2014年全国统一高考数学试卷（理科）（大纲版）

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分）

1. （5分）设z=$\frac{10i}{3+i}$，则z的共轭复数为（　　）

A．$-1+3i$　　B．$-1-3i$　　C．$1+3i$　　D．$1-3i$

2. （5分）设集合M={x|$x^2-3x-4<0$}，N={x|0≤x≤5}，则M∩N=（　　）

A．（0，4]　　B．[0，4）　　C．[－1，0）　　D．（－1，0]

3. （5分）设a=sin33°，b=cos55°，c=tan35°，则（　　）

A．a＞b＞c　　B．b＞c＞a　　C．c＞b＞a　　D．c＞a＞b

4. （5分）若向量$\vec{a}$、$\vec{b}$满足：$|\vec{a}|=1$，$(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{a}$，$(2\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{b}$，则$|\vec{b}|$=（　　）

A．2　　B．$\sqrt{2}$　　C．1　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. （5分）有6名男医生、5名女医生，从中选出2名男医生、1名女医生组成一个医疗小组，则不同的选法共有（　　）

A．60种　　B．70种　　C．75种　　D．150种

6. （5分）已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的左、右焦点为$F_1$、$F_2$，离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，过$F_2$的直线l交C于A、B两点，若△$AF_1B$的周长为$4\sqrt{3}$，则C的方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　　B．$\frac{x^2}{3}+y^2=1$　　C．$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$　　D．$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$

7. （5分）曲线$y=xe^{x-1}$在点（1，1）处切线的斜率等于（　　）

A．2e　　B．e　　C．2　　D．1

8. （5分）正四棱锥的顶点都在同一球面上，若该棱锥的高为4，底面边长为2，则该球的表面积为（　　）

A．$\frac{81\pi}{4}$　　B．16π　　C．9π　　D．$\frac{27\pi}{4}$

9. （5分）已知双曲线C的离心率为2，焦点为F_1、F_2，点A在C上，若$|F_1A|=2|F_2A|$，则$\cos\angle AF_2F_1$=（　　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{3}$

10．（5 分）等比数列$\{a_n\}$中，$a_4=2$，$a_5=5$，则数列$\{\lg a_n\}$的前 8 项和等于（　　）

A．6　　B．5　　C．4　　D．3

11．（5 分）已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 为 60°，$AB\subset\alpha$，$AB\perp l$，A 为垂足，$CD\subset\beta$，$C\in l$，$\angle ACD=135°$，则异面直线 AB 与 CD 所成角的余弦值为（　　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{4}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{4}$　　D．$\frac{1}{2}$

12．（5 分）函数 y=f（x）的图象与函数 y=g（x）的图象关于直线 x+y=0 对称，则 y=f（x）的反函数是（　　）

A．y=g（x）　　B．y=g（﹣x）　　C．y=﹣g（x）　　D．y=﹣g（﹣x）

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分）

13．（5 分）$\left(\frac{x}{\sqrt{y}}-\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^8$的展开式中 x^2y^2 的系数为________．（用数字作答）

14．（5 分）设 x、y 满足约束条件$\begin{cases}x-y\geqslant 0\\x+2y\leqslant 3\\x-2y\leqslant 1\end{cases}$，则 z=x+4y 的最大值为________．

15．（5 分）直线 l_1 和 l_2 是圆 $x^2+y^2=2$ 的两条切线，若 l_1 与 l_2 的交点为（1，3），则 l_1 与 l_2 的夹角的正切值等于________．

16．（5 分）若函数 f（x）=cos2x+asinx 在区间（$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}$）是减函数，则 a 的取值范围是________．

三、解答题

17．（10 分）△ABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 3acosC=2ccosA，tanA=$\frac{1}{3}$，求 B．

18．（12 分）等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1=13$，a_2 为整数，且 $S_n\leqslant S_4$．

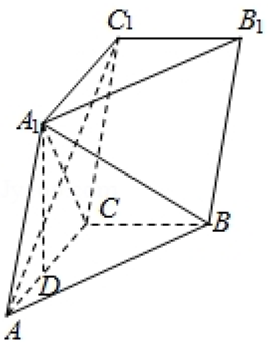
（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设 $b_n=\frac{1}{a_n a_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n．

19．（12 分）如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，点 A_1 在平面 ABC 内的射影 D 在 AC 上，$\angle ACB=90°$，$BC=1$，$AC=CC_1=2$．

（Ⅰ）证明：$AC_1\perp A_1B$；

（Ⅱ）设直线 AA_1 与平面 BCC_1B_1 的距离为$\sqrt{3}$，求二面角 A_1-AB-C 的大小．



20．（12 分）设每个工作日甲、乙、丙、丁 4 人需使用某种设备的概率分别为 0.6、0.5、0.5、0.4，各人是否需使用设备相互独立．

（Ⅰ）求同一工作日至少 3 人需使用设备的概率；

（Ⅱ）X 表示同一工作日需使用设备的人数，求 X 的数学期望．

21．（12 分）已知抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）的焦点为 F，直线 $y=4$ 与 y 轴的交点为 P，与 C 的交点为 Q，且 $|QF|=\frac{5}{4}|PQ|$.

（Ⅰ）求 C 的方程；

（Ⅱ）过 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点，若 AB 的垂直平分线 l′与 C 相交于 M、N 两点，且 A、M、B、N 四点在同一圆上，求 l 的方程.

22．（12 分）函数 $f(x)=\ln(x+1)-\frac{ax}{x+a}$（$a>1$）.

（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）设 $a_1=1$，$a_{n+1}=\ln(a_n+1)$，证明：$\frac{2}{n+2}<a_n\leqslant\frac{3}{n+2}$（$n\in N^*$）.

2014 年全国统一高考数学试卷（理科）（大纲版）

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分）

1．（5 分）设 $z=\frac{10i}{3+i}$，则 z 的共轭复数为（　　）

A．$-1+3i$　　B．$-1-3i$　　C．$1+3i$　　D．$1-3i$

【考点】A1：虚数单位 i、复数；A5：复数的运算．

【专题】5N：数系的扩充和复数．

【分析】直接由复数代数形式的除法运算化简，则 z 的共轭可求．

【解答】解：$\because z=\frac{10i}{3+i}=\frac{10i(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{10+30i}{10}=1+3i$，

$\therefore \overline{z}=1-3i$．

故选：D．

【点评】本题考查复数代数形式的除法运算，考查了复数的基本概念，是基础题．

2．（5 分）设集合 $M=\{x|x^2-3x-4<0\}$，$N=\{x|0\leqslant x\leqslant 5\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A．$(0,4]$　　B．$[0,4)$　　C．$[-1,0)$　　D．$(-1,0]$

【考点】1E：交集及其运算．

【专题】5J：集合．

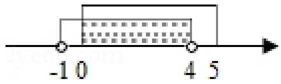
【分析】求解一元二次不等式化简集合 M，然后直接利用交集运算求解．

【解答】解：由 $x^2-3x-4<0$，得 $-1<x<4$．

$\therefore M=\{x|x^2-3x-4<0\}=\{x|-1<x<4\}$，

又 $N=\{x|0\leqslant x\leqslant 5\}$，

$\therefore M\cap N=\{x|-1<x<4\}\cap\{x|0\leqslant x\leqslant 5\}=[0,4)$．



故选：B．

【点评】本题考查了交集及其运算，考查了一元二次不等式的解法，是基础题．

3．（5 分）设 a=sin33°，b=cos55°，c=tan35°，则（　　）

A．a＞b＞c　　B．b＞c＞a　　C．c＞b＞a　　D．c＞a＞b

【考点】HF：正切函数的单调性和周期性．

【专题】56：三角函数的求值．

【分析】可得 b=sin35°，易得 b＞a，c=tan35°=$\frac{\sin 35^\circ}{\cos 35^\circ}$＞sin35°，综合可得．

【解答】解：由诱导公式可得 b=cos55°=cos（90°﹣35°）=sin35°，

由正弦函数的单调性可知 b＞a，

而 c=tan35°=$\frac{\sin 35^\circ}{\cos 35^\circ}$＞sin35°=b，

∴c＞b＞a

故选：C．

【点评】本题考查三角函数值大小的比较，涉及诱导公式和三角函数的单调性，属基础题．

4．（5 分）若向量$\vec{a}$、$\vec{b}$满足：$|\vec{a}|=1$，$(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{a}$，$(2\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{b}$，则$|\vec{b}|$=（　　）

A．2　　B．$\sqrt{2}$　　C．1　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【考点】9O：平面向量数量积的性质及其运算．

【专题】5A：平面向量及应用．

【分析】由条件利用两个向量垂直的性质，可得$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}=0$，$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=0$，由此求得$|\vec{b}|$．

【解答】解：由题意可得，$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}=\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=1+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，∴$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$；

$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=-2+\vec{b}^2=0$，$\therefore b^2=2$，

则$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，

故选：B．

【点评】本题主要考查两个向量垂直的性质，两个向量垂直，则它们的数量积等于零，属于基础题．

5．（5 分）有 6 名男医生、5 名女医生，从中选出 2 名男医生、1 名女医生组成一个医疗小组，则不同的选法共有（　　）

A．60 种　　B．70 种　　C．75 种　　D．150 种

【考点】D9：排列、组合及简单计数问题．

【专题】5O：排列组合．

【分析】根据题意，分 2 步分析，先从 6 名男医生中选 2 人，再从 5 名女医生中选出 1 人，由组合数公式依次求出每一步的情况数目，由分步计数原理计算可得答案．

【解答】解：根据题意，先从 6 名男医生中选 2 人，有 $C_6^2=15$ 种选法，

再从 5 名女医生中选出 1 人，有 $C_5^1=5$ 种选法，

则不同的选法共有 $15\times5=75$ 种；

故选：C．

【点评】本题考查分步计数原理的应用，注意区分排列、组合的不同．

6．（5 分）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点为 F_1、F_2，离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，过 F_2 的直线 l 交 C 于 A、B 两点，若$\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{3}$，则 C 的方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　　B．$\frac{x^2}{3}+y^2=1$　　C．$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$　　D．$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$

【考点】K4：椭圆的性质．

【专题】5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】利用△AF_1B 的周长为 $4\sqrt{3}$，求出 $a=\sqrt{3}$，根据离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，可得 c=1，求出 b，即可得出椭圆的方程．

【解答】解：∵△AF_1B 的周长为 $4\sqrt{3}$，

∵△AF_1B 的周长$=|AF_1|+|AF_2|+|BF_1|+|BF_2|=2a+2a=4a$，

∴$4a=4\sqrt{3}$，

∴$a=\sqrt{3}$，

∵离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，

∴$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，c=1，

∴$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2}$，

∴椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$．

故选：A．

【点评】本题考查椭圆的定义与方程，考查椭圆的几何性质，考查学生的计算能力，属于基础题．

7．（5 分）曲线 $y=xe^{x-1}$在点（1，1）处切线的斜率等于（　　）

A．2e　　B．e　　C．2　　D．1

【考点】62：导数及其几何意义．

【专题】52：导数的概念及应用．

【分析】求函数的导数，利用导数的几何意义即可求出对应的切线斜率．

【解答】解：函数的导数为 $f'(x)=e^{x-1}+xe^{x-1}=(1+x)e^{x-1}$，

当 x=1 时，$f'(1)=2$，

即曲线 $y=xe^{x-1}$在点（1，1）处切线的斜率 $k=f'(1)=2$，

故选：C．

【点评】本题主要考查导数的几何意义，直接求函数的导数是解决本题的关键，比较基础.

8．（5 分）正四棱锥的顶点都在同一球面上，若该棱锥的高为 4，底面边长为 2，则该球的表面积为（　　）

A．$\frac{81\pi}{4}$　　B．16π　　C．9π　　D．$\frac{27\pi}{4}$

【考点】LG：球的体积和表面积；LR：球内接多面体.

【专题】11：计算题；5F：空间位置关系与距离.

【分析】正四棱锥 P﹣ABCD 的外接球的球心在它的高 PO_1 上，记为 O，求出 PO_1，OO_1，解出球的半径，求出球的表面积.

【解答】解：设球的半径为 R，则

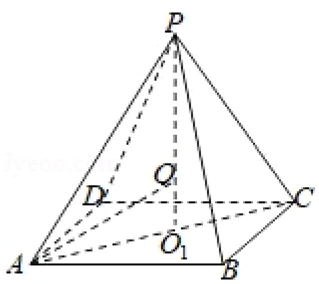
∵棱锥的高为 4，底面边长为 2，

∴$R^2=(4-R)^2+(\sqrt{2})^2$，

∴$R=\frac{9}{4}$，

∴球的表面积为 $4\pi\bullet(\frac{9}{4})^2=\frac{81\pi}{4}$.

故选：A.



【点评】本题考查球的表面积，球的内接几何体问题，考查计算能力，是基础题.

9．（5 分）已知双曲线 C 的离心率为 2，焦点为 F_1、F_2，点 A 在 C 上，若 $|F_1A|=2|F_2A|$，则 $\cos\angle AF_2F_1=$（　　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{3}$

【考点】KC：双曲线的性质．

【专题】5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】根据双曲线的定义，以及余弦定理建立方程关系即可得到结论．

【解答】解：∵双曲线 C 的离心率为 2，

∴$e=\frac{c}{a}=2$，即 c=2a，

点 A 在双曲线上，

则$|F_1A|-|F_2A|=2a$，

又$|F_1A|=2|F_2A|$，

∴解得$|F_1A|=4a$，$|F_2A|=2a$，$||F_1F_2|=2c$，

则由余弦定理得 $\cos\angle AF_2F_1=\frac{|AF_2|^2+|F_1F_2|^2-|AF_1|^2}{2|AF_2|\bullet|F_1F_2|}=$

$$\frac{4a^2+4c^2-16a^2}{2\times2a\times2c}=\frac{4c^2-12a^2}{8ac}=\frac{c^2-3a^2}{2ac}=\frac{4a^2-3a^2}{4a^2}=\frac{a^2}{4a^2}=\frac{1}{4}.$$

故选：A．

【点评】本题主要考查双曲线的定义和运算，利用离心率的定义和余弦定理是解决本题的关键，考查学生的计算能力．

10．（5 分）等比数列$\{a_n\}$中，$a_4=2$，$a_5=5$，则数列$\{\lg a_n\}$的前 8 项和等于（　　）

A．6　　B．5　　C．4　　D．3

【考点】89：等比数列的前 n 项和．

【专题】54：等差数列与等比数列．

【分析】利用等比数列的性质可得 $a_1a_8=a_2a_7=a_3a_6=a_4a_5=10$．再利用对数的运算性质即可得出．

【解答】解：∵数列$\{a_n\}$是等比数列，$a_4=2$，$a_5=5$，

∴$a_1a_8=a_2a_7=a_3a_6=a_4a_5=10$．

∴$\lg a_1+\lg a_2+\ldots+\lg a_8$

$=\lg(a_1a_2\bullet\ldots\bullet a_8)$

$=\lg(a_4a_5)^4$

4lg10

=4.

故选：C.

【点评】本题考查了等比数列的性质、对数的运算性质，属于基础题.

11．（5 分）已知二面角 α－ l－ β 为 60°，AB⊂α，AB⊥l，A 为垂足，CD⊂β，C∈l，∠ACD=135°，则异面直线 AB 与 CD 所成角的余弦值为（　　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{4}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{4}$　　D．$\frac{1}{2}$

【考点】LM：异面直线及其所成的角.

【专题】5G：空间角.

【分析】首先作出二面角的平面角，然后再构造出异面直线 AB 与 CD 所成角，利用解直角三角形和余弦定理，求出问题的答案.

【解答】解：如图，过 A 点做 AE⊥l，使 BE⊥β，垂足为 E，过点 A 做 AF∥CD，过点 E 做 EF⊥AE，连接 BF，

∵AE⊥l

∴∠EAC=90°

∵CD∥AF

又∠ACD=135°

∴∠FAC=45°

∴∠EAF=45°

在 Rt△BEA 中，设 AE=a，则 AB=2a，BE=$\sqrt{3}$a，

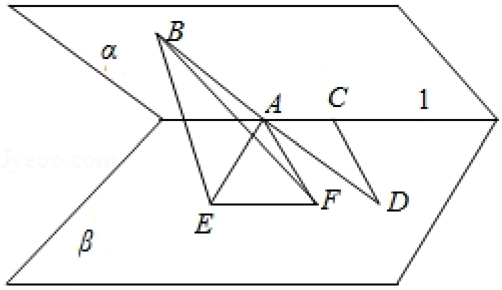
在 Rt△AEF 中，则 EF=a，AF=$\sqrt{2}$a，

在 Rt△BEF 中，则 BF=2a，

∴异面直线 AB 与 CD 所成的角即是∠BAF，

∴cos∠BAF=$\frac{AB^2+AF^2-BF^2}{2AB\cdot AF}=\frac{(2a)^2+(\sqrt{2}a)^2-(2a)^2}{2\times 2a\times\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

故选：B．



【点评】本题主要考查了二面角和异面直线所成的角，关键是构造二面角的平面角和异面直线所成的角，考查了学生的空间想象能力和作图能力，属于难题．

12．（5 分）函数 y=f（x）的图象与函数 y=g（x）的图象关于直线 x+y=0 对称，则 y=f（x）的反函数是（　　）

A．y=g（x）　B．y=g（﹣x）　C．y=﹣g（x）　D．y=﹣g（﹣x）

【考点】4R：反函数．

【专题】51：函数的性质及应用．

【分析】设 P（x，y）为 y=f（x）的反函数图象上的任意一点，则 P 关于 y=x 的对称点 P′（y，x）一点在 y=f（x）的图象上，P′（y，x）关于直线 x+y=0 的对称点 P″（﹣x，﹣y）在 y=g（x）图象上，代入解析式变形可得．

【解答】解：设 P（x，y）为 y=f（x）的反函数图象上的任意一点，

则 P 关于 y=x 的对称点 P′（y，x）一点在 y=f（x）的图象上，

又∵函数 y=f（x）的图象与函数 y=g（x）的图象关于直线 x+y=0 对称，

∴P′（y，x）关于直线 x+y=0 的对称点 P″（﹣x，﹣y）在 y=g（x）图象上，

∴必有﹣y=g（﹣x），即 y=﹣g（﹣x）

∴y=f（x）的反函数为：y=﹣g（﹣x）

故选：D．

【点评】本题考查反函数的性质和对称性，属中档题．

二、填空题(本大题共 4 小题，每小题 5 分)

13．（5 分）$(\frac{x}{\sqrt{y}}-\frac{y}{\sqrt{x}})^8$的展开式中 x^2y^2 的系数为__70__．（用数字作答）

【考点】DA：二项式定理．

【专题】5P：二项式定理．

【分析】先求出二项式展开式的通项公式，再令 x、y 的幂指数都等于 2，求得 r 的值，即可求得展开式中 x^2y^2 的系数．

【解答】解：$(\frac{x}{\sqrt{y}}-\frac{y}{\sqrt{x}})^8$的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_8^r\bullet(-1)^r\bullet(\frac{x}{\sqrt{y}})^{8-r}\bullet$

$(\frac{y}{\sqrt{x}})^r=C_8^r\bullet(-1)^r\bullet x^{8-\frac{3r}{2}}\bullet y^{\frac{3r}{2}-4}$，

令 $8-\frac{3r}{2}=\frac{3r}{2}-4=2$，求得 r=4，

故展开式中 x^2y^2 的系数为 $C_8^4=70$，

故答案为：70．

【点评】本题主要考查二项式定理的应用，二项式系数的性质，二项式展开式的通项公式，求展开式中某项的系数，属于中档题．

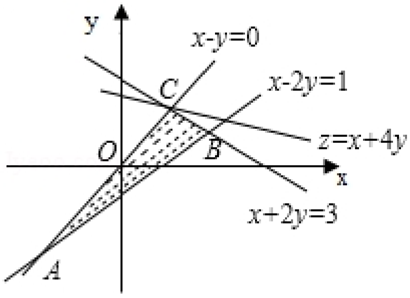
14．（5 分）设 x、y 满足约束条件$\begin{cases}x-y\geqslant0\\x+2y\leqslant3\\x-2y\leqslant1\end{cases}$，则 z=x+4y 的最大值为__5__．

【考点】7C：简单线性规划．

【专题】31：数形结合．

【分析】由约束条件作出可行域，化目标函数为直线方程的斜截式，由图得到最优解，联立方程组求出最优解的坐标，代入目标函数得答案．

【解答】解：由约束条件$\begin{cases}x-y\geqslant0\\x+2y\leqslant3\\x-2y\leqslant1\end{cases}$作出可行域如图，



联立$\begin{cases}x-y=0\\x+2y=3\end{cases}$，解得 C（1，1）.

化目标函数 z=x+4y 为直线方程的斜截式，得$y=-\frac{1}{4}x+\frac{z}{4}$.

由图可知，当直线$y=-\frac{1}{4}x+\frac{z}{4}$过 C 点时，直线在 y 轴上的截距最大，z 最大.

此时 $z_{max}=1+4\times1=5$.

故答案为：5.

【点评】本题考查简单的线性规划，考查了数形结合的解题思想方法，是中档题.

15．（5 分）直线 l_1 和 l_2 是圆 $x^2+y^2=2$ 的两条切线，若 l_1 与 l_2 的交点为（1，3），则 l_1 与 l_2 的夹角的正切值等于__$\frac{4}{3}$__.

【考点】IV：两直线的夹角与到角问题.

【专题】5B：直线与圆.

【分析】设 l_1 与 l_2 的夹角为 2θ，由于 l_1 与 l_2 的交点 A（1，3）在圆的外部，由直角三角形中的边角关系求得 $\sin\theta=\frac{r}{OA}$ 的值，可得 cosθ、tanθ 的值，再根据 $\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$，计算求得结果.

【解答】解：设 l_1 与 l_2 的夹角为 2θ，由于 l_1 与 l_2 的交点 A（1，3）在圆的外部，

且点 A 与圆心 O 之间的距离为 $OA=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$，

圆的半径为 $r=\sqrt{2}$，

$\therefore \sin\theta=\frac{r}{OA}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$，

$\therefore \cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$，$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{2}$，

$\therefore \tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$,

故答案为：$\frac{4}{3}$.

【点评】本题主要考查直线和圆相切的性质，直角三角形中的变角关系，同角三角函数的基本关系、二倍角的正切公式的应用，属于中档题．

16．（5 分）若函数 f（x）=cos2x+asinx 在区间（$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}$）是减函数，则 a 的取值范围是___（－ ∞，2］___．

【考点】HM：复合三角函数的单调性．

【专题】51：函数的性质及应用；57：三角函数的图像与性质．

【分析】利用二倍角的余弦公式化为正弦，然后令 t=sinx 换元，根据给出的 x 的范围求出 t 的范围，结合二次函数的图象的开口方向及对称轴的位置列式求解 a 的范围．

【解答】解：由 f（x）=cos2x+asinx

$=-2\sin^2x+a\sin x+1$，

令 t=sinx，

则原函数化为 $y=-2t^2+at+1$．

∵x∈（$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}$）时 f（x）为减函数，

则 $y=-2t^2+at+1$ 在 t∈（$\frac{1}{2}$，1）上为减函数，

∵$y=-2t^2+at+1$ 的图象开口向下，且对称轴方程为 $t=\frac{a}{4}$.

$\therefore \frac{a}{4}\leqslant\frac{1}{2}$，解得：a≤2．

∴a 的取值范围是（－ ∞，2］．

故答案为：（－ ∞，2］．

【点评】本题考查复合函数的单调性，考查了换元法，关键是由换元后函数为减函数求得二次函数的对称轴的位置，是中档题．

三、解答题

17．（10 分）△ABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 $3a\cos C=2c\cos A$，$\tan A=\frac{1}{3}$，求 B．

【考点】GL：三角函数中的恒等变换应用；HP：正弦定理．

【专题】58：解三角形．

【分析】由 $3a\cos C=2c\cos A$，利用正弦定理可得 $3\sin A\cos C=2\sin C\cos A$，再利用同角的三角函数基本关系式可得 $\tan C$，利用 $\tan B=\tan[\pi-(A+C)]=-\tan(A+C)$ 即可得出．

【解答】解：∵$3a\cos C=2c\cos A$，

由正弦定理可得 $3\sin A\cos C=2\sin C\cos A$，

∴$3\tan A=2\tan C$，

∵$\tan A=\frac{1}{3}$，

∴$2\tan C=3\times\frac{1}{3}=1$，解得 $\tan C=\frac{1}{2}$．

∴$\tan B=\tan[\pi-(A+C)]=-\tan(A+C)=-\frac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}=-\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=-1$，

∵$B\in(0,\pi)$，

∴$B=\frac{3\pi}{4}$

【点评】本题考查了正弦定理、同角的三角函数基本关系式、两角和差的正切公式、诱导公式等基础知识与基本技能方法，考查了推理能力和计算能力，属于中档题．

18．（12 分）等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1=13$，a_2 为整数，且 $S_n\leq S_4$．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n．

【考点】8E：数列的求和．

【专题】55：点列、递归数列与数学归纳法．

【分析】（1）通过 $S_n\leqslant S_4$ 得 $a_4\geqslant 0$，$a_5\leqslant 0$，利用 $a_1=13$、a_2 为整数可得 $d=-4$，进而可得结论；

（2）通过 $a_n=13-3n$，分离分母可得 $b_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{13-3n}-\frac{1}{10-3n}\right)$，并项相加即可．

【解答】解：（1）在等差数列 $\{a_n\}$ 中，由 $S_n\leqslant S_4$ 得：

$a_4\geqslant 0$，$a_5\leqslant 0$，

又∵$a_1=13$，

∴$\begin{cases}13+3d\geqslant 0\\13+4d\leqslant 0\end{cases}$，解得 $-\frac{13}{3}\leqslant d\leqslant -\frac{13}{4}$，

∵a_2 为整数，∴$d=-4$，

∴$\{a_n\}$ 的通项为：$a_n=17-4n$；

（2）∵$a_n=17-4n$，

∴$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(17-4n)(21-4n)}=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-17}-\frac{1}{4n-21}\right)$，

于是 $T_n=b_1+b_2+\ldots\ldots+b_n$

$=-\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{-13}-\frac{1}{-17}\right)+\left(\frac{1}{-9}-\frac{1}{-13}\right)+\ldots\ldots+\left(\frac{1}{4n-17}-\frac{1}{4n-21}\right)\right]$

$=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-17}-\frac{1}{-17}\right)$

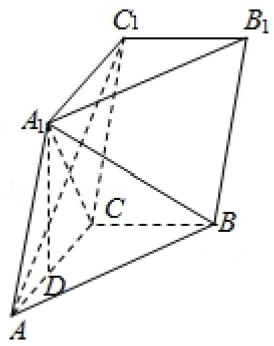
$=\frac{n}{17(17-4n)}$．

【点评】本题考查求数列的通项及求和，考查并项相加法，注意解题方法的积累，属于中档题．

19．（12 分）如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，点 A_1 在平面 ABC 内的射影 D 在 AC 上，$\angle ACB=90°$，$BC=1$，$AC=CC_1=2$．

（Ⅰ）证明：$AC_1\perp A_1B$；

（Ⅱ）设直线 AA_1 与平面 BCC_1B_1 的距离为$\sqrt{3}$，求二面角 A_1-AB-C 的大小．



【考点】LW：直线与平面垂直；MJ：二面角的平面角及求法．

【专题】5F：空间位置关系与距离．

【分析】（Ⅰ）由已知数据结合线面垂直的判定和性质可得；

（Ⅱ）作辅助线可证$\angle A_1FD$为二面角A_1-AB-C的平面角，解三角形由反三角函数可得．

【解答】解：（Ⅰ）$\because A_1D\perp$平面ABC，$A_1D\subset$平面AA_1C_1C，

$\therefore$平面$AA_1C_1C\perp$平面ABC，又$BC\perp AC$

$\therefore BC\perp$平面AA_1C_1C，连结A_1C，

由侧面AA_1C_1C为菱形可得$AC_1\perp A_1C$，

又$AC_1\perp BC$，$A_1C\cap BC=C$，

$\therefore AC_1\perp$平面A_1BC，$AB_1\subset$平面A_1BC，

$\therefore AC_1\perp A_1B$；

（Ⅱ）$\because BC\perp$平面AA_1C_1C，$BC\subset$平面BCC_1B_1，

$\therefore$平面$AA_1C_1C\perp$平面BCC_1B_1，

作$A_1E\perp CC_1$，E为垂足，可得$A_1E\perp$平面BCC_1B_1，

又直线$AA_1\parallel$平面BCC_1B_1，

$\therefore A_1E$为直线AA_1与平面BCC_1B_1的距离，即$A_1E=\sqrt{3}$，

$\because A_1C$为$\angle ACC_1$的平分线，$\therefore A_1D=A_1E=\sqrt{3}$，

作$DF\perp AB$，F为垂足，连结A_1F，

又可得$AB\perp A_1D$，$A_1F\cap A_1D=A_1$，

$\therefore AB\perp$平面A_1DF，$\because A_1F\subset$平面A_1DF

$\therefore A_1F\perp AB$，

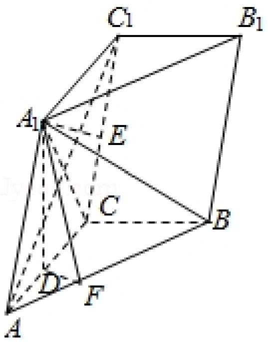
∴$\angle A_1FD$为二面角 A_1-AB-C 的平面角，

由 $AD=\sqrt{AA_1^2-A_1D^2}=1$ 可知 D 为 AC 中点，

∴$DF=\frac{1}{2}\times\frac{AC\times BC}{AB}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

∴$\tan\angle A_1FD=\frac{A_1D}{DF}=\sqrt{15}$，

∴二面角 A_1-AB-C 的大小为 $\arctan\sqrt{15}$



【点评】本题考查二面角的求解，作出并证明二面角的平面角是解决问题的关键，属中档题．

20．（12 分）设每个工作日甲、乙、丙、丁 4 人需使用某种设备的概率分别为 0.6、0.5、0.5、0.4，各人是否需使用设备相互独立．

（Ⅰ）求同一工作日至少 3 人需使用设备的概率；

（Ⅱ）X 表示同一工作日需使用设备的人数，求 X 的数学期望．

【考点】C8：相互独立事件和相互独立事件的概率乘法公式；CH：离散型随机变量的期望与方差．

【专题】5I：概率与统计．

【分析】记 A_i 表示事件：同一工作日乙丙需要使用设备，i=0，1，2，B 表示事件：甲需要设备，C 表示事件，丁需要设备，D 表示事件：同一工作日至少 3 人需使用设备

（Ⅰ）把 4 个人都需使用设备的概率、4 个人中有 3 个人使用设备的概率相加，即得所求．

（Ⅱ）X 的可能取值为 0，1，2，3，4，分别求出 PX_i，再利用数学期望公式计算

即可.

【解答】解：由题意可得“同一工作日至少 3 人需使用设备”的概率为

$0.6\times0.5\times0.5\times0.4+(1-0.6)\times0.5\times0.5\times0.4+0.6\times(1-0.5)\times0.5\times0.4+0.6\times0.5\times(1-0.5)\times0.4+0.6\times0.5\times0.5\times(1-0.4)=0.31$.

（Ⅱ）X 的可能取值为 0，1，2，3，4

$P(X=0)=(1-0.6)\times0.5^2\times(1-0.4)=0.06$

$P(X=1)=0.6\times0.5^2\times(1-0.4)+(1-0.6)\times0.5^2\times0.4+(1-0.6)\times2\times0.5^2\times(1-0.4)=0.25$

$P(X=4)=P(A_2\bullet B\bullet C)=0.5^2\times0.6\times0.4=0.06$，

$P(X=3)=P(D)-P(X=4)=0.25$，

$P(X=2)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=3)-P(X=4)=1-0.06-0.25-0.25-0.06=0.38$.

故数学期望 $EX=0\times0.06+1\times0.25+2\times0.38+3\times0.25+4\times0.06=2$

【点评】本题主要考查了独立事件的概率和数学期望，关键是找到独立的事件，计算要有耐心，属于难题.

21．（12 分）已知抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）的焦点为 F，直线 $y=4$ 与 y 轴的交点为 P，与 C 的交点为 Q，且 $|QF|=\frac{5}{4}|PQ|$.

（Ⅰ）求 C 的方程；

（Ⅱ）过 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点，若 AB 的垂直平分线 l′与 C 相交于 M、N 两点，且 A、M、B、N 四点在同一圆上，求 l 的方程.

【考点】KH：直线与圆锥曲线的综合.

【专题】5E：圆锥曲线中的最值与范围问题.

【分析】（Ⅰ）设点 Q 的坐标为（x_0，4），把点 Q 的坐标代入抛物线 C 的方程，求得 $x_0=\frac{8}{p}$，根据 $|QF|=\frac{5}{4}|PQ|$ 求得 p 的值，可得 C 的方程.

（Ⅱ）设 l 的方程为 $x=my+1$ （$m\neq0$），代入抛物线方程化简，利用韦达定理、中点公式、弦长公式求得弦长|AB|．把直线 l′的方程代入抛物线方程化简，利用韦达定理、弦长公式求得|MN|．由于 MN 垂直平分线段 AB，故 AMBN 四点共圆等价于$|AE|=|BE|=\frac{1}{2}|MN|$，由此求得 m 的值，可得直线 l 的方程.

【解答】解：（Ⅰ）设点 Q 的坐标为$(x_0,4)$，把点 Q 的坐标代入抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$），

可得 $x_0=\frac{8}{p}$，∵点 P（0，4），∴$|PQ|=\frac{8}{p}$.

又$|QF|=x_0+\frac{p}{2}=\frac{8}{p}+\frac{p}{2}$，$|QF|=\frac{5}{4}|PQ|$，

∴$\frac{8}{p}+\frac{p}{2}=\frac{5}{4}\times\frac{8}{p}$，求得 $p=2$，或 $p=-2$（舍去）．

故 C 的方程为 $y^2=4x$.

（Ⅱ）由题意可得，直线 l 和坐标轴不垂直，$y^2=4x$ 的焦点 F（1，0），

设 l 的方程为 $x=my+1$（$m\neq0$），

代入抛物线方程可得 $y^2-4my-4=0$，显然判别式$\triangle=16m^2+16>0$，$y_1+y_2=4m$，$y_1\bullet y_2=-4$.

∴ AB 的中点坐标为 D（$2m^2+1$，$2m$），弦长$|AB|=\sqrt{m^2+1}|y_1-y_2|=\sqrt{m^2+1}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=4(m^2+1)$．

又直线 l′的斜率为$-m$，∴直线 l′的方程为 $x=-\frac{1}{m}y+2m^2+3$.

过 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点，若 AB 的垂直平分线 l′与 C 相交于 M、N 两点，

把线 l′的方程代入抛物线方程可得 $y^2+\frac{4}{m}y-4(2m^2+3)=0$，∴$y_3+y_4=\frac{-4}{m}$，$y_3\bullet y_4=-4(2m^2+3)$．

故线段 MN 的中点 E 的坐标为（$\frac{2}{m^2}+2m^2+3$，$\frac{-2}{m}$），∴$|MN|=\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}|y_3-y_4|=\frac{4(m^2+1)\bullet\sqrt{2m^2+1}}{m^2}$，

∵MN 垂直平分线段 AB，故 AMBN 四点共圆等价于$|AE|=|BE|=\frac{1}{2}|MN|$，

$\therefore \frac{1}{4}\cdot AB^2+DE^2=\frac{1}{4}MN^2$，

$\therefore 4(m^2+1)^2+(2m+\frac{2}{m})^2+(\frac{2}{m^2}+2)^2=\frac{1}{4}\times\frac{16\cdot(m^2+1)^2\cdot(2m^2+1)}{m^4}$，化简可得

$m^2-1=0$，

$\therefore m=\pm1$，$\therefore$直线 l 的方程为 $x-y-1=0$，或 $x+y-1=0$.

【点评】本题主要考查求抛物线的标准方程，直线和圆锥曲线的位置关系的应用，韦达定理、弦长公式的应用，体现了转化的数学思想，属于难题.

22．（12 分）函数 $f(x)=\ln(x+1)-\frac{ax}{x+a}$（$a>1$）.

（Ⅰ）讨论 f（x）的单调性；

（Ⅱ）设 $a_1=1$，$a_{n+1}=\ln(a_n+1)$，证明：$\frac{2}{n+2}<a_n\leq\frac{3}{n+2}$（$n\in N^*$）.

【考点】6B：利用导数研究函数的单调性；RG：数学归纳法.

【专题】53：导数的综合应用.

【分析】（Ⅰ）求函数的导数，通过讨论 a 的取值范围，即可得到 f（x）的单调性；

（Ⅱ）利用数学归纳法即可证明不等式.

【解答】解：（Ⅰ）函数 f（x）的定义域为（﹣1，+∞），$f'(x)=\frac{x[x-(a^2-2a)]}{(x+1)(x+a)^2}$，

①当 $1<a<2$ 时，若 $x\in(-1,a^2-2a)$，则 $f'(x)>0$，此时函数 f（x）在（﹣1，a^2-2a）上是增函数，

若 $x\in(a^2-2a,0)$，则 $f'(x)<0$，此时函数 f（x）在（a^2-2a，0）上是减函数，

若 $x\in(0,+\infty)$，则 $f'(x)>0$，此时函数 f（x）在（0，+∞）上是增函数.

②当 $a=2$ 时，$f'(x)\geq0$，此时函数 f（x）在（﹣1，+∞）上是增函数，

③当 $a>2$ 时，若 $x\in(-1,0)$，则 $f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上是增函数，

若 $x\in(0,a^2-2a)$，则 $f'(x)<0$，此时函数 $f(x)$ 在 $(0,a^2-2a)$ 上是减函数，

若 $x\in(a^2-2a,+\infty)$，则 $f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 在 $(a^2-2a,+\infty)$ 上是增函数.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，当 $a=2$ 时，此时函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上是增函数，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)>f(0)=0$，

即 $\ln(x+1)>\frac{2x}{x+2}$，$(x>0)$，

又由（Ⅰ）知，当 $a=3$ 时，$f(x)$ 在 $(0,3)$ 上是减函数，

当 $x\in(0,3)$ 时，$f(x)<f(0)=0$，$\ln(x+1)<\frac{3x}{x+3}$，

下面用数学归纳法进行证明 $\frac{2}{n+2}<a_n\leqslant\frac{3}{n+2}$ 成立，

①当 $n=1$ 时，由已知

$\frac{2}{3}<a_1=1$，故结论成立.

②假设当 $n=k$ 时结论成立，即 $\frac{2}{k+2}<a_k\leqslant\frac{3}{k+2}$，

则当 $n=k+1$ 时，$a_{n+1}=\ln(a_n+1)>\ln\left(\frac{2}{k+2}+1\right)>\frac{2\times\frac{2}{k+2}}{\frac{2}{k+2}+2}=\frac{2}{k+3}$，

$a_{k+1}=\ln(a_k+1)<\ln\left(\frac{3}{k+2}+1\right)<\frac{3\times\frac{3}{k+2}}{\frac{3}{k+2}+3}=\frac{3}{k+3}$，

即当 $n=k+1$ 时，$\frac{2}{k+3}<a_{k+1}\leqslant\frac{3}{k+3}$ 成立，

综上由①②可知，对任何 $n\in N^{\bullet}$ 结论都成立.

【点评】本题主要考查函数单调性和导数之间的关系，以及利用数学归纳法证明不等式，综合性较强，难度较大.