2014年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标 I ）

一、选择题（共12小题，每小题5分）

1．（5分）已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3\geqslant 0\}$，$B=\{x|-2\leqslant x<2\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$[1,2)$　　B．$[-1,1]$　　C．$[-1,2)$　　D．$[-2,-1]$

2．（5分）$\frac{(1+i)^3}{(1-i)^2}=$（　　）

A．$1+i$　　B．$1-i$　　C．$-1+i$　　D．$-1-i$

3．（5分）设函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域都为R，且 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，则下列结论正确的是（　　）

A．$f(x)\cdot g(x)$ 是偶函数　　B．$|f(x)|\cdot g(x)$ 是奇函数

C．$f(x)\cdot|g(x)|$ 是奇函数　　D．$|f(x)\cdot g(x)|$ 是奇函数

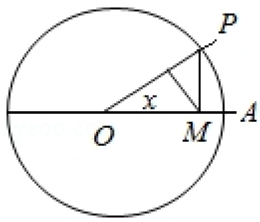
4．（5分）已知F为双曲线C：$x^2-my^2=3m$（$m>0$）的一个焦点，则点F到C的一条渐近线的距离为（　　）

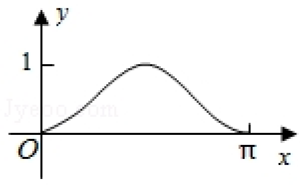
A．$\sqrt{3}$　　B．3　　C．$\sqrt{3}m$　　D．$3m$

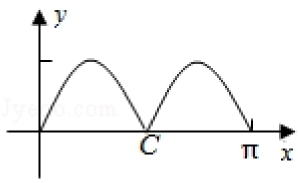
5．（5分）4位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动，则周六、周日都有同学参加公益活动的概率为（　　）

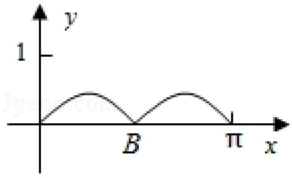
A．$\frac{1}{8}$　　B．$\frac{3}{8}$　　C．$\frac{5}{8}$　　D．$\frac{7}{8}$

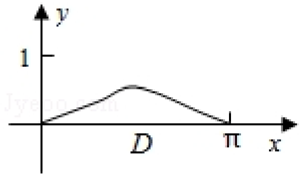
6．（5分）如图，圆O的半径为1，A是圆上的定点，P是圆上的动点，角x的始边为射线OA，终边为射线OP，过点P作直线OA的垂线，垂足为M，将点M到直线OP的距离表示为x的函数 $f(x)$，则 $y=f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 的图象大致为（　　）



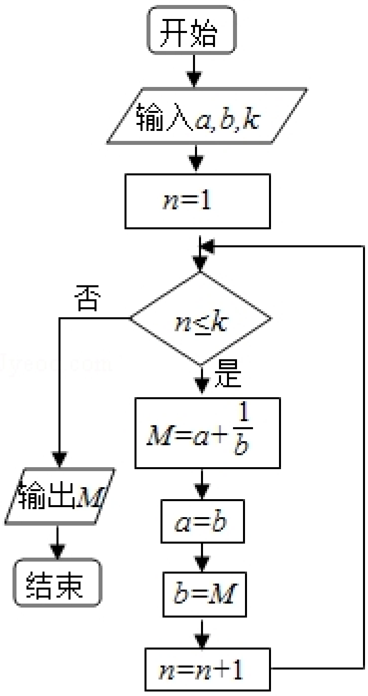
A. 

B. 

C. 

D. 

7. （5 分）执行如图的程序框图，若输入的 a，b，k 分别为 1，2，3，则输出的 M=（　　）



A. $\frac{20}{3}$　　B. $\frac{7}{2}$　　C. $\frac{16}{5}$　　D. $\frac{15}{8}$

8. （5 分）设 α∈（0，$\frac{\pi}{2}$），β∈（0，$\frac{\pi}{2}$），且 $\tan\alpha=\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$，则（　　）

A. $3\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$　　B. $3\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$　　C. $2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$　　D. $2\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

9. （5 分）不等式组 $\begin{cases} x+y\geqslant 1 \\ x-2y\leqslant 4 \end{cases}$ 的解集记为 D，有下列四个命题：

p_1：∀（x，y）∈D，x+2y≥﹣2 p_2：∃（x，y）∈D，x+2y≥2

p_3：∀（x，y）∈D，x+2y≤3p_4：∃（x，y）∈D，x+2y≤﹣1

其中真命题是（　　）

A．p_2，p_3　　　B．p_1，p_4　　　C．p_1，p_2　　　D．p_1，p_3

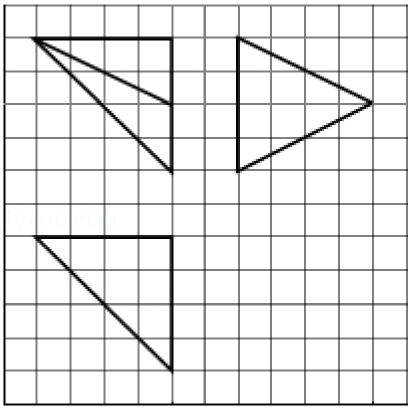
10．（5 分）已知抛物线 C：$y^2=8x$ 的焦点为 F，准线为 l，P 是 l 上一点，Q 是直线 PF 与 C 的一个交点，若$\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$，则$|QF|$=（　　）

A．$\frac{7}{2}$　　　B．3　　　C．$\frac{5}{2}$　　　D．2

11．（5 分）已知函数 f（x）=ax^3-3x^2+1，若 f（x）存在唯一的零点 x_0，且 x_0＞0，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．（1，+∞）　B．（2，+∞）　C．（﹣∞，﹣1）D．（﹣∞，﹣2）

12．（5 分）如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某多面体的三视图，则该多面体的各条棱中，最长的棱的长度为（　　）



A．$6\sqrt{2}$　　　B．6　　　C．$4\sqrt{2}$　　　D．4

二、填空题（共 4 小题，每小题 5 分）

13．（5 分）（x﹣y）$(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^7 的系数为________．（用数字填写答案）

14．（5 分）甲、乙、丙三位同学被问到是否去过 A，B，C 三个城市时，

甲说：我去过的城市比乙多，但没去过 B 城市；

乙说：我没去过 C 城市；

丙说：我们三人去过同一城市；

由此可判断乙去过的城市为________．

15．（5 分）已知 A，B，C 为圆 O 上的三点，若$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}$（$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$），则$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为________．

16．（5 分）已知 a，b，c 分别为△ABC 的三个内角 A，B，C 的对边，a=2 且（2+b）（sinA﹣ sinB）=（c﹣ b）sinC，则△ABC 面积的最大值为________.

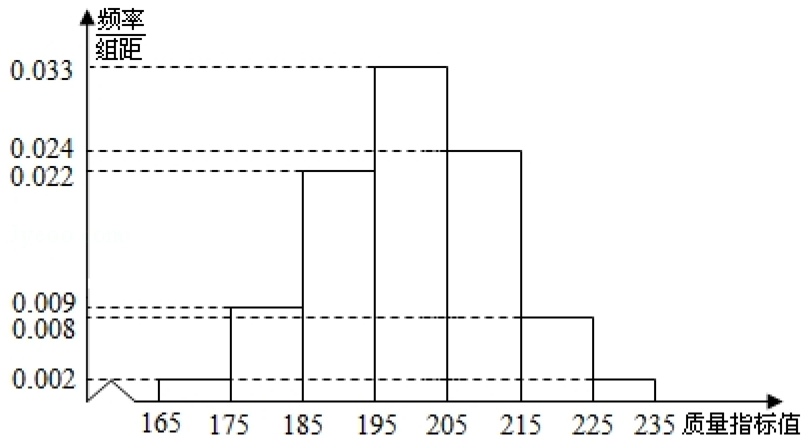
三、解答题

17．（12 分）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$a_n\neq 0$，$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，其中 λ 为常数．

（Ⅰ）证明：$a_{n+2}-a_n=\lambda$

（Ⅱ）是否存在 λ，使得$\{a_n\}$为等差数列？并说明理由．

18．（12 分）从某企业生产的某种产品中抽取 500 件，测量这些产品的一项质量指标值，由测量结果得如下频率分布直方图：



（Ⅰ）求这 500 件产品质量指标值的样本平均数$\overline{x}$和样本方差 s^2（同一组中数据用该组区间的中点值作代表）；

（Ⅱ）由直方图可以认为，这种产品的质量指标值 Z 服从正态分布 N（μ，σ^2），其中 μ 近似为样本平均数$\overline{x}$，σ^2 近似为样本方差 s^2．

（i）利用该正态分布，求 P（187.8＜Z＜212.2）；

（ii）某用户从该企业购买了100件这种产品，记X表示这100件产品中质量指标值位于区间（187.8，212.2）的产品件数，利用（i）的结果，求EX．

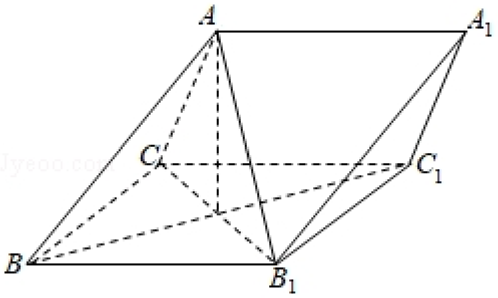
附：$\sqrt{150}\approx 12.2$．

若Z～N（μ，σ²）则P（μ﹣σ＜Z＜μ+σ）=0.6826，P（μ﹣2σ＜Z＜μ+2σ）=0.9544．

19．（12分）如图，三棱柱ABC﹣$A_1B_1C_1$中，侧面BB_1C_1C为菱形，AB⊥B_1C．

（Ⅰ）证明：AC=AB_1；

（Ⅱ）若AC⊥AB_1，∠CBB_1=60°，AB=BC，求二面角A﹣A_1B_1﹣C_1的余弦值．



20．（12分）已知点A（0，﹣2），椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，F是椭圆的右焦点，直线AF的斜率为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，O为坐标原点．

（Ⅰ）求E的方程；

（Ⅱ）设过点A的直线l与E相交于P，Q两点，当△OPQ的面积最大时，求l的方程．

21．（12 分）设函数 f（x）=$ae^{x}\ln x+\frac{be^{x-1}}{x}$，曲线 y=f（x）在点（1，f（1））处得切线方程为 y=e（x－ 1）+2．

（Ⅰ）求 a、b；

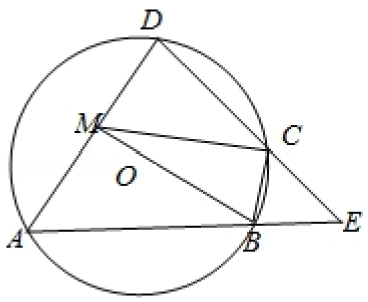
（Ⅱ）证明：f（x）＞1．

选修 4-1：几何证明选讲

22．（10 分）如图，四边形 ABCD 是⊙O 的内接四边形，AB 的延长线与 DC 的延长线交于点 E，且 CB=CE．

（Ⅰ）证明：∠D=∠E；

（Ⅱ）设 AD 不是⊙O 的直径，AD 的中点为 M，且 MB=MC，证明：△ADE 为等边三角形．



选修 4-4：坐标系与参数方程

23．已知曲线 C：$\frac{x^{2}}{4}+\frac{y^{2}}{9}=1$，直线 l：$\begin{cases}x=2+t\\y=2-2t\end{cases}$（t 为参数）

（Ⅰ）写出曲线 C 的参数方程，直线 l 的普通方程．

（Ⅱ）过曲线 C 上任意一点 P 作与 l 夹角为 30°的直线，交 l 于点 A，求|PA|的最大值与最小值．

选修 4-5：不等式选讲

24．若 $a>0$，$b>0$，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{ab}$.

（Ⅰ）求 a^3+b^3 的最小值；

（Ⅱ）是否存在 a，b，使得 $2a+3b=6$？并说明理由.

2014年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标Ⅰ）

参考答案与试题解析

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分）

1．（5 分）已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3\geq 0\}$，$B=\{x|-2\leq x<2\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$[1,2)$　　B．$[-1,1]$　　C．$[-1,2)$　　D．$[-2,-1]$

【考点】1E：交集及其运算．

【专题】5J：集合．

【分析】求出 A 中不等式的解集确定出 A，找出 A 与 B 的交集即可．

【解答】解：由 A 中不等式变形得：$(x-3)(x+1)\geq 0$，

解得：$x\geq 3$ 或 $x\leq -1$，即 $A=(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$，

$\because B=[-2,2)$，

$\therefore A\cap B=[-2,-1]$．

故选：D．

【点评】此题考查了交集及其运算，熟练掌握交集的定义是解本题的关键．

2．（5 分）$\frac{(1+i)^3}{(1-i)^2}=$（　　）

A．$1+i$　　B．$1-i$　　C．$-1+i$　　D．$-1-i$

【考点】A5：复数的运算．

【专题】5N：数系的扩充和复数．

【分析】由条件利用两个复数代数形式的乘除法，虚数单位 i 的幂运算性质，计算求得结果．

【解答】解：$\frac{(1+i)^3}{(1-i)^2}=\frac{2i(1+i)}{-2i}=-(1+i)=-1-i$，

故选：D.

【点评】本题主要考查两个复数代数形式的乘除法，虚数单位 i 的幂运算性质，属于基础题.

3．（5 分）设函数 f（x），g（x）的定义域都为 R，且 f（x）是奇函数，g（x）是偶函数，则下列结论正确的是（　　）

A．f（x）•g（x）是偶函数　　B．|f（x）|•g（x）是奇函数

C．f（x）•|g（x）|是奇函数　　D．|f（x）•g（x）|是奇函数

【考点】3K：函数奇偶性的性质与判断.

【专题】51：函数的性质及应用.

【分析】根据函数奇偶性的性质即可得到结论.

【解答】解：∵f（x）是奇函数，g（x）是偶函数，

∴f（﹣x）=﹣f（x），g（﹣x）=g（x），

f（﹣x）•g（﹣x）=﹣f（x）•g（x），故函数是奇函数，故 A 错误，

|f（﹣x）|•g（﹣x）=|f（x）|•g（x）为偶函数，故 B 错误，

f（﹣x）•|g（﹣x）|=﹣f（x）•|g（x）|是奇函数，故 C 正确.

|f（﹣x）•g（﹣x）|=|f（x）•g（x）|为偶函数，故 D 错误，

故选：C.

【点评】本题主要考查函数奇偶性的判断，根据函数奇偶性的定义是解决本题的关键.

4．（5 分）已知 F 为双曲线 C：$x^2-my^2=3m$（m＞0）的一个焦点，则点 F 到 C 的一条渐近线的距离为（　　）

A．$\sqrt{3}$　　B．3　　C．$\sqrt{3}m$　　D．3m

【考点】KC：双曲线的性质.

【专题】11：计算题；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】双曲线方程化为标准方程，求出焦点坐标，一条渐近线方程，利用点到直线的距离公式，可得结论．

【解答】解：双曲线 C：$x^2-my^2=3m$（m＞0）可化为$\frac{x^2}{3m}-\frac{y^2}{3}=1$，

∴一个焦点为（$\sqrt{3m+3}$，0），一条渐近线方程为$x+\sqrt{m}y=0$，

∴点 F 到 C 的一条渐近线的距离为$\frac{\sqrt{3m+3}}{\sqrt{1+m}}=\sqrt{3}$.

故选：A.

【点评】本题考查双曲线的方程与性质，考查点到直线的距离公式，属于基础题．

5．（5 分）4 位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动，则周六、周日都有同学参加公益活动的概率为（　　）

A．$\frac{1}{8}$　　B．$\frac{3}{8}$　　C．$\frac{5}{8}$　　D．$\frac{7}{8}$

【考点】C6：等可能事件和等可能事件的概率．

【专题】11：计算题；5I：概率与统计．

【分析】求得 4 位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动、周六、周日都有同学参加公益活动的情况，利用古典概型概率公式求解即可．

【解答】解：4 位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动，共有 $2^4=16$ 种情况，

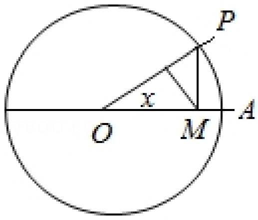
周六、周日都有同学参加公益活动，共有 $2^4-2=16-2=14$ 种情况，

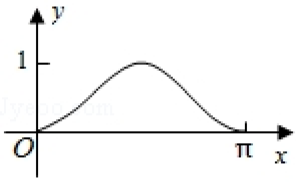
∴所求概率为$\frac{14}{16}=\frac{7}{8}$.

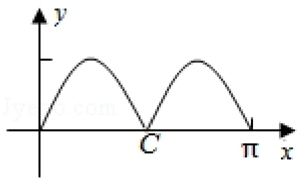
故选：D.

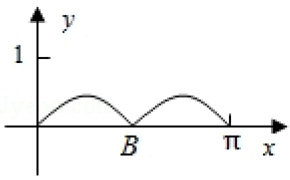
【点评】本题考查古典概型，是一个古典概型与排列组合结合的问题，解题时先要判断该概率模型是不是古典概型，再要找出随机事件 A 包含的基本事件的个数和试验中基本事件的总数．

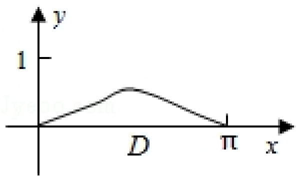
6．（5 分）如图，圆 O 的半径为 1，A 是圆上的定点，P 是圆上的动点，角 x 的始边为射线 OA，终边为射线 OP，过点 P 作直线 OA 的垂线，垂足为 M，将点 M 到直线 OP 的距离表示为 x 的函数 f（x），则 y=f（x）在[0，π]的图象大致为（　　）



A．

B．

C．

D．

【考点】3P：抽象函数及其应用．

【专题】57：三角函数的图像与性质．

【分析】在直角三角形 OMP 中，求出 OM，注意长度、距离为正，再根据直角三角形的锐角三角函数的定义即可得到 f（x）的表达式，然后化简，分析周期和最值，结合图象正确选择．

【解答】解：在直角三角形 OMP 中，OP=1，∠POM=x，则 OM=|cosx|，

∴点 M 到直线 OP 的距离表示为 x 的函数 f（x）=OM|sinx|

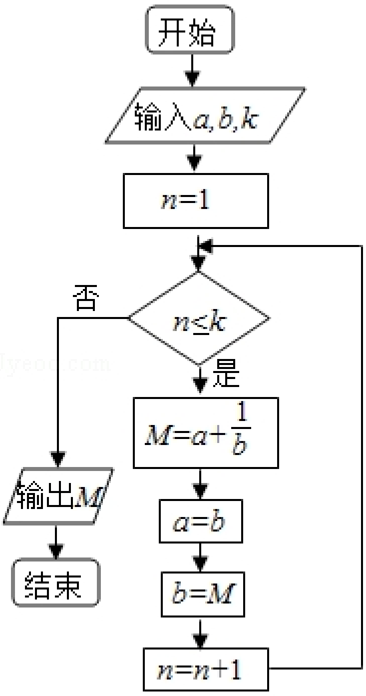
$=|\cos x|\bullet|\sin x|=\frac{1}{2}|\sin 2x|$，

其周期为 $T=\frac{\pi}{2}$，最大值为$\frac{1}{2}$，最小值为 0，

故选：C．

【点评】本题主要考查三角函数的图象与性质，正确表示函数的表达式是解题的关键，同时考查二倍角公式的运用．

7．（5 分）执行如图的程序框图，若输入的 a，b，k 分别为 1，2，3，则输出的 M=（　　）



A．$\frac{20}{3}$　　B．$\frac{7}{2}$　　C．$\frac{16}{5}$　　D．$\frac{15}{8}$

【考点】EF：程序框图．

【专题】5I：概率与统计．

【分析】根据框图的流程模拟运行程序，直到不满足条件，计算输出 M 的值．

【解答】解：由程序框图知：第一次循环 $M=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，a=2，$b=\frac{3}{2}$，n=2；

第二次循环 $M=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$，$a=\frac{3}{2}$，$b=\frac{8}{3}$，n=3；

第三次循环 $M=\frac{3}{2}+\frac{3}{8}=\frac{15}{8}$，$a=\frac{8}{3}$，$b=\frac{15}{8}$，n=4．

不满足条件 n≤3，跳出循环体，输出 $M=\frac{15}{8}$．

故选：D．

【点评】本题考查了当型循环结构的程序框图，根据框图的流程模拟运行程序是解答此类问题的常用方法．

8．（5 分）设 α∈（0，$\frac{\pi}{2}$），β∈（0，$\frac{\pi}{2}$），且 $\tan\alpha=\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$，则（　　）

A．$3\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$　　B．$3\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$　　C．$2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$　　D．$2\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

【考点】GF：三角函数的恒等变换及化简求值．

【专题】56：三角函数的求值．

【分析】化切为弦，整理后得到 sin（α﹣β）=cosα，由该等式左右两边角的关系可排除选项 A，B，然后验证 C 满足等式 sin（α﹣β）=cosα，则答案可求．

【解答】解：由 $\tan\alpha=\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$，得：

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$，

即 $\sin\alpha\cos\beta=\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha$，

$\sin(\alpha-\beta)=\cos\alpha=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$，

∵$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，

∴当 $2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$ 成立．

故选：C．

【点评】本题考查三角函数的化简求值，训练了利用排除法及验证法求解选择题，是基础题．

9．（5 分）不等式组 $\begin{cases}x+y\geqslant 1\\x-2y\leqslant 4\end{cases}$ 的解集记为 D，有下列四个命题：

p_1：∀（x，y）∈D，x+2y≥﹣2 p_2：∃（x，y）∈D，x+2y≥2

p_3：∀（x，y）∈D，x+2y≤3 p_4：∃（x，y）∈D，x+2y≤﹣1

其中真命题是（　　）

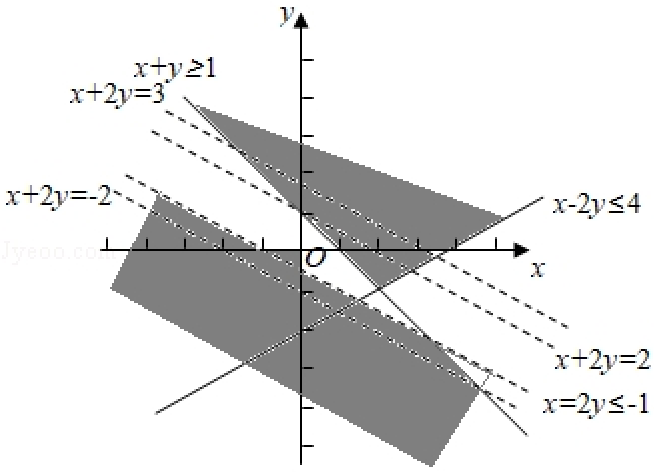
A．p_2，p_3　　B．p_1，p_4　　C．p_1，p_2　　D．p_1，p_3

【考点】2K：命题的真假判断与应用；7A：二元一次不等式的几何意义．

【专题】59：不等式的解法及应用；5L：简易逻辑．

【分析】作出不等式组 $\begin{cases}x+y\geqslant 1\\x-2y\leqslant 4\end{cases}$ 的表示的区域 D，对四个选项逐一分析即可．

【解答】解：作出图形如下：



由图知，区域 D 为直线 $x+y=1$ 与 $x-2y=4$ 相交的上部角型区域，

p_1：区域 D 在 $x+2y\geqslant -2$ 区域的上方，故：$\forall$（x，y）$\in$D，$x+2y\geqslant -2$ 成立；

p_2：在直线 $x+2y=2$ 的右上方和区域 D 重叠的区域内，$\exists$（x，y）$\in$D，$x+2y\geqslant 2$，故 p_2：$\exists$（x，y）$\in$D，$x+2y\geqslant 2$ 正确；

p_3：由图知，区域 D 有部分在直线 $x+2y=3$ 的上方，因此 p_3：$\forall$（x，y）$\in$D，$x+2y\leqslant 3$ 错误；

p_4：$x+2y\leqslant -1$ 的区域（左下方的虚线区域）恒在区域 D 下方，故 p_4：$\exists$（x，y）$\in$D，$x+2y\leqslant -1$ 错误；

综上所述，p_1、p_2 正确；

故选：C.

【点评】本题考查命题的真假判断与应用，着重考查作图能力，熟练作图，正确分析是关键，属于难题.

10. （5 分）已知抛物线 C：$y^2=8x$ 的焦点为 F，准线为 l，P 是 l 上一点，Q 是直线 PF 与 C 的一个交点，若 $\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$，则|QF|=（　　）

A. $\frac{7}{2}$　　　　B. 3　　　　C. $\frac{5}{2}$　　　　D. 2

【考点】K8：抛物线的性质.

【专题】11：计算题；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】求得直线 PF 的方程，与 $y^2=8x$ 联立可得 x=1，利用|QF|=d 可求．

【解答】解：设 Q 到 l 的距离为 d，则|QF|=d，

∵$\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$，

∴|PQ|=3d，

∴不妨设直线 PF 的斜率为$-\frac{2\sqrt{2}d}{d}=-2\sqrt{2}$，

∵F（2，0），

∴直线 PF 的方程为 $y=-2\sqrt{2}(x-2)$，

与 $y^2=8x$ 联立可得 x=1，

∴|QF|=d=1+2=3，

故选：B．

【点评】本题考查抛物线的简单性质，考查直线与抛物线的位置关系，属于基础题．

11．（5 分）已知函数 $f(x)=ax^3-3x^2+1$，若 f（x）存在唯一的零点 x_0，且 $x_0>0$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．（1，+∞）　B．（2，+∞）　C．（﹣∞，﹣1）　D．（﹣∞，﹣2）

【考点】53：函数的零点与方程根的关系．

【专题】11：计算题；51：函数的性质及应用；53：导数的综合应用．

【分析】由题意可得 $f'(x)=3ax^2-6x=3x(ax-2)$，f（0）=1；分类讨论确定函数的零点的个数及位置即可．

【解答】解：∵$f(x)=ax^3-3x^2+1$，

∴$f'(x)=3ax^2-6x=3x(ax-2)$，f（0）=1；

①当 a=0 时，$f(x)=-3x^2+1$ 有两个零点，不成立；

②当 a＞0 时，f（x）=ax³− 3x²+1 在（− ∞，0）上有零点，故不成立；

③当 a＜0 时，f（x）=ax³− 3x²+1 在（0，+∞）上有且只有一个零点；

故 f（x）=ax³− 3x²+1 在（− ∞，0）上没有零点；

而当 $x=\frac{2}{a}$时，f（x）=ax³− 3x²+1 在（− ∞，0）上取得最小值；

故 $f(\frac{2}{a})=\frac{8}{a^2}-3\bullet\frac{4}{a^2}+1>0$；

故 a＜− 2；

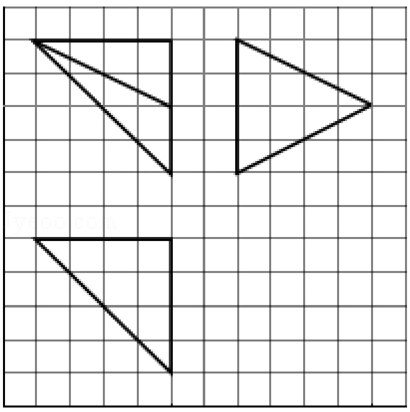
综上所述，

实数 a 的取值范围是（− ∞，− 2）；

故选：D.

【点评】本题考查了导数的综合应用及分类讨论的思想应用，同时考查了函数的零点的判定的应用，属于基础题.

12．（5 分）如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某多面体的三视图，则该多面体的各条棱中，最长的棱的长度为（　　）



A．$6\sqrt{2}$　　B．6　　C．$4\sqrt{2}$　　D．4

【考点】L!：由三视图求面积、体积.

【专题】5F：空间位置关系与距离.

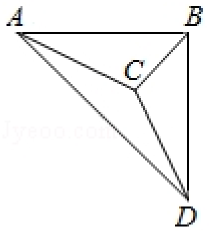
【分析】画出图形，结合三视图的数据求出棱长，推出结果即可.

【解答】解：几何体的直观图如图：AB=4，BD=4，C 到 BD 的中点的距离为：4，

∴$BC=CD=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$．$AC=\sqrt{4^2+(2\sqrt{5})^2}=6$，$AD=4\sqrt{2}$，

显然 AC 最长．长为 6．

故选：B．



【点评】本题考查三视图求解几何体的棱长，考查计算能力．

二、填空题（共 4 小题，每小题 5 分）

13．（5 分）$(x-y)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^7 的系数为__﹣20__．（用数字填写答案）

【考点】DA：二项式定理．

【专题】11：计算题；5P：二项式定理．

【分析】由题意依次求出 $(x+y)^8$ 中 xy^7，x^2y^6，项的系数，求和即可．

【解答】解：$(x+y)^8$ 的展开式中，含 xy^7 的系数是：8．

含 x^2y^6 的系数是 28，

∴$(x-y)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^7 的系数为：$8-28=-20$．

故答案为：﹣20

【点评】本题考查二项式定理系数的性质，二项式定理的应用，考查计算能力．

14．（5 分）甲、乙、丙三位同学被问到是否去过 A，B，C 三个城市时，

甲说：我去过的城市比乙多，但没去过 B 城市；

乙说：我没去过 C 城市；

丙说：我们三人去过同一城市；

由此可判断乙去过的城市为__A__．

【考点】F4：进行简单的合情推理．

【专题】5M：推理和证明．

【分析】可先由乙推出，可能去过 A 城市或 B 城市，再由甲推出只能是 A，B 中的一个，再由丙即可推出结论．

【解答】解：由乙说：我没去过 C 城市，则乙可能去过 A 城市或 B 城市，

但甲说：我去过的城市比乙多，但没去过 B 城市，则乙只能是去过 A，B 中的任一个，

再由丙说：我们三人去过同一城市，

则由此可判断乙去过的城市为 A．

故答案为：A．

【点评】本题主要考查简单的合情推理，要抓住关键，逐步推断，是一道基础题．

15．（5 分）已知 A，B，C 为圆 O 上的三点，若 $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为__90°___．

【考点】9S：数量积表示两个向量的夹角．

【专题】5A：平面向量及应用．

【分析】根据向量之间的关系，利用圆直径的性质，即可得到结论．

【解答】解：在圆中若 $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

即 $2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，

即 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ 的和向量是过 A，O 的直径，

则以 AB，AC 为邻边的四边形是矩形，

则 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，

即 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 90°，

故答案为：90°

【点评】本题主要考查平面向量的夹角的计算，利用圆直径的性质是解决本题的

关键，比较基础.

16．（5 分）已知 a，b，c 分别为△ABC 的三个内角 A，B，C 的对边，a=2 且（2+b）（sinA﹣ sinB）=（c﹣ b）sinC，则△ABC 面积的最大值为__$\sqrt{3}$__.

【考点】HP：正弦定理；HR：余弦定理.

【专题】11：计算题；35：转化思想；48：分析法；58：解三角形.

【分析】由正弦定理化简已知可得 $2a-b^2=c^2-bc$，结合余弦定理可求 A 的值，由基本不等式可求 $bc\leqslant 4$，再利用三角形面积公式即可计算得解.

【解答】解：因为：（2+b）（sinA﹣ sinB）=（c﹣ b）sinC

$\Rightarrow$（2+b）（a﹣ b）=（c﹣ b）c

$\Rightarrow 2a-2b+ab-b^2=c^2-bc$，

又因为：a=2，

所以：$a^2-b^2=c^2-bc\Rightarrow b^2+c^2-a^2=bc\Rightarrow \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}\Rightarrow A=\frac{\pi}{3}$，

△ABC 面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc$，

而 $b^2+c^2-a^2=bc$

$\Rightarrow b^2+c^2-bc=a^2$

$\Rightarrow b^2+c^2-bc=4$

$\Rightarrow bc\leqslant 4$

所以：$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc\leqslant\sqrt{3}$，即△ABC 面积的最大值为$\sqrt{3}$.

故答案为：$\sqrt{3}$.

【点评】本题主要考查了正弦定理，余弦定理，基本不等式，三角形面积公式在解三角形中的应用，考查了计算能力和转化思想，属于中档题.

三、解答题

17．（12 分）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$a_n\neq 0$，$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，其中

λ 为常数.

（Ⅰ）证明：$a_{n+2}-a_n=\lambda$

（Ⅱ）是否存在 λ，使得$\{a_n\}$为等差数列？并说明理由.

【考点】83：等差数列的性质；8H：数列递推式.

【专题】54：等差数列与等比数列.

【分析】（Ⅰ）利用 $a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，$a_{n+1}a_{n+2}=\lambda S_{n+1}-1$，相减即可得出；

（Ⅱ）假设存在 λ，使得$\{a_n\}$为等差数列，设公差为 d. 可得 $\lambda=a_{n+2}-a_n=(a_{n+2}-a_{n+1})+(a_{n+1}-a_n)=2d$，$d=\frac{\lambda}{2}$. 得到 $\lambda S_n=\frac{\lambda^2}{4}n^2+(\lambda-\frac{\lambda^2}{4})n+2-\frac{\lambda}{2}$，根据$\{a_n\}$为等差数列的充要条件是$\begin{cases}\lambda\neq 0\\ 2-\frac{\lambda}{2}=0\end{cases}$，解得 λ 即可.

【解答】（Ⅰ）证明：∵$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，$a_{n+1}a_{n+2}=\lambda S_{n+1}-1$，

∴$a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=\lambda a_{n+1}$

∵$a_{n+1}\neq 0$，

∴$a_{n+2}-a_n=\lambda$.

（Ⅱ）解：假设存在 λ，使得$\{a_n\}$为等差数列，设公差为 d.

则 $\lambda=a_{n+2}-a_n=(a_{n+2}-a_{n+1})+(a_{n+1}-a_n)=2d$，

∴ $d=\frac{\lambda}{2}$.

∴ $a_n=1+\frac{\lambda(n-1)}{2}$，$a_{n+1}=1+\frac{\lambda n}{2}$，

∴$\lambda S_n=1+[1+\frac{\lambda(n-1)}{2}][1+\frac{\lambda n}{2}]=\frac{\lambda^2}{4}n^2+(\lambda-\frac{\lambda^2}{4})n+2-\frac{\lambda}{2}$，

根据$\{a_n\}$为等差数列的充要条件是$\begin{cases}\lambda\neq 0\\ 2-\frac{\lambda}{2}=0\end{cases}$，解得 λ=4.

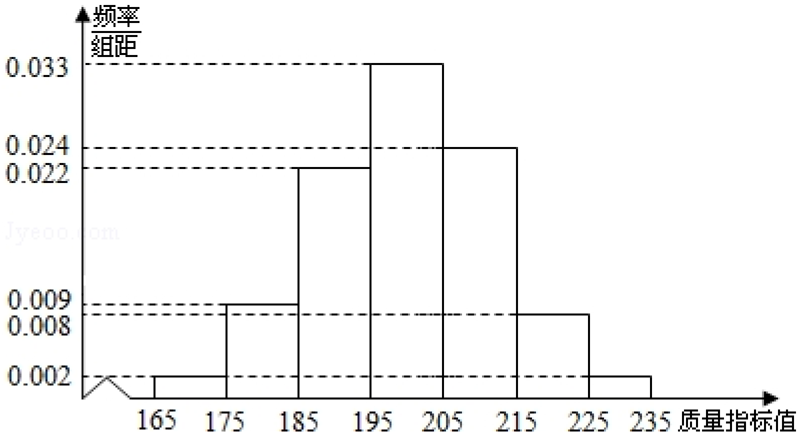
此时可得 $S_n=n^2$，$a_n=2n-1$.

因此存在 λ=4，使得$\{a_n\}$为等差数列.

【点评】本题考查了递推式的意义、等差数列的通项公式及其前 n 项和公式、等

差数列的充要条件等基础知识与基本技能方法，考查了推理能力和计算能力、分类讨论的思想方法，属于难题．

18．（12 分）从某企业生产的某种产品中抽取 500 件，测量这些产品的一项质量指标值，由测量结果得如下频率分布直方图：



（Ⅰ）求这 500 件产品质量指标值的样本平均数$\overline{x}$和样本方差 s^2（同一组中数据用该组区间的中点值作代表）；

（Ⅱ）由直方图可以认为，这种产品的质量指标值 Z 服从正态分布 N（μ，σ^2），其中 μ 近似为样本平均数$\overline{x}$，σ^2 近似为样本方差 s^2．

（i）利用该正态分布，求 P（187.8＜Z＜212.2）；

（ii）某用户从该企业购买了 100 件这种产品，记 X 表示这 100 件产品中质量指标值位于区间（187.8，212.2）的产品件数，利用（i）的结果，求 EX．

附：$\sqrt{150}$≈12.2．

若 Z～N（μ，σ^2）则 P（μ﹣σ＜Z＜μ+σ）=0.6826，P（μ﹣2σ＜Z＜μ+2σ）=0.9544．

【考点】CH：离散型随机变量的期望与方差；CP：正态分布曲线的特点及曲线所表示的意义．

【专题】11：计算题；5I：概率与统计．

【分析】（Ⅰ）运用离散型随机变量的期望和方差公式，即可求出；

（Ⅱ）（i）由（Ⅰ）知 Z～N（200，150），从而求出 P（187.8＜Z＜212.2），注意运用所给数据；

（ii）由（i）知 $X\sim B$（100，0.6826），运用 $EX=np$ 即可求得．

【解答】解：（Ⅰ）抽取产品的质量指标值的样本平均数 $\overline{x}$ 和样本方差 s^2 分别为：

$\overline{x}=170\times 0.02+180\times 0.09+190\times 0.22+200\times 0.33+210\times 0.24+220\times 0.08+230\times 0.02=200$，

$s^2=(-30)^2\times 0.02+(-20)^2\times 0.09+(-10)^2\times 0.22+0\times 0.33+10^2\times 0.24+20^2\times 0.08+30^2\times 0.02=150$．

（Ⅱ）（i）由（Ⅰ）知 $Z\sim N(200,150)$，从而 $P(187.8<Z<212.2)=P(200-12.2<Z<200+12.2)=0.6826$；

（ii）由（i）知一件产品的质量指标值位于区间（187.8，212.2）的概率为 0.6826，

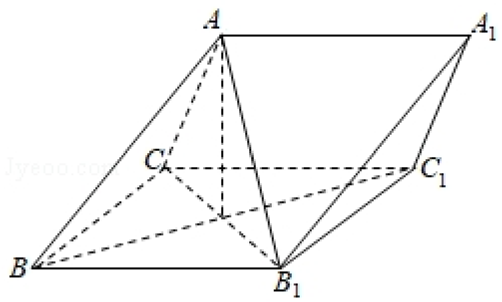
依题意知 $X\sim B$（100，0.6826），所以 $EX=100\times 0.6826=68.26$．

【点评】本题主要考查离散型随机变量的期望和方差，以及正态分布的特点及概率求解，考查运算能力．

19．（12 分）如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 BB_1C_1C 为菱形，$AB\perp B_1C$．

（Ⅰ）证明：$AC=AB_1$；

（Ⅱ）若 $AC\perp AB_1$，$\angle CBB_1=60°$，$AB=BC$，求二面角 $A-A_1B_1-C_1$ 的余弦值．



【考点】M7：空间向量的夹角与距离求解公式；MJ：二面角的平面角及求法．

【专题】5H：空间向量及应用．

【分析】（1）连结 BC_1，交 B_1C 于点 O，连结 AO，可证 $B_1C\perp$ 平面 ABO，可得 B_1C

$\perp AO$，$B_1O=CO$，进而可得 $AC=AB_1$；

（2）以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$的方向为 x 轴的正方向，$|\overrightarrow{OB}|$为单位长度，$\overrightarrow{OB_1}$的方向为 y 轴的正方向，$\overrightarrow{OA}$的方向为 z 轴的正方向建立空间直角坐标系，分别可得两平面的法向量，可得所求余弦值．

【解答】解：（1）连结 BC_1，交 B_1C 于点 O，连结 AO，

∵侧面 BB_1C_1C 为菱形，

∴$BC_1\perp B_1C$，且 O 为 BC_1 和 B_1C 的中点，

又∵$AB\perp B_1C$，∴$B_1C\perp$平面 ABO，

∵$AO\subset$平面 ABO，∴$B_1C\perp AO$，

又 $B_1O=CO$，∴$AC=AB_1$，

（2）∵$AC\perp AB_1$，且 O 为 B_1C 的中点，∴AO=CO，

又∵AB=BC，∴△BOA≌△BOC，∴OA⊥OB，

∴OA，OB，OB_1 两两垂直，

以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$的方向为 x 轴的正方向，$|\overrightarrow{OB}|$为单位长度，

$\overrightarrow{OB_1}$的方向为 y 轴的正方向，$\overrightarrow{OA}$的方向为 z 轴的正方向建立空间直角坐标系，

∵$\angle CBB_1=60°$，∴$\triangle CBB_1$ 为正三角形，又 AB=BC，

∴A（0，0，$\frac{\sqrt{3}}{3}$），B（1，0，0，），B_1（0，$\frac{\sqrt{3}}{3}$，0），C（0，$-\frac{\sqrt{3}}{3}$，0）

∴$\overrightarrow{AB_1}=$（0，$\frac{\sqrt{3}}{3}$，$-\frac{\sqrt{3}}{3}$），$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}=$（1，0，$-\frac{\sqrt{3}}{3}$），$\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{BC}=$（﹣1，$-\frac{\sqrt{3}}{3}$，0），

设向量$\vec{n}=$（x，y，z）是平面 AA_1B_1 的法向量，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=\frac{\sqrt{3}}{3}y-\frac{\sqrt{3}}{3}z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=x-\frac{\sqrt{3}}{3}z=0\end{cases}$，可取$\vec{n}=$（1，$\sqrt{3}$，$\sqrt{3}$），

同理可得平面 $A_1B_1C_1$ 的一个法向量$\vec{m}=$（1，﹣$\sqrt{3}$，$\sqrt{3}$），

∴$\cos<\vec{m}，\vec{n}>=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{1}{7}$，

∴二面角 A﹣ A_1B_1﹣ C_1 的余弦值为$\frac{1}{7}$

【点评】本题考查空间向量法解决立体几何问题，建立坐标系是解决问题的关键，属中档题．

20．（12 分）已知点 A（0，－ 2），椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，F 是椭圆的右焦点，直线 AF 的斜率为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，O 为坐标原点．

（Ⅰ）求 E 的方程；

（Ⅱ）设过点 A 的直线 l 与 E 相交于 P，Q 两点，当△OPQ 的面积最大时，求 l 的方程．

【考点】K4：椭圆的性质；KH：直线与圆锥曲线的综合．

【专题】5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】（Ⅰ）通过离心率得到 a、c 关系，通过 A 求出 a，即可求 E 的方程；

（Ⅱ）设直线 l：y=kx﹣ 2，设 P（x_1，y_1），Q（x_2，y_2）将 y=kx﹣ 2 代入$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，利用△＞0，求出 k 的范围，利用弦长公式求出|PQ|，然后求出△OPQ 的面积表达式，利用换元法以及基本不等式求出最值，然后求解直线方程．

【解答】解：（Ⅰ） 设 F（c，0），由条件知$\frac{2}{c}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，得 $c=\sqrt{3}$ 又$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 a=2，$b^2=a^2-c^2=1$，故 E 的方程$\frac{x^2}{4}+y^2=1$． ….（5 分）

（Ⅱ）依题意当 l⊥x 轴不合题意，故设直线 l：y=kx﹣ 2，设 P（x_1，y_1），Q（x_2，y_2）

将 y=kx﹣ 2 代入$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，得（$1+4k^2$）$x^2-16kx+12=0$，

当△=16（$4k^2-3$）＞0，即$k^2>\frac{3}{4}$时，$x_{1,2}=\frac{8k\pm2\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}$

从而$|PQ|=\sqrt{k^2+1}\,|x_1-x_2|=\frac{4\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}$

又点 O 到直线 PQ 的距离$d=\frac{2}{\sqrt{k^2+1}}$，所以△OPQ 的面积 $S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}d|PQ|=$

$\frac{4\sqrt{4K^2-3}}{1+4K^2}$,

设$\sqrt{4k^2-3}=t$，则 t＞0，$S_{\triangle OPQ}=\frac{4t}{t^2+4}=\frac{4}{t+\frac{4}{t}}\leqslant 1$，

当且仅当 t=2，k=±$\frac{\sqrt{7}}{2}$等号成立，且满足△＞0，

所以当△OPQ 的面积最大时，l 的方程为：y=$\frac{\sqrt{7}}{2}$x﹣ 2 或 y=﹣ $\frac{\sqrt{7}}{2}$x﹣ 2．…（12 分）

【点评】本题考查直线与椭圆的位置关系的应用，椭圆的求法，基本不等式的应用，考查转化思想以及计算能力．

21．（12 分）设函数 f（x）=$ae^x\ln x+\frac{be^{x-1}}{x}$，曲线 y=f（x）在点（1，f（1））处得切线方程为 y=e（x﹣ 1）+2．

（Ⅰ）求 a、b；

（Ⅱ）证明：f（x）＞1．

【考点】6E：利用导数研究函数的最值；6H：利用导数研究曲线上某点切线方程．

【专题】15：综合题；53：导数的综合应用．

【分析】（Ⅰ）求出定义域，导数 f′（x），根据题意有 f（1）=2，f′（1）=e，解出即可；

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，f（x）＞1 等价于 xlnx＞$xe^{-x}-\frac{2}{x}$，设函数 g（x）=xlnx，函数 h（x）=$xe^{-x}-\frac{2}{e}$，只需证明 $g(x)_{min}>h(x)_{max}$，利用导数可分别求得 $g(x)_{min}$，$h(x)_{max}$；

【解答】解：（Ⅰ）函数 f（x）的定义域为（0，+∞），

f′（x）=$ae^x\ln x+\frac{a}{x}\cdot e^x-\frac{b}{x^2}\cdot e^{x-1}+\frac{b}{x}\cdot e^{x-1}$，

由题意可得 f（1）=2，f′（1）=e，

故 a=1，b=2；

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，f（x）$=e^x\ln x+\frac{2}{x}\cdot e^{x-1}$，

∵f（x）＞1，∴$e^x\ln x+\frac{2}{x}\cdot e^{x-1}>1$，∴$\ln x>\frac{1}{e^x}-\frac{2}{xe}$，

∴f（x）＞1 等价于 $x\ln x>xe^{-x}-\frac{2}{e}$，设函数 g（x）=xlnx，则 g′（x）=1+lnx，

∴当 x∈（0，$\frac{1}{e}$）时，g′（x）＜0；当 x∈（$\frac{1}{e}$，+∞）时，g′（x）＞0.

故 g（x）在（0，$\frac{1}{e}$）上单调递减，在（$\frac{1}{e}$，+∞）上单调递增，从而 g（x）在（0，+∞）上的最小值为 g（$\frac{1}{e}$）=﹣$\frac{1}{e}$.

设函数 h（x）$=xe^{-x}-\frac{2}{e}$，则 h′（x）$=e^{-x}(1-x)$．

∴当 x∈（0，1）时，h′（x）＞0；当 x∈（1，+∞）时，h′（x）＜0，

故 h（x）在（0，1）上单调递增，在（1，+∞）上单调递减，

从而 h（x）在（0，+∞）上的最大值为 h（1）=﹣$\frac{1}{e}$.

综上，当 x＞0 时，g（x）＞h（x），即 f（x）＞1.

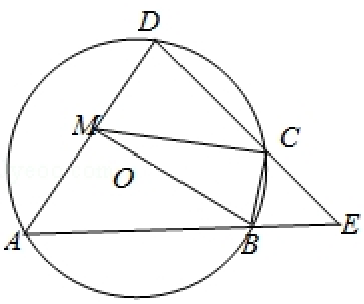
【点评】本题考查导数的几何意义、利用导数求函数的最值、证明不等式等，考查转化思想，考查学生分析解决问题的能力.

选修 4-1：几何证明选讲

22．（10 分）如图，四边形 ABCD 是⊙O 的内接四边形，AB 的延长线与 DC 的延长线交于点 E，且 CB=CE．

（Ⅰ）证明：∠D=∠E；

（Ⅱ）设 AD 不是⊙O 的直径，AD 的中点为 M，且 MB=MC，证明：△ADE 为等边三角形．



【考点】NB：弦切角；NC：与圆有关的比例线段．

【专题】15：综合题；5M：推理和证明．

【分析】（Ⅰ）利用四边形 ABCD 是⊙O 的内接四边形，可得∠D=∠CBE，由 CB=CE，可得∠E=∠CBE，即可证明：∠D=∠E；

（Ⅱ）设 BC 的中点为 N，连接 MN，证明 AD∥BC，可得∠A=∠CBE，进而可得∠A=∠E，即可证明△ADE 为等边三角形．

【解答】证明：（Ⅰ）∵四边形 ABCD 是⊙O 的内接四边形，

∴∠D=∠CBE，

∵CB=CE，

∴∠E=∠CBE，

∴∠D=∠E；

（Ⅱ）设 BC 的中点为 N，连接 MN，则由 MB=MC 知 MN⊥BC，

∴O 在直线 MN 上，

∵AD 不是⊙O 的直径，AD 的中点为 M，

∴OM⊥AD，

∴AD∥BC，

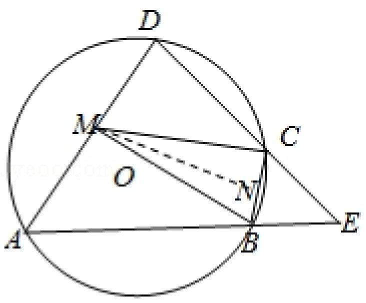
∴∠A=∠CBE，

∵∠CBE=∠E，

∴∠A=∠E，

由（Ⅰ）知，∠D=∠E，

∴△ADE 为等边三角形．



【点评】本题考查圆的内接四边形性质，考查学生分析解决问题的能力，属于中档题．

选修 4-4：坐标系与参数方程

23．已知曲线 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，直线 l：$\begin{cases}x=2+t\\y=2-2t\end{cases}$（t 为参数）

（Ⅰ）写出曲线 C 的参数方程，直线 l 的普通方程．

（Ⅱ）过曲线 C 上任意一点 P 作与 l 夹角为 30°的直线，交 l 于点 A，求|PA|的最大值与最小值．

【考点】KH：直线与圆锥曲线的综合；QH：参数方程化成普通方程．

【专题】5S：坐标系和参数方程．

【分析】（Ⅰ）联想三角函数的平方关系可取 x=2cosθ、y=3sinθ 得曲线 C 的参数方程，直接消掉参数 t 得直线 l 的普通方程；

（Ⅱ）设曲线 C 上任意一点 P（2cosθ，3sinθ）．由点到直线的距离公式得到 P 到直线 l 的距离，除以

sin30°进一步得到|PA|，化积后由三角函数的范围求得|PA|的最大值与最小值．

【解答】解：（Ⅰ）对于曲线 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，可令 x=2cosθ、y=3sinθ，

故曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=3\sin\theta\end{cases}$，（θ 为参数）．

对于直线 l：$\begin{cases}x=2+t & ①\\y=2-2t & ②\end{cases}$，

由①得：t=x﹣2，代入②并整理得：2x+y﹣6=0；

（Ⅱ）设曲线 C 上任意一点 P（2cosθ，3sinθ）．

P 到直线 l 的距离为 $d=\frac{\sqrt{5}}{5}|4\cos\theta+3\sin\theta-6|$．

则 $|PA|=\frac{d}{\sin30^\circ}=\frac{2\sqrt{5}}{5}|5\sin(\theta+\alpha)-6|$，其中 α 为锐角．

当 sin（θ+α）=﹣1 时，|PA|取得最大值，最大值为$\frac{22\sqrt{5}}{5}$．

当 sin（θ+α）=1 时，|PA|取得最小值，最小值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$．

【点评】本题考查普通方程与参数方程的互化，训练了点到直线的距离公式，体现了数学转化思想方法，是中档题．

选修 4-5：不等式选讲

24．若 a＞0，b＞0，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{ab}$．

（Ⅰ）求 a^3+b^3 的最小值；

（Ⅱ）是否存在 a，b，使得 2a+3b=6？并说明理由．

【考点】RI：平均值不等式．

【专题】59：不等式的解法及应用．

【分析】（Ⅰ）由条件利用基本不等式求得 ab≥2，再利用基本不等式求得 a^3+b^3 的最小值．

（Ⅱ）根据 ab≥2 及基本不等式求的 2a+3b＞8，从而可得不存在 a，b，使得 2a+3b=6．

【解答】解：（Ⅰ）∵a＞0，b＞0，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{ab}$，

∴$\sqrt{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$，∴ab≥2，

当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$时取等号．

∵$a^3+b^3 \geq 2\sqrt{(ab)^3}\geq 2\sqrt{2^3}=4\sqrt{2}$，当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$时取等号，

∴a^3+b^3 的最小值为 $4\sqrt{2}$．

（Ⅱ）∵$2a+3b\geq 2\sqrt{2a\cdot 3b}=2\sqrt{6ab}$，当且仅当 2a=3b 时，取等号．

而由（1）可知，$2\sqrt{6ab}\geq 2\sqrt{12}=4\sqrt{3}>6$，

故不存在 a，b，使得 2a+3b=6 成立．

【点评】本题主要考查基本不等式在最值中的应用，要注意检验等号成立条件是否具备，属于基础题．