}$），k∈z　　D．（$2k-\frac{1}{4}$，2k+$\frac{3}{4}$），k∈z

【考点】HA：余弦函数的单调性．

【专题】57：三角函数的图像与性质．

【分析】由周期求出 ω，由五点法作图求出 ϕ，可得 f（x）的解析式，再根据余弦函数的单调性，求得 f（x）的减区间．

【解答】解：由函数 f（x）=cos（ωx+φ）的部分图象，可得函数的周期为$\frac{2\pi}{\omega}$=2（$\frac{5}{4}$－$\frac{1}{4}$）=2，∴ω=π，f（x）=cos（πx+φ）．

再根据函数的图象以及五点法作图，可得$\frac{\pi}{4}$+φ=$\frac{\pi}{2}$，k∈z，即 φ=$\frac{\pi}{4}$，f（x）=cos（πx+$\frac{\pi}{4}$）．

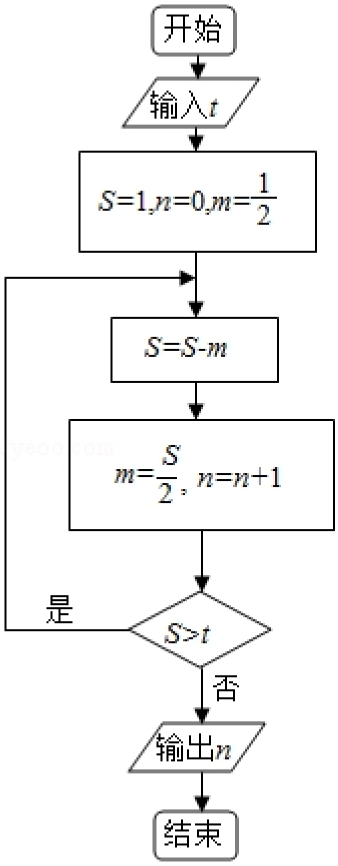
由 2kπ≤πx+$\frac{\pi}{4}$≤2kπ+π，求得 2k－$\frac{1}{4}$≤x≤2k+$\frac{3}{4}$，故 f（x）的单调递减区间为（

$2k-\frac{1}{4}$，$2k+\frac{3}{4}$），k∈z，

故选：D．

【点评】本题主要考查由函数 y=Asin（ωx+φ）的部分图象求解析式，由周期求出 ω，由五点法作图求出 φ 的值；还考查了余弦函数的单调性，属于基础题．

9．（5 分）执行如图所示的程序框图，如果输入的 t=0.01，则输出的 n=（　　）



A．5　　B．6　　C．7　　D．8

【考点】EF：程序框图．

【专题】5K：算法和程序框图．

【分析】由已知中的程序框图可知：该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量 n 的值，模拟程序的运行过程，分析循环中各变量值的变化情况，可得答案．

【解答】解：第一次执行循环体后，$S=\frac{1}{2}$，$m=\frac{1}{4}$，n=1，不满足退出循环的条件；

再次执行循环体后，S=$\frac{1}{4}$，m=$\frac{1}{8}$，n=2，不满足退出循环的条件；

再次执行循环体后，S=$\frac{1}{8}$，m=$\frac{1}{16}$，n=3，不满足退出循环的条件；

再次执行循环体后，S=$\frac{1}{16}$，m=$\frac{1}{32}$，n=4，不满足退出循环的条件；

再次执行循环体后，S=$\frac{1}{32}$，m=$\frac{1}{64}$，n=5，不满足退出循环的条件；

再次执行循环体后，S=$\frac{1}{64}$，m=$\frac{1}{128}$，n=6，不满足退出循环的条件；

再次执行循环体后，S=$\frac{1}{128}$，m=$\frac{1}{256}$，n=7，满足退出循环的条件；

故输出的 n 值为 7，

故选：C.

【点评】本题考查的知识点是程序框图，当循环的次数不多，或有规律时，常采用模拟循环的方法解答.

10．（5 分）$(x^2+x+y)^5$ 的展开式中，x^5y^2 的系数为（　　）

A．10　　B．20　　C．30　　D．60

【考点】DA：二项式定理.

【专题】11：计算题；5P：二项式定理.

【分析】利用展开式的通项，即可得出结论.

【解答】解：$(x^2+x+y)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^r(x^2+x)^{5-r}y^r$，

令 r=2，则 $(x^2+x)^3$ 的通项为 $C_3^k(x^2)^{3-k}x^k=C_3^kx^{6-k}$，

令 6﹣k=5，则 k=1，

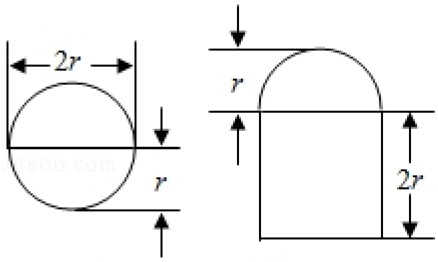
∴$(x^2+x+y)^5$ 的展开式中，x^5y^2 的系数为 $C_5^2C_3^1=30$.

故选：C.

【点评】本题考查二项式定理的运用，考查学生的计算能力，确定通项是关键.

11．（5 分）圆柱被一个平面截去一部分后与半球（半径为 r）组成一个几何体，该几何体三视图中的正视图和俯视图如图所示．若该几何体的表面积为

16+20π，则 r=（　　）



正视图　　俯视图

A．1　　B．2　　C．4　　D．8

【考点】L!：由三视图求面积、体积．

【专题】5Q：立体几何．

【分析】通过三视图可知该几何体是一个半球拼接半个圆柱，计算即可．

【解答】解：由几何体三视图中的正视图和俯视图可知，

截圆柱的平面过圆柱的轴线，

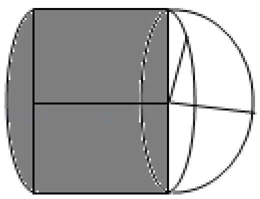
该几何体是一个半球拼接半个圆柱，

∴其表面积为：$\frac{1}{2}\times4\pi r^2+\frac{1}{2}\times\pi r^2+\frac{1}{2}\times2r\times2\pi r+2r\times2r+\frac{1}{2}\times\pi r^2=5\pi r^2+4r^2$，

又∵该几何体的表面积为 16+20π，

∴$5\pi r^2+4r^2=16+20\pi$，解得 r=2，

故选：B．



【点评】本题考查由三视图求表面积问题，考查空间想象能力，注意解题方法的积累，属于中档题．

12．（5 分）设函数 $f(x)=e^x(2x-1)-ax+a$，其中 $a<1$，若存在唯一的整数 x_0 使得 $f(x_0)<0$，则 a 的取值范围是（　　）

A．$[-\frac{3}{2e},1)$　　B．$[-\frac{3}{2e},\frac{3}{4})$　　C．$[\frac{3}{2e},\frac{3}{4})$　　D．$[\frac{3}{2e},1)$

【考点】51：函数的零点；6D：利用导数研究函数的极值．

【专题】2：创新题型；53：导数的综合应用．

【分析】设 g（x）$=e^x$（2x－ 1），y=ax－ a，问题转化为存在唯一的整数 x_0 使得 g（x_0）在直线 y=ax－ a 的下方，求导数可得函数的极值，数形结合可得－ a＞g（0）=－ 1 且 g（－ 1）=－ $3e^{-1}$≥－ a－ a，解关于 a 的不等式组可得．

【解答】解：设 g（x）$=e^x$（2x－ 1），y=ax－ a，

由题意知存在唯一的整数 x_0 使得 g（x_0）在直线 y=ax－ a 的下方，

∵g′（x）$=e^x$（2x－ 1）$+2e^x=e^x$（2x+1），

∴当 x＜－ $\frac{1}{2}$时，g′（x）＜0，当 x＞－ $\frac{1}{2}$时，g′（x）＞0，

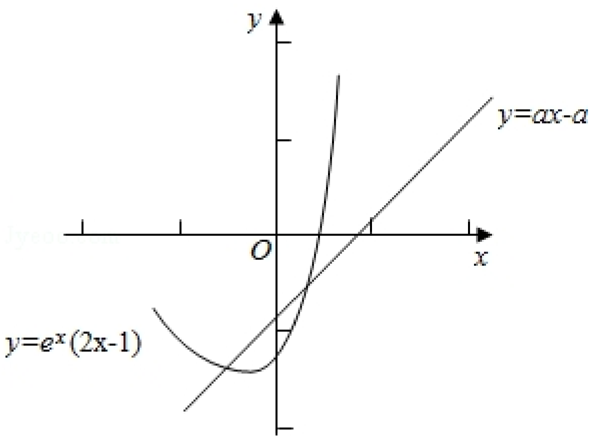
∴当 x=－ $\frac{1}{2}$时，g（x）取最小值－ $2e^{-\frac{1}{2}}$，

当 x=0 时，g（0）=－ 1，当 x=1 时，g（1）=e＞0，

直线 y=ax－ a 恒过定点（1，0）且斜率为 a，

故－ a＞g（0）=－ 1 且 g（－ 1）=－ $3e^{-1}$≥－ a－ a，解得$\frac{3}{2e}$≤a＜1

故选：D．



【点评】本题考查导数和极值，涉及数形结合和转化的思想，属中档题．

二、填空题（本大题共有 4 小题，每小题 5 分）

13．（5 分）若函数 f（x）=xln（x+$\sqrt{a+x^2}$）为偶函数，则 a=<u> 1 </u>．

【考点】3K：函数奇偶性的性质与判断．

【专题】51：函数的性质及应用．

【分析】由题意可得，f（﹣x）=f（x），代入根据对数的运算性质即可求解．

【解答】解：∵f（x）=xln（x+$\sqrt{a+x^2}$）为偶函数，

∴f（﹣x）=f（x），

∴（﹣x）ln（﹣x+$\sqrt{a+x^2}$）=xln（x+$\sqrt{a+x^2}$），

∴﹣ln（﹣x+$\sqrt{a+x^2}$）=ln（x+$\sqrt{a+x^2}$），

∴ln（﹣x+$\sqrt{a+x^2}$）+ln（x+$\sqrt{a+x^2}$）=0，

∴ln（$\sqrt{a+x^2}$+x）（$\sqrt{a+x^2}$﹣x）=0，

∴lna=0，

∴a=1．

故答案为：1．

【点评】本题主要考查了偶函数的定义及对数的运算性质的简单应用，属于基础试题．

14．（5分）一个圆经过椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$的三个顶点．且圆心在x轴的正半轴上．则该圆标准方程为___（x﹣$\frac{3}{2}$）^{2}+y^2=$\frac{25}{4}$___．

【考点】K3：椭圆的标准方程．

【专题】5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】利用椭圆的方程求出顶点坐标，然后求出圆心坐标，求出半径即可得到圆的方程．

【解答】解：一个圆经过椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$的三个顶点．且圆心在x轴的正半轴上．

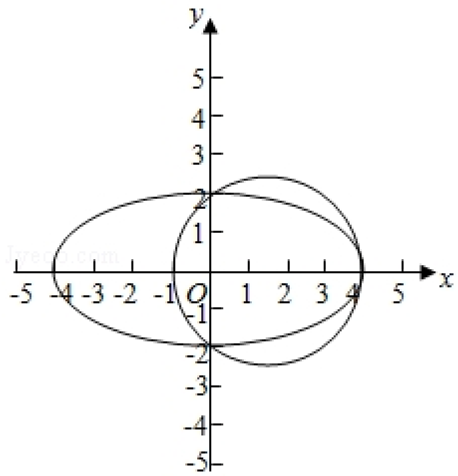
可知椭圆的右顶点坐标（4，0），上下顶点坐标（0，±2），

设圆的圆心（a，0），则$\sqrt{(a-0)^2+(0-2)^2}=4-a$，解得 a=$\frac{3}{2}$，

圆的半径为：$\frac{5}{2}$，

所求圆的方程为：$(x-\frac{3}{2})^2+y^2=\frac{25}{4}$.

故答案为：$(x-\frac{3}{2})^2+y^2=\frac{25}{4}$.



【点评】本题考查椭圆的简单性质的应用，圆的方程的求法，考查计算能力.

15．（5 分）若 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x-1\geqslant 0\\ x-y\leqslant 0\\ x+y-4\leqslant 0\end{cases}$．则$\frac{y}{x}$的最大值为__3__.

【考点】7C：简单线性规划.

【专题】59：不等式的解法及应用.

【分析】作出不等式组对应的平面区域，利用目标函数的几何意义，利用数形结合确定$\frac{y}{x}$的最大值.

【解答】解：作出不等式组对应的平面区域如图：（阴影部分 ABC）.

设 k=$\frac{y}{x}$，则 k 的几何意义为区域内的点到原点的斜率，

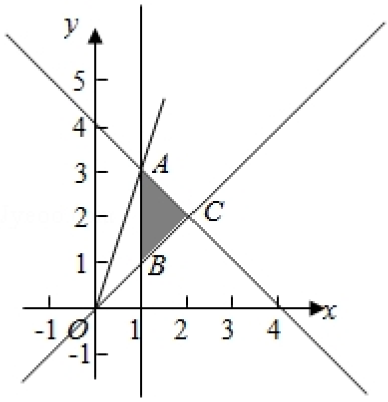
由图象知 OA 的斜率最大，

由$\begin{cases}x=1\\ x+y-4=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=1\\ y=3\end{cases}$，即 A（1，3），

$k_{OA}=\frac{3}{1}=3$，

即$\frac{y}{x}$的最大值为3.

故答案为：3.



【点评】本题主要考查线性规划的应用，结合目标函数的几何意义以及直线的斜率，利用数形结合的数学思想是解决此类问题的基本方法.

16. （5分）在平面四边形ABCD中，∠A=∠B=∠C=75°．BC=2，则AB的取值范围是____（$\sqrt{6}-\sqrt{2}$，$\sqrt{6}+\sqrt{2}$）____.

【考点】HT：三角形中的几何计算.

【专题】15：综合题；2：创新题型；58：解三角形.

【分析】如图所示，延长BA，CD交于点E，设AD=$\frac{1}{2}$x，AE=$\frac{\sqrt{2}}{2}$x，DE=$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$x，CD=m，求出$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$x+m=$\sqrt{6}+\sqrt{2}$，即可求出AB的取值范围.

【解答】解：方法一：

如图所示，延长BA，CD交于点E，则

在△ADE中，∠DAE=105°，∠ADE=45°，∠E=30°，

∴设AD=$\frac{1}{2}$x，AE=$\frac{\sqrt{2}}{2}$x，DE=$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$x，CD=m，

∵BC=2，

∴（$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$x+m）sin15°=1，

∴$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$x+m=$\sqrt{6}+\sqrt{2}$，

∴0＜x＜4，

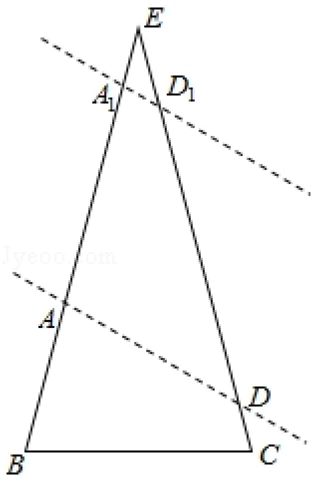
而 AB=$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$x+m− $\frac{\sqrt{2}}{2}$x=$\sqrt{6}+\sqrt{2}-$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$x，

∴AB 的取值范围是（$\sqrt{6}-$ $\sqrt{2}$，$\sqrt{6}+\sqrt{2}$）.

故答案为：（$\sqrt{6}-$ $\sqrt{2}$，$\sqrt{6}+\sqrt{2}$）.

方法二：

如下图，作出底边 BC=2 的等腰三角形 EBC，B=C=75°，



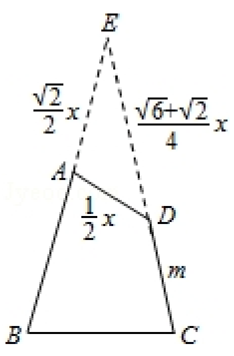
倾斜角为 150°的直线在平面内移动，分别交 EB、EC 于 A、D，则四边形 ABCD 即为满足题意的四边形；

当直线移动时，运用极限思想，

①直线接近点 C 时，AB 趋近最小，为$\sqrt{6}-$ $\sqrt{2}$;

②直线接近点 E 时，AB 趋近最大值，为$\sqrt{6}+\sqrt{2}$;

故答案为：（$\sqrt{6}-$ $\sqrt{2}$，$\sqrt{6}+\sqrt{2}$）.



【点评】本题考查求 AB 的取值范围，考查三角形中的几何计算，考查学生的计算能力，属于中档题.

三、解答题：

17．（12 分）S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，已知 $a_n>0$，$a_n^2+2a_n=4S_n+3$

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式：

（Ⅱ）设 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和.

【考点】8E：数列的求和；8H：数列递推式.

【专题】54：等差数列与等比数列.

【分析】（Ⅰ）根据数列的递推关系，利用作差法即可求$\{a_n\}$的通项公式：

（Ⅱ）求出 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，利用裂项法即可求数列$\{b_n\}$的前 n 项和.

【解答】解：（Ⅰ）由 $a_n^2+2a_n=4S_n+3$，可知 $a_{n+1}^2+2a_{n+1}=4S_{n+1}+3$

两式相减得 $a_{n+1}^2-a_n^2+2(a_{n+1}-a_n)=4a_{n+1}$，

即 $2(a_{n+1}+a_n)=a_{n+1}^2-a_n^2=(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)$，

∵$a_n>0$，∴$a_{n+1}-a_n=2$，

∵$a_1^2+2a_1=4a_1+3$，

∴$a_1=-1$（舍）或 $a_1=3$，

则$\{a_n\}$是首项为 3，公差 d=2 的等差数列，

∴$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=3+2(n-1)=2n+1$：

（Ⅱ）∵$a_n=2n+1$，

∴$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$，

∴数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $T_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{n}{3(2n+3)}$.

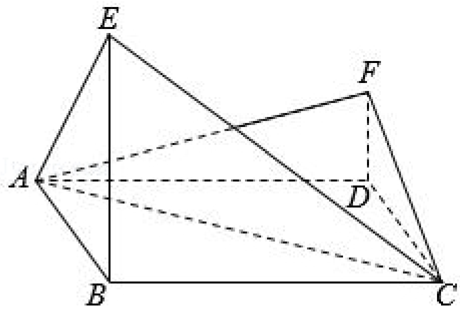
【点评】本题主要考查数列的通项公式以及数列求和的计算，利用裂项法是解决本题的关键.

18．（12 分）如图，四边形 ABCD 为菱形，∠ABC=120°，E，F 是平面 ABCD 同一

侧的两点，BE ⊥平面 ABCD，DF ⊥平面 ABCD，BE=2DF，AE ⊥ EC.

（Ⅰ）证明：平面 AEC ⊥平面 AFC

（Ⅱ）求直线 AE 与直线 CF 所成角的余弦值.



【考点】LM：异面直线及其所成的角；LY：平面与平面垂直.

【专题】5F：空间位置关系与距离；5G：空间角；5H：空间向量及应用.

【分析】（Ⅰ）连接 BD，设 BD∩AC=G，连接 EG、EF、FG，运用线面垂直的判定定理得到 EG⊥平面 AFC，再由面面垂直的判定定理，即可得到；

（Ⅱ）以 G 为坐标原点，分别以 GB，GC 为 x 轴，y 轴，|GB|为单位长度，建立空间直角坐标系 G﹣xyz，求得 A，E，F，C 的坐标，运用向量的数量积的定义，计算即可得到所求角的余弦值.

【解答】解：（Ⅰ）连接 BD，

设 BD∩AC=G，

连接 EG、EF、FG，

在菱形 ABCD 中，

不妨设 BG=1，

由∠ABC=120°，

可得 AG=GC=$\sqrt{3}$，

BE⊥平面 ABCD，AB=BC=2，

可知 AE=EC，又 AE⊥EC，

所以 EG=$\sqrt{3}$，且 EG⊥AC，

在直角△EBG 中，可得 BE=$\sqrt{2}$，故 DF=$\frac{\sqrt{2}}{2}$，

在直角三角形 FDG 中，可得 FG=$\frac{\sqrt{6}}{2}$，

在直角梯形 BDFE 中，由 BD=2，BE=$\sqrt{2}$，FD=$\frac{\sqrt{2}}{2}$，可得 EF=$\sqrt{2^2+(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2})^2}$=$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

，

从而 $EG^2+FG^2=EF^2$，则 EG⊥FG，

（或由 tan∠EGB•tan∠FGD=$\frac{EB}{BG}$•$\frac{FD}{DG}$=$\sqrt{2}$•$\frac{\sqrt{2}}{2}$=1，

可得∠EGB+∠FGD=90°，则 EG⊥FG）

AC∩FG=G，可得 EG⊥平面 AFC，

由 EG⊂平面 AEC，所以平面 AEC⊥平面 AFC；

（Ⅱ）如图，以 G 为坐标原点，分别以 GB，GC 为 x 轴，y 轴，|GB|为单位长度

，

建立空间直角坐标系 G﹣xyz，由（Ⅰ）可得 A（0，﹣$\sqrt{3}$，0），E（1，0，$\sqrt{2}$）

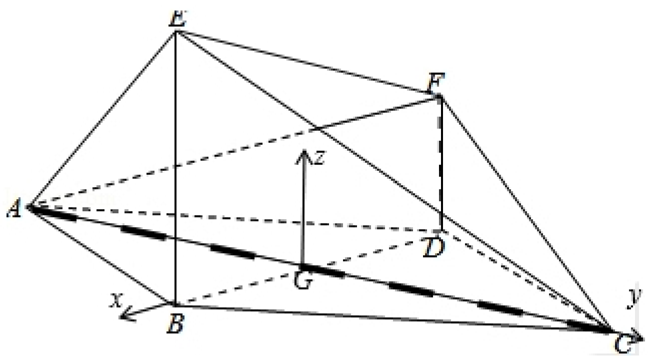
，

F（﹣1，0，$\frac{\sqrt{2}}{2}$），C（0，$\sqrt{3}$，0），

即有$\overrightarrow{AE}$=（1，$\sqrt{3}$，$\sqrt{2}$），$\overrightarrow{CF}$=（﹣1，﹣$\sqrt{3}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$），

故 cos＜$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{CF}$＞=$\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CF}}{|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{CF}|}$=$\frac{-1-3+1}{\sqrt{6}\times\sqrt{\frac{9}{2}}}$=﹣$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

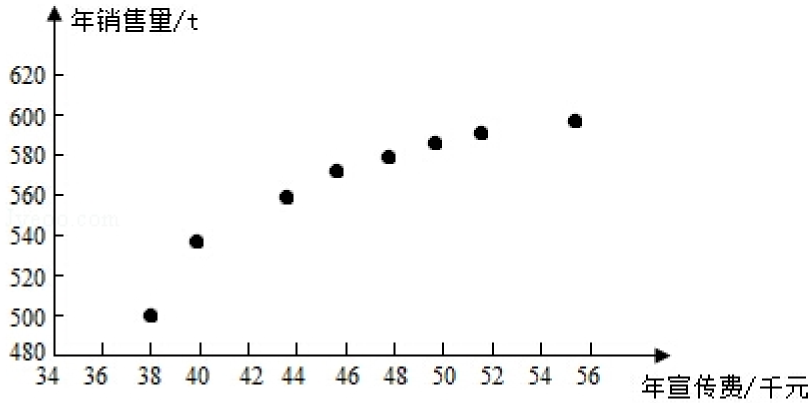
则有直线 AE 与直线 CF 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.



【点评】本题考查空间直线和平面的位置关系和空间角的求法，主要考查面面垂直的判定定理和异面直线所成的角的求法：向量法，考查运算能力，属于中档题.

19．（12 分）某公司为确定下一年度投入某种产品的宣传费，需了解年宣传费 x

（单位：千元）对年销售量 y（单位：t）和年利润 z（单位：千元）的影响，对近 8 年的年宣传费 x_i 和年销售量 y_i（i=1，2，…，8）数据作了初步处理，得到下面的散点图及一些统计量的值．



$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{w}$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\overline{x})^2$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(w_i-\overline{w})^2$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(w_i-\overline{w})(y_i-\overline{y})$
46.6	563	6.8	289.8	1.6	1469	108.8

表中 $w_i=\sqrt{x_i}$，$\overline{w}=\frac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{8}w_i$

（Ⅰ）根据散点图判断，$y=a+bx$ 与 $y=c+d\sqrt{x}$哪一个适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型？（给出判断即可，不必说明理由）

（Ⅱ）根据（Ⅰ）的判断结果及表中数据，建立 y 关于 x 的回归方程；

（Ⅲ）已知这种产品的年利润 z 与 x、y 的关系为 $z=0.2y-x$．根据（Ⅱ）的结果回答下列问题：

(i）年宣传费 x=49 时，年销售量及年利润的预报值是多少？

(ii）年宣传费 x 为何值时，年利润的预报值最大？

附：对于一组数据（u_1 v_1），（u_2 v_2）.....（u_n v_n），其回归线 $v=\alpha+\beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为：$\hat{\beta}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u})(v_i-\overline{v})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u})^2}$，$\hat{\alpha}=\overline{v}-\hat{\beta}\overline{u}$.

【考点】BK：线性回归方程．

【专题】5I：概率与统计.

【分析】（Ⅰ）根据散点图，即可判断出，

（Ⅱ）先建立中间量 $w=\sqrt{x}$，建立 y 关于 w 的线性回归方程，根据公式求出 w，问题得以解决；

（Ⅲ）（i）年宣传费 x=49 时，代入到回归方程，计算即可，

（ii）求出预报值得方程，根据函数的性质，即可求出.

【解答】解：（Ⅰ）由散点图可以判断，$y=c+d\sqrt{x}$适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型；

（Ⅱ）令 $w=\sqrt{x}$，先建立 y 关于 w 的线性回归方程，由于$\hat{d}=\frac{108.8}{1.6}=68$，

$\hat{c}=\overline{y}-\hat{d}\overline{w}=563-68\times6.8=100.6$，

所以 y 关于 w 的线性回归方程为$\hat{y}=100.6+68w$，

因此 y 关于 x 的回归方程为$\hat{y}=100.6+68\sqrt{x}$，

（Ⅲ）（i）由（Ⅱ）知，当 x=49 时，年销售量 y 的预报值$\hat{y}=100.6+68\sqrt{49}=576.6$

，

年利润 z 的预报值$\hat{z}=576.6\times0.2-49=66.32$，

（ii）根据（Ⅱ）的结果可知，年利润 z 的预报值$\hat{z}=0.2(100.6+68\sqrt{x})-x=-x+13.6\sqrt{x}+20.12$，

当$\sqrt{x}=\frac{13.6}{2}=6.8$时，即当 x=46.24 时，年利润的预报值最大.

【点评】本题主要考查了线性回归方程和散点图的问题，准确的计算是本题的关键，属于中档题.

20．（12 分）在直角坐标系 xOy 中，曲线 C：$y=\frac{x^2}{4}$与直线 l：y=kx+a（a＞0）交于 M，N 两点.

（Ⅰ）当 k=0 时，分别求 C 在点 M 和 N 处的切线方程.

（Ⅱ）y 轴上是否存在点 P，使得当 k 变动时，总有∠OPM=∠OPN？（说明理由）

【考点】KH：直线与圆锥曲线的综合．

【分析】（I）联立$\begin{cases}y=a\\y=\frac{x^2}{4}\end{cases}$，可得交点 M，N 的坐标，由曲线 C：$y=\frac{x^2}{4}$，利用导数的运算法则可得：$y'=\frac{x}{2}$，利用导数的几何意义、点斜式即可得出切线方程．

（II）存在符合条件的点（0，﹣a），设 P（0，b）满足∠OPM=∠OPN．M（x_1，y_1），N（x_2，y_2），直线 PM，PN 的斜率分别为：k_1，k_2．直线方程与抛物线方程联立化为 $x^2-4kx-4a=0$，利用根与系数的关系、斜率计算公式可得 $k_1+k_2=\frac{k(a+b)}{a}$．$k_1+k_2=0$⇔直线 PM，PN 的倾斜角互补⇔∠OPM=∠OPN．即可证明．

【解答】解：（I）联立$\begin{cases}y=a\\y=\frac{x^2}{4}\end{cases}$，不妨取 M$(2\sqrt{a}，a)$，N$(-2\sqrt{a}，a)$，

由曲线 C：$y=\frac{x^2}{4}$可得：$y'=\frac{x}{2}$，

∴曲线 C 在 M 点处的切线斜率为$\frac{2\sqrt{a}}{2}=\sqrt{a}$，其切线方程为：$y-a=\sqrt{a}(x-2\sqrt{a})$，

化为$\sqrt{a}x-y-a=0$．

同理可得曲线 C 在点 N 处的切线方程为：$\sqrt{a}x+y+a=0$．

（II）存在符合条件的点（0，﹣a），下面给出证明：

设 P（0，b）满足∠OPM=∠OPN．M（x_1，y_1），N（x_2，y_2），直线 PM，PN 的斜率分别为：k_1，k_2．

联立$\begin{cases}y=kx+a\\y=\frac{x^2}{4}\end{cases}$，化为 $x^2-4kx-4a=0$，

∴$x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4a$．

∴$k_1+k_2=\frac{y_1-b}{x_1}+\frac{y_2-b}{x_2}=\frac{2kx_1x_2+(a-b)(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\frac{k(a+b)}{a}$．

当 $b=-a$ 时，$k_1+k_2=0$，直线 PM，PN 的倾斜角互补，

∴∠OPM=∠OPN．

∴点 P（0，﹣a）符合条件．

【点评】本题考查了导数的运算法则、利用导数的几何意义研究切线方程、直线与抛物线相交问题转化为方程联立可得根与系数的关系、斜率计算公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．

21．（12 分）已知函数 f（x）=$x^3+ax+\frac{1}{4}$，g（x）=﹣lnx

（i）当 a 为何值时，x 轴为曲线 y=f（x）的切线；

（ii）用 min{m，n}表示 m，n 中的最小值，设函数 h（x）=min{f（x），g（x）}（x>0），讨论 h（x）零点的个数．

【考点】6E：利用导数研究函数的最值；6H：利用导数研究曲线上某点切线方程．

【专题】2：创新题型；53：导数的综合应用．

【分析】（i）f′（x）=$3x^2+a$．设曲线 y=f（x）与 x 轴相切于点 P（x_0，0），则 f（x_0）=0，f′（x_0）=0 解出即可．

（ii）对 x 分类讨论：当 x∈（1，+∞）时，g（x）=﹣lnx<0，可得函数 h（x）=min{f（x），g（x）}≤g（x）<0，即可得出零点的个数．

当 x=1 时，对 a 分类讨论：a≥﹣$\frac{5}{4}$，a<﹣$\frac{5}{4}$，即可得出零点的个数；

当 x∈（0，1）时，g（x）=﹣lnx>0，因此只考虑 f（x）在（0，1）内的零点个数即可．对 a 分类讨论：①当 a≤﹣3 或 a≥0 时，②当﹣3<a<0 时，利用导数研究其单调性极值即可得出．

【解答】解：（i）f′（x）=$3x^2+a$．

设曲线 y=f（x）与 x 轴相切于点 P（x_0，0），则 f（x_0）=0，f′（x_0）=0，

∴$\begin{cases}x_0^3+ax_0+\frac{1}{4}=0\\3x_0^2+a=0\end{cases}$，解得 $x_0=\frac{1}{2}$，a=$-\frac{3}{4}$．

因此当 $a=-\frac{3}{4}$时，x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线；

（ii）当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)=-\ln x<0$，

∴函数 $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}<0$，

故 $h(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 时无零点．

当 $x=1$ 时，若 $a\geqslant-\frac{5}{4}$，则 $f(1)=a+\frac{5}{4}\geqslant0$，

∴$h(x)=\min\{f(1),g(1)\}=g(1)=0$，故 $x=1$ 是函数 $h(x)$ 的一个零点；

若 $a<-\frac{5}{4}$，则 $f(1)=a+\frac{5}{4}<0$，∴$h(x)=\min\{f(1),g(1)\}=f(1)<0$，故 $x=1$ 不是函数 $h(x)$ 的零点；

当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)=-\ln x>0$，因此只考虑 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内的零点个数即可．

①当 $a\leqslant-3$ 或 $a\geqslant0$ 时，$f'(x)=3x^2+a$ 在 $(0,1)$ 内无零点，因此 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内单调，

而 $f(0)=\frac{1}{4}$，$f(1)=a+\frac{5}{4}$，∴当 $a\leqslant-3$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有一个零点，

当 $a\geqslant0$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内没有零点．

②当 $-3<a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{\frac{-a}{3}}\right)$内单调递减，在 $\left(\sqrt{\frac{-a}{3}},1\right)$内单调递增，故当 $x=\sqrt{\frac{-a}{3}}$时，$f(x)$ 取得最小值 $f\left(\sqrt{\frac{-a}{3}}\right)=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{-a}{3}}+\frac{1}{4}$．

若 $f\left(\sqrt{\frac{-a}{3}}\right)>0$，即 $-\frac{3}{4}<a<0$，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内无零点．

若 $f\left(\sqrt{\frac{-a}{3}}\right)=0$，即 $a=-\frac{3}{4}$，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有唯一零点．

若 $f\left(\sqrt{\frac{-a}{3}}\right)<0$，即 $-3<a<-\frac{3}{4}$，由 $f(0)=\frac{1}{4}$，$f(1)=a+\frac{5}{4}$，

∴当 $-\frac{5}{4}<a<-\frac{3}{4}$时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有两个零点．当 $-3<a\leqslant-\frac{5}{4}$时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有一个零点．

综上可得：$a<-\frac{5}{4}$时，函数 $h(x)$ 有一个零点．

当 $a>-\frac{3}{4}$时，$h(x)$ 有一个零点；

当 a=$-\frac{3}{4}$或$-\frac{5}{4}$时，h（x）有两个零点；

当$-\frac{5}{4}<a<-\frac{3}{4}$时，函数 h（x）有三个零点．

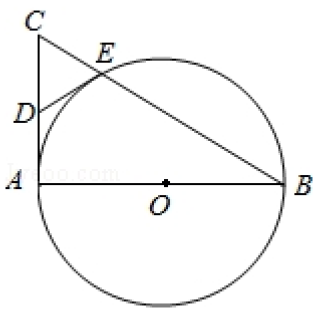
【点评】本题考查了导数的运算法则、利用导数的几何意义研究切线方程、利用导数研究函数的单调性极值，考查了分类讨论思想方法、推理能力与计算能力，属于难题．

选修 4 一 1:几何证明选讲

22．（10 分）如图，AB 是⊙O 的直径，AC 是⊙O 的切线，BC 交⊙O 于点 E．

（Ⅰ）若 D 为 AC 的中点，证明：DE 是⊙O 的切线；

（Ⅱ）若 OA=$\sqrt{3}$CE，求∠ACB 的大小．



【考点】N9：圆的切线的判定定理的证明．

【专题】5B：直线与圆．

【分析】（Ⅰ）连接 AE 和 OE，由三角形和圆的知识易得∠OED=90°，可得 DE 是⊙O 的切线；

（Ⅱ）设 CE=1，AE=x，由射影定理可得关于 x 的方程 $x^2=\sqrt{12-x^2}$，解方程可得 x 值，可得所求角度．

【解答】解：（Ⅰ）连接 AE，由已知得 AE⊥BC，AC⊥AB，

在 RT△ABC 中，由已知可得 DE=DC，∴∠DEC=∠DCE，

连接 OE，则∠OBE=∠OEB，

又∠ACB+∠ABC=90°，∴∠DEC+∠OEB=90°，

∴∠OED=90°，∴DE 是⊙O 的切线；

（Ⅱ）设 CE=1，AE=x，

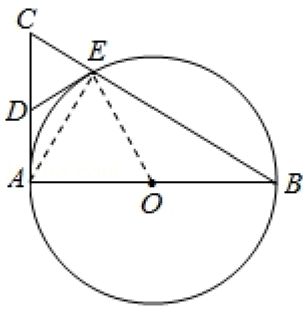
由已知得 $AB=2\sqrt{3}$，$BE=\sqrt{12-x^2}$，

由射影定理可得 $AE^2=CE\bullet BE$，

$\therefore x^2=\sqrt{12-x^2}$，即 $x^4+x^2-12=0$，

解方程可得 $x=\sqrt{3}$

$\therefore \angle ACB=60°$



【点评】本题考查圆的切线的判定，涉及射影定理和三角形的知识，属基础题．

选修 4 一 4：坐标系与参数方程

23．（10 分）在直角坐标系 xOy 中，直线 C_1：$x=-2$，圆 C_2：$(x-1)^2+(y-2)^2=1$，以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系．

（Ⅰ）求 C_1，C_2 的极坐标方程；

（Ⅱ）若直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{4}$（$\rho\in R$），设 C_2 与 C_3 的交点为 M，N，求△C_2MN 的面积．

【考点】Q4：简单曲线的极坐标方程．

【专题】5S：坐标系和参数方程．

【分析】（Ⅰ）由条件根据 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 求得 C_1，C_2 的极坐标方程．

（Ⅱ）把直线 C_3 的极坐标方程代入 $\rho^2-3\sqrt{2}\rho+4=0$，求得 ρ_1 和 ρ_2 的值，结合圆的半径可得 $C_2M\perp C_2N$，从而求得△C_2MN 的面积 $\frac{1}{2}\bullet C_2M\bullet C_2N$ 的值．

【解答】解：（Ⅰ）由于 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，$\therefore C_1$：$x=-2$ 的

极坐标方程为 $\rho\cos\theta=-2$，

故 C_2：$(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 的极坐标方程为：

$(\rho\cos\theta-1)^2+(\rho\sin\theta-2)^2=1$，

化简可得 $\rho^2-(2\rho\cos\theta+4\rho\sin\theta)+4=0$.

（Ⅱ）把直线 C_3 的极坐标方程 $\theta=\frac{\pi}{4}$（$\rho\in R$）代入

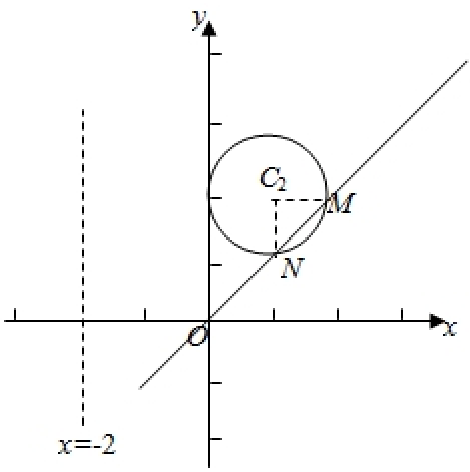
圆 C_2：$(x-1)^2+(y-2)^2=1$，

可得 $\rho^2-(2\rho\cos\theta+4\rho\sin\theta)+4=0$，

求得 $\rho_1=2\sqrt{2}$，$\rho_2=\sqrt{2}$，

$\therefore |MN|=|\rho_1-\rho_2|=\sqrt{2}$，由于圆 C_2 的半径为 1，$\therefore C_2M\perp C_2N$，

$\triangle C_2MN$ 的面积为$\frac{1}{2}\bullet C_2M\bullet C_2N=\frac{1}{2}\bullet 1\bullet 1=\frac{1}{2}$.



【点评】本题主要考查简单曲线的极坐标方程，点的极坐标的定义，属于基础题.

选修 4 一 5：不等式选讲

24．（10 分）已知函数 $f(x)=|x+1|-2|x-a|$，$a>0$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)>1$ 的解集；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 的图象与 x 轴围成的三角形面积大于 6，求 a 的取值范围.

【考点】R5：绝对值不等式的解法.

【专题】59：不等式的解法及应用．

【分析】（Ⅰ）当 a=1 时，把原不等式去掉绝对值，转化为与之等价的三个不等式组，分别求得每个不等式组的解集，再取并集，即得所求．（Ⅱ）化简函数 f（x）的解析式，求得它的图象与 x 轴围成的三角形的三个顶点的坐标，从而求得 f（x）的图象与 x 轴围成的三角形面积；再根据 f（x）的图象与 x 轴围成的三角形面积大于 6，从而求得 a 的取值范围．

【解答】解：（Ⅰ）当 a=1 时，不等式 f（x）＞1，即 $|x+1|-2|x-1|>1$，

即 $\begin{cases}x<-1\\-x-1-2(1-x)>1\end{cases}$①，或 $\begin{cases}-1\leqslant x<1\\x+1-2(1-x)>1\end{cases}$②，

或 $\begin{cases}x\geqslant 1\\x+1-2(x-1)>1\end{cases}$③．

解①求得 $x\in\varnothing$，解②求得 $\frac{2}{3}<x<1$，解③求得 $1\leqslant x<2$．

综上可得，原不等式的解集为（$\frac{2}{3}$，2）．

（Ⅱ）函数 $f(x)=|x+1|-2|x-a|=\begin{cases}x-1-2a,& x<-1\\3x+1-2a,& -1\leqslant x\leqslant a\\-x+1+2a,& x>a\end{cases}$，

由此求得 f（x）的图象与 x 轴的交点 A （$\frac{2a-1}{3}$，0），

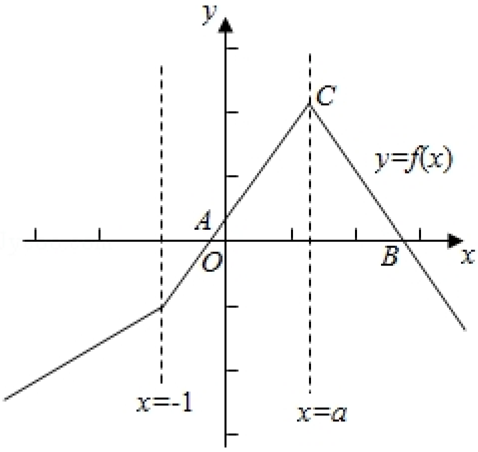
B（2a+1，0），

故 f（x）的图象与 x 轴围成的三角形的第三个顶点 C（a，a+1），

由△ABC 的面积大于 6，

可得 $\frac{1}{2}[2a+1-\frac{2a-1}{3}]\cdot(a+1)>6$，求得 a＞2．

故要求的 a 的范围为（2，+∞）．



【点评】本题主要考查绝对值不等式的解法，体现了转化、分类讨论的数学思想，属于中档题．