

2013年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标Ⅱ）

一、选择题：本大题共 12 小题. 每小题 5 分，共 60 分. 在每个小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. (5 分) 已知集合 $M = \{x \mid (x-1)^2 < 4, x \in \mathbb{R}\}$, $N = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, 则 $M \cap N = (\quad)$

A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{-1, 0, 1, 2\}$
 C. $\{-1, 0, 2, 3\}$ D. $\{0, 1, 2, 3\}$

2. (5 分) 设复数 z 满足 $(1-i)z=2i$, 则 $z = (\quad)$

A. $-1+i$ B. $-1-i$ C. $1+i$ D. $1-i$

3. (5 分) 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $S_3 = a_2 + 10a_1$, $a_5 = 9$, 则 $a_1 = (\quad)$

A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $-\frac{1}{9}$

4. (5 分) 已知 m , n 为异面直线, $m \perp$ 平面 α , $n \perp$ 平面 β . 直线 l 满足 $l \perp m$, $l \perp n$, $l \not\subset \alpha$, $l \not\subset \beta$, 则 (\quad)

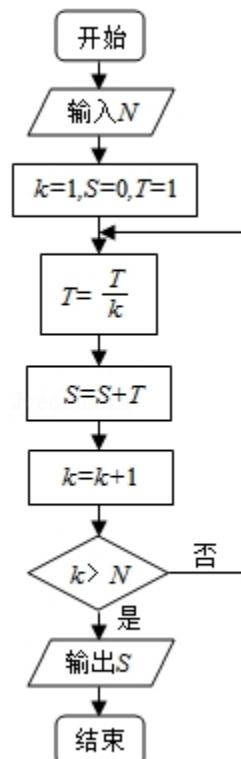
A. $\alpha \parallel \beta$ 且 $l \parallel \alpha$ B. $\alpha \perp \beta$ 且 $l \perp \beta$
 C. α 与 β 相交, 且交线垂直于 l D. α 与 β 相交, 且交线平行于 l

5. (5 分) 已知 $(1+ax)(1+x)^5$ 的展开式中 x^2 的系数为 5, 则 $a = (\quad)$

A. -4 B. -3
 C. -2 D. -1

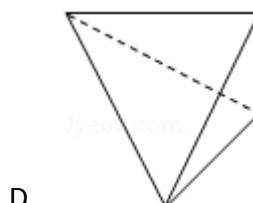
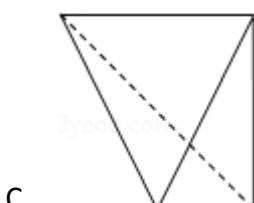
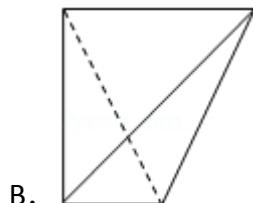
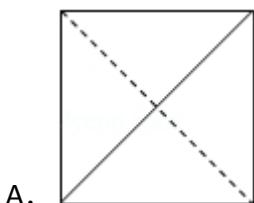
6. (5 分) 执行右面的程序框图, 如果输入的 $N=10$, 那么输出的 $S = (\quad)$

A. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10}$
 B. $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{10!}$
 C. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{11}$



D. $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{11!}$

7. (5分) 一个四面体的顶点在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标分别是 $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 0, 0)$, 画该四面体三视图中的正视图时, 以 zOx 平面为投影面, 则得到正视图可以为 ()



8. (5分) 设 $a = \log_3 6$, $b = \log_5 10$, $c = \log_7 14$, 则 ()

A. $c > b > a$ B. $b > c > a$ C. $a > c > b$ D. $a > b > c$

9. (5分) 已知 $a > 0$, 实数 x, y 满足: $\begin{cases} x \geq 1 \\ x+y \leq 3 \\ y \geq a(x-3) \end{cases}$, 若 $z = 2x+y$ 的最小值为 1, 则 $a =$ ()

A. 2 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

10. (5分) 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, 下列结论中错误的是 ()

A. $\exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = 0$
 B. 函数 $y=f(x)$ 的图象是中心对称图形
 C. 若 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点, 则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, x_0)$ 单调递减
 D. 若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点, 则 $f'(x_0) = 0$

11. (5分) 设抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 点 M 在 C 上, $|MF| = 5$, 若以 MF 为直径的圆过点 $(0, 2)$, 则 C 的方程为 ()

A. $y^2 = 4x$ 或 $y^2 = 8x$ B. $y^2 = 2x$ 或 $y^2 = 8x$
 C. $y^2 = 4x$ 或 $y^2 = 16x$ D. $y^2 = 2x$ 或 $y^2 = 16x$

12. (5分) 已知点 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$, 直线 $y = ax + b$ ($a > 0$

) 将 $\triangle ABC$ 分割为面积相等的两部分, 则 b 的取值范围是 ()

A. $(0, 1)$ B. $(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ C. $(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{3})$ D. $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分.

13. (5 分) 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2, E 为 CD 的中点, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. (5 分) 从 n 个正整数 $1, 2, \dots, n$ 中任意取出两个不同的数, 若取出的两数之和等于 5 的概率为 $\frac{1}{14}$, 则 $n = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. (5 分) 设 θ 为第二象限角, 若 $\tan(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$, 则 $\sin\theta + \cos\theta = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. (5 分) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $S_{10}=0$, $S_{15}=25$, 则 nS_n 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三. 解答题: 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤:

17. (12 分) $\triangle ABC$ 在内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a = b \cos C + c \sin B$

(I) 求 B ;

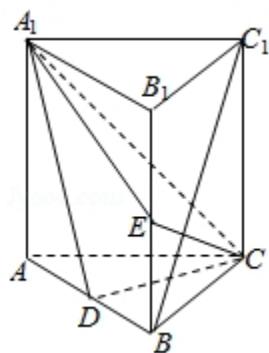
(II) 若 $b=2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

18. (12 分) 如图, 直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D, E 分别是 AB, BB_1 的中点,

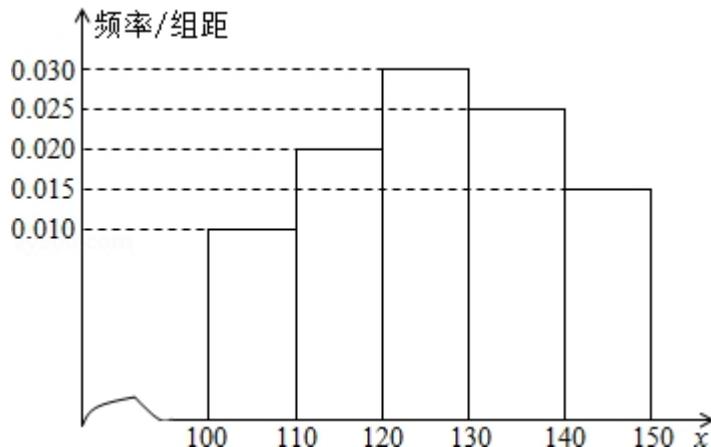
$$AA_1 = AC = CB = \frac{\sqrt{2}}{2}AB.$$

(I) 证明: $BC_1 \parallel$ 平面 A_1CD

(II) 求二面角 $D-A_1C-E$ 的正弦值.



19. (12分) 经销商经销某种农产品，在一个销售季度内，每售出 $1t$ 该产品获利润 500 元，未售出的产品，每 $1t$ 亏损 300 元. 根据历史资料，得到销售季度内市场需求量的频率分布直方图，如图所示. 经销商为下一个销售季度购进了 $130t$ 该农产品. 以 x (单位: t , $100 \leq x \leq 150$) 表示下一个销售季度内的市场需求量， T (单位: 元) 表示下一个销售季度内经销该农产品的利润.



- (I) 将 T 表示为 x 的函数；
- (II) 根据直方图估计利润 T 不少于 57000 元的概率；
- (III) 在直方图的需求量分组中，以各组的区间中点值代表该组的各个值，并以需求量落入该区间的频率作为需求量取该区间中点值的概率（例如：若 $x \in [100, 110)$) 则取 $x=105$ ，且 $x=105$ 的概率等于需求量落入 $[100, 110)$ 的频率，求 T 的数学期望.

20. (12 分) 平面直角坐标系 xOy 中, 过椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 右焦点的直线 $x+y-\sqrt{3}=0$ 交 M 于 A, B 两点, P 为 AB 的中点, 且 OP 的斜率为 $\frac{1}{2}$.

(I) 求 M 的方程

(II) C, D 为 M 上的两点, 若四边形 $ACBD$ 的对角线 $CD \perp AB$, 求四边形 $ACBD$ 面积的最大值.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x - \ln(x+m)$

(I) 设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 求 m , 并讨论 $f(x)$ 的单调性;

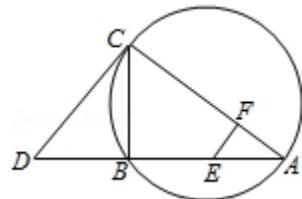
(II) 当 $m \leq 2$ 时, 证明 $f(x) > 0$.

选考题：（第 22 题～第 24 题为选考题，考生根据要求作答。请考生在第 22、23、24 题中任选择一题作答，如果多做，则按所做的第一部分评分，作答时请写清题号）

22. (10 分) 【选修 4-1 几何证明选讲】

如图， CD 为 $\triangle ABC$ 外接圆的切线， AB 的延长线交直线 CD 于点 D ， E 、 F 分别为弦 AB 与弦 AC 上的点，且 $BC \cdot AE = DC \cdot AF$ ， B 、 E 、 F 、 C 四点共圆。

- (1) 证明： CA 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径；
- (2) 若 $DB = BE = EA$ ，求过 B 、 E 、 F 、 C 四点的圆的面积与 $\triangle ABC$ 外接圆面积的比值。



23. 已知动点 P 、 Q 都在曲线 $C: \begin{cases} x=2\cos\beta \\ y=2\sin\beta \end{cases}$ (β 为参数) 上，对应参数分别为 $\beta=\alpha$ 与 $\beta=2\alpha$ ($0 < \alpha < 2\pi$)， M 为 PQ 的中点。

- (1) 求 M 的轨迹的参数方程；
- (2) 将 M 到坐标原点的距离 d 表示为 α 的函数，并判断 M 的轨迹是否过坐标

原点.

24. 【选修 4- - 5; 不等式选讲】

设 a, b, c 均为正数, 且 $a+b+c=1$, 证明:

$$(I) ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}$$

$$(II) \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 1.$$

2013年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标Ⅱ）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共 12 小题. 每小题 5 分，共 60 分. 在每个小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. (5 分) 已知集合 $M=\{x \mid (x-1)^2 < 4, x \in \mathbb{R}\}$, $N=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$, 则 $M \cap N= (\quad)$

A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{-1, 0, 1, 2\}$ C. $\{-1, 0, 2, 3\}$ D. $\{0, 1, 2, 3\}$

【考点】1E: 交集及其运算；73: 一元二次不等式及其应用.

【专题】11: 计算题.

【分析】求出集合 M 中不等式的解集，确定出 M ，找出 M 与 N 的公共元素，即可确定出两集合的交集.

【解答】解：由 $(x-1)^2 < 4$, 解得: $-1 < x < 3$, 即 $M=\{x \mid -1 < x < 3\}$,

$\therefore N=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$,

$\therefore M \cap N=\{0, 1, 2\}$.

故选：A.

【点评】此题考查了交集及其运算，熟练掌握交集的定义是解本题的关键.

2. (5 分) 设复数 z 满足 $(1-i)z=2i$, 则 $z= (\quad)$

A. $-1+i$ B. $-1-i$ C. $1+i$ D. $1-i$

【考点】A5: 复数的运算.

【专题】11: 计算题.

【分析】根据所给的等式两边同时除以 $1-i$, 得到 z 的表示式，进行复数的除

法运算，分子和分母同乘以分母的共轭复数，整理成最简形式，得到结果.

【解答】解： \because 复数 z 满足 $z(1-i)=2i$,

$$\therefore z = \frac{2i}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -1+i$$

故选：A.

【点评】本题考查代数形式的除法运算，是一个基础题，这种题目若出现一定是一个送分题目，注意数字的运算.

3. (5分) 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，已知 $S_3=a_2+10a_1$ ， $a_5=9$ ，则 $a_1=$ ()

A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $-\frac{1}{9}$

【考点】89：等比数列的前 n 项和.

【专题】54：等差数列与等比数列.

【分析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，利用已知和等比数列的通项公式即可得到

$$\begin{cases} a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = a_1 q + 10 a_1 \\ a_1 q^4 = 9 \end{cases}, \text{解出即可.}$$

【解答】解：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，

$$\therefore S_3 = a_2 + 10a_1, a_5 = 9,$$

$$\therefore \begin{cases} a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = a_1 q + 10 a_1 \\ a_1 q^4 = 9 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} q^2 = 9 \\ a_1 = \frac{1}{9} \end{cases}.$$

$$\therefore a_1 = \frac{1}{9}.$$

故选：C.

【点评】熟练掌握等比数列的通项公式是解题的关键.

4. (5分) 已知 m ， n 为异面直线， $m \perp$ 平面 α ， $n \perp$ 平面 β . 直线 l 满足 $l \perp m$ ，

$$l \perp n, l \not\subset \alpha, l \not\subset \beta, \text{则 ()}$$

A. $\alpha \parallel \beta$ 且 $l \parallel \alpha$ B. $\alpha \perp \beta$ 且 $l \perp \beta$
C. α 与 β 相交，且交线垂直于 l D. α 与 β 相交，且交线平行于 l

【考点】U：平面的基本性质及推论；LQ：平面与平面之间的位置关系.

【专题】5F：空间位置关系与距离.

【分析】由题目给出的已知条件，结合线面平行，线面垂直的判定与性质，可以直接得到正确的结论.

【解答】解：由 $m \perp$ 平面 α ，直线 l 满足 $l \perp m$ ，且 $l \not\subset \alpha$ ，所以 $l \parallel \alpha$ ，又 $n \perp$ 平面 β ， $l \perp n$ ， $l \not\subset \beta$ ，所以 $l \parallel \beta$.

由直线 m ， n 为异面直线，且 $m \perp$ 平面 α ， $n \perp$ 平面 β ，则 α 与 β 相交，否则，

若 $\alpha \parallel \beta$ 则推出 $m \parallel n$ ，

与 m ， n 异面矛盾.

故 α 与 β 相交，且交线平行于 l .

故选：D.

【点评】本题考查了平面与平面之间的位置关系，考查了平面的基本性质及推论，考查了线面平行、线面垂直的判定与性质，考查了学生的空间想象和思维能力，是中档题.

5. (5 分) 已知 $(1+ax)(1+x)^5$ 的展开式中 x^2 的系数为 5，则 $a=$ ()

A. - 4

B. - 3

C. - 2

D. - 1

【考点】DA：二项式定理.

【专题】5I：概率与统计.

【分析】由题意利用二项展开式的通项公式求得展开式中 x^2 的系数为

$C_5^2 + a \cdot C_5^1 = 5$ ，由此解得 a 的值.

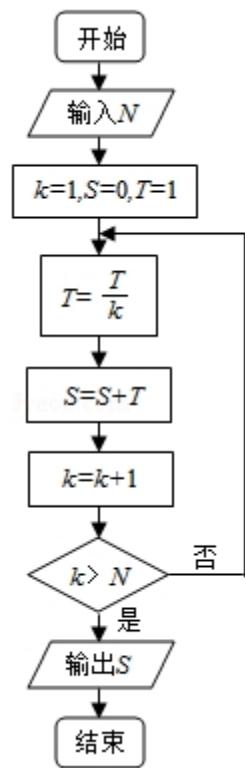
【解答】解：已知 $(1+ax)(1+x)^5 = (1+ax)(1+C_5^1x+C_5^2x^2+C_5^3x^3+C_5^4x^4+C_5^5x^5)$

展开式中 x^2 的系数为 $C_5^2 + a \cdot C_5^1 = 5$ ，解得 $a = -1$ ，

故选：D.

【点评】本题主要考查二项式定理的应用，二项式展开式的通项公式，求展开式中某项的系数，属于中档题.

6. (5分) 执行右面的程序框图, 如果输入的 $N=10$, 那么输出的 $S=$ ()



A. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10}$

B. $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{10!}$

C. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{11}$

D. $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{11!}$

【考点】EF: 程序框图.

【专题】27: 图表型.

【分析】从赋值框给出的两个变量的值开始, 逐渐分析写出程序运行的每一步,

便可得到程序框图表示的算法的功能.

【解答】解: 框图首先给累加变量 S 和循环变量 i 赋值,

$$S=0+1=1, \quad k=1+1=2;$$

判断 $k > 10$ 不成立, 执行 $S=1+\frac{1}{2}$, $k=2+1=3$;

判断 $k > 10$ 不成立, 执行 $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 3}$, $k=3+1=4$;

判断 $k > 10$ 不成立, 执行 $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}$, $k=4+1=5$;

...

判断 $i > 10$ 不成立, 执行 $S = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{10!}$, $k = 10 + 1 = 11$;

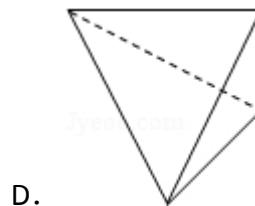
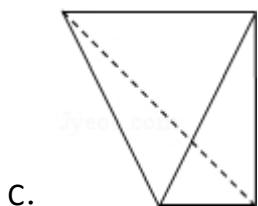
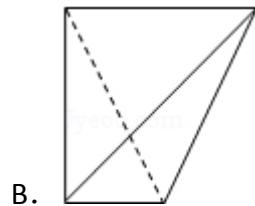
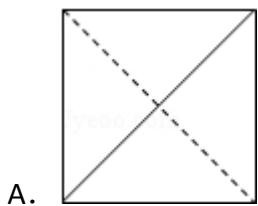
判断 $i > 10$ 成立, 输出 $S = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{10!}$.

算法结束.

故选: B.

【点评】本题考查解决程序框图中的循环结构时, 常采用写出前几次循环的结果, 找规律.

7. (5分)一个四面体的顶点在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标分别是 $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 0, 0)$, 画该四面体三视图中的正视图时, 以 zOx 平面为投影面, 则得到正视图可以为 ()

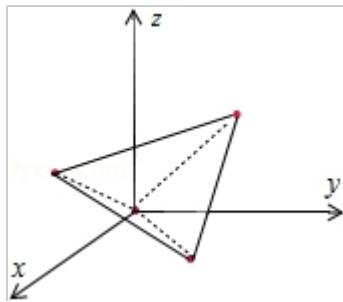


【考点】L7: 简单空间图形的三视图.

【专题】11: 计算题; 13: 作图题.

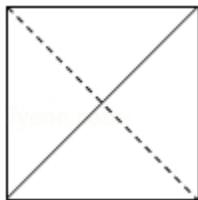
【分析】由题意画出几何体的直观图, 然后判断以 zOx 平面为投影面, 则得到正视图即可.

【解答】解: 因为一个四面体的顶点在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标分别是 $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 0, 0)$, 几何体的直观图如图, 是正方体的顶点为顶点的一个正四面体, 所以以 zOx 平面为投影面,



则得到正视图为：

故选：A.



【点评】本题考查几何体的三视图的判断，根据题意画出几何体的直观图是解题的关键，考查空间想象能力.

8. (5分) 设 $a=\log_3 6$, $b=\log_5 10$, $c=\log_7 14$, 则 ()

A. $c > b > a$ B. $b > c > a$ C. $a > c > b$ D. $a > b > c$

【考点】4M：对数值大小的比较.

【专题】11：计算题.

【分析】利用 $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ ($x, y > 0$), 化简 a, b, c 然后比较 $\log_3 2, \log_5 2, \log_7 2$ 大小即可.

【解答】解：因为 $a=\log_3 6=1+\log_3 2$, $b=\log_5 10=1+\log_5 2$, $c=\log_7 14=1+\log_7 2$,
因为 $y=\log_2 x$ 是增函数，所以 $\log_2 7 > \log_2 5 > \log_2 3$,

$$\therefore \log_2 7 = \frac{1}{\log_7 2}, \log_2 5 = \frac{1}{\log_5 2}, \log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2}$$

所以 $\log_3 2 > \log_5 2 > \log_7 2$,

所以 $a > b > c$,

故选：D.

【点评】本题主要考查不等式与不等关系，对数函数的单调性的应用，不等式的基本性质的应用，属于基础题.

9. (5分) 已知 $a > 0$, 实数 x, y 满足: $\begin{cases} x \geq 1 \\ x+y \leq 3 \\ y \geq a(x-3) \end{cases}$, 若 $z=2x+y$ 的最小值为 1,

则 $a = ()$

【考点】7C: 简单线性规划.

【专题】59: 不等式的解法及应用.

【分析】作出不等式对应的平面区域，利用线性规划的知识，通过平移即先确定 z 的最优解，然后确定 a 的值即可.

【解答】解：作出不等式对应的平面区域，（阴影部分）

由 $z=2x+y$, 得 $y=-2x+z$,

平移直线 $y = -2x + z$, 由图象可知当直线 $y = -2x + z$ 经过点 C 时, 直线 $y = -2x + z$ 的截距最小, 此时 z 最小.

$$\text{即 } 2x+y=1,$$

由 $\begin{cases} x=1 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ ，

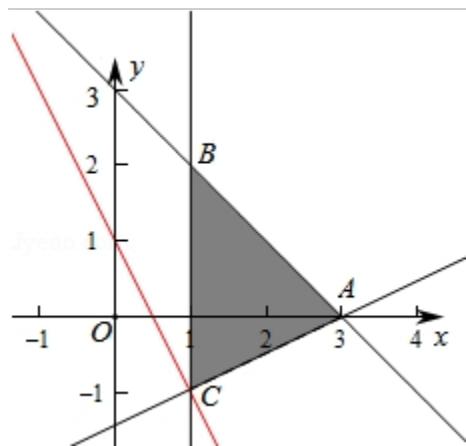
即 $C(1, -1)$,

∴ 点 C 也在直线 $y=a(x-3)$ 上,

$$\therefore -1 = -2a,$$

解得 $a = \frac{1}{2}$.

故选：C.



【点评】本题主要考查线性规划的应用，利用数形结合是解决线性规划题目的常用方法.

10. (5分) 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ，下列结论中错误的是 ()

- A. $\exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = 0$
- B. 函数 $y=f(x)$ 的图象是中心对称图形
- C. 若 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点，则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, x_0)$ 单调递减
- D. 若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(x_0) = 0$

【考点】6B: 利用导数研究函数的单调性; 6D: 利用导数研究函数的极值.

【专题】53: 导数的综合应用.

【分析】利用导数的运算法则得出 $f'(x)$ ，分 $\Delta > 0$ 与 $\Delta \leq 0$ 讨论，列出表格，即可得出.

【解答】解: $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

(1) 当 $\Delta = 4a^2 - 12b > 0$ 时， $f'(x) = 0$ 有两解，不妨设为 $x_1 < x_2$ ，列表如下

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

由表格可知:

① x_2 是函数 $f(x)$ 的极小值点，但是 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, x_2)$ 不具有单调性，

故 C 不正确.

$$\textcircled{2} \because f\left(-\frac{2a}{3}-x\right)+f(x) = \left(-\frac{2a}{3}-x\right)^3 + a\left(-\frac{2a}{3}-x\right)^2 + b\left(-\frac{2a}{3}-x\right) + c + x^3 + ax^2 + bx + c = \frac{4}{27}a^3 - \frac{2ab}{3} + 2c,$$

$$f\left(-\frac{a}{3}\right) = \left(-\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(-\frac{a}{3}\right)^2 + b\left(-\frac{a}{3}\right) + c = \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c,$$

$$\therefore f\left(-\frac{2a}{3}-x\right)+f(x) = 2f\left(-\frac{a}{3}\right),$$

∴ 点 $P\left(-\frac{a}{3}, f\left(-\frac{a}{3}\right)\right)$ 为对称中心, 故 B 正确.

③ 由表格可知 x_1, x_2 分别为极值点, 则 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$, 故 D 正确.

④ ∵ $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$, 函数 $f(x)$ 必然穿过 x

轴, 即 $\exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = 0$, 故 A 正确.

(2) 当 $\Delta \leq 0$ 时, $f'(x) = 3(x+\frac{a}{3})^2 \geq 0$, 故 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递增, ① 此时不存在极值点, 故 D 正确, C 不正确;

② B 同 (1) 中 ② 正确;

③ ∵ $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$, 函数 $f(x)$ 必然穿过 x 轴, 即 $\exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = 0$, 故 A 正确.

综上可知: 错误的结论是 C.

由于该题选择错误的, 故选: C.

【点评】 熟练掌握导数的运算法则、中心得出的定义、单调性与极值的关系等基础知识与方法, 考查了分类讨论的思想方法等基本方法.

11. (5 分) 设抛物线 $C: y^2=2px$ ($p>0$) 的焦点为 F, 点 M 在 C 上, $|MF|=5$,

若以 MF 为直径的圆过点 $(0, 2)$, 则 C 的方程为 ()

A. $y^2=4x$ 或 $y^2=8x$ B. $y^2=2x$ 或 $y^2=8x$

C. $y^2=4x$ 或 $y^2=16x$ D. $y^2=2x$ 或 $y^2=16x$

【考点】 K7: 抛物线的标准方程.

【专题】 11: 计算题; 16: 压轴题; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】根据抛物线方程算出 $|OF| = \frac{p}{2}$, 设以 MF 为直径的圆过点 $A(0, 2)$,

在 $Rt\triangle AOF$ 中利用勾股定理算出 $|AF| = \sqrt{4 + \frac{p^2}{4}}$. 再由直线 AO 与以 MF 为直径

的圆相切得到 $\angle OAF = \angle AMF$, $Rt\triangle AMF$ 中利用 $\angle AMF$ 的正弦建立关系式, 从而得到关于 p 的方程, 解之得到实数 p 的值, 进而得到抛物线 C 的方程.

【解答】解: \because 抛物线 C 方程为 $y^2 = 2px (p > 0)$,

\therefore 焦点 F 坐标为 $(\frac{p}{2}, 0)$, 可得 $|OF| = \frac{p}{2}$,

\because 以 MF 为直径的圆过点 $(0, 2)$,

\therefore 设 $A(0, 2)$, 可得 $AF \perp AM$,

$$Rt\triangle AOF \text{ 中, } |AF| = \sqrt{2^2 + (\frac{p}{2})^2} = \sqrt{4 + \frac{p^2}{4}},$$

$$\therefore \sin \angle OAF = \frac{|OF|}{|AF|} = \frac{\frac{p}{2}}{\sqrt{4 + \frac{p^2}{4}}},$$

\because 根据抛物线的定义, 得直线 AO 切以 MF 为直径的圆于 A 点,

$$\therefore \angle OAF = \angle AMF, \text{ 可得 } Rt\triangle AMF \text{ 中, } \sin \angle AMF = \frac{|AF|}{|MF|} = \frac{\frac{p}{2}}{\sqrt{4 + \frac{p^2}{4}}},$$

$$\therefore |MF| = 5, |AF| = \sqrt{4 + \frac{p^2}{4}}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{4 + \frac{p^2}{4}}}{5} = \frac{\frac{p}{2}}{\sqrt{4 + \frac{p^2}{4}}}, \text{ 整理得 } 4 + \frac{p^2}{4} = \frac{5p}{2}, \text{ 解之可得 } p = 2 \text{ 或 } p = 8$$

因此, 抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$ 或 $y^2 = 16x$.

故选: C.

方法二:

\because 抛物线 C 方程为 $y^2 = 2px (p > 0)$, \therefore 焦点 $F(\frac{p}{2}, 0)$,

设 $M(x, y)$ ，由抛物线性质 $|MF|=x+\frac{p}{2}=5$ ，可得 $x=5-\frac{p}{2}$ ，

因为圆心是 MF 的中点，所以根据中点坐标公式可得，圆心横坐标为 $\frac{5-\frac{p}{2}+\frac{p}{2}}{2}=\frac{5}{2}$

，

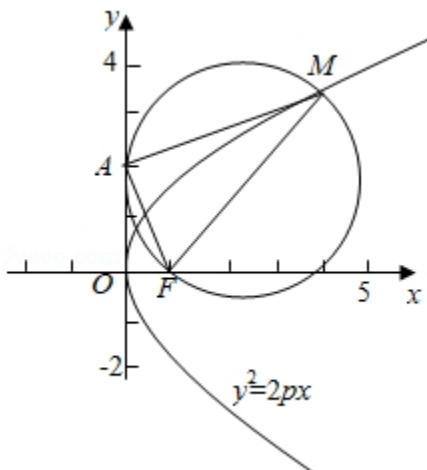
由已知圆半径也为 $\frac{5}{2}$ ，据此可知该圆与 y 轴相切于点 $(0, 2)$ ，故圆心纵坐标为

2，则 M 点纵坐标为 4，

即 $M(5-\frac{p}{2}, 4)$ ，代入抛物线方程得 $p^2-10p+16=0$ ，所以 $p=2$ 或 $p=8$ 。

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$ 或 $y^2=16x$ 。

故选：C.



【点评】本题给出抛物线一条长度为 5 的焦半径 MF ，以 MF 为直径的圆交抛物线于点 $(0, 2)$ ，求抛物线的方程，着重考查了抛物线的定义与简单几何性质、圆的性质和解直角三角形等知识，属于中档题。

12. (5 分) 已知点 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$, 直线 $y=ax+b$ ($a>0$)

) 将 $\triangle ABC$ 分割为面积相等的两部分，则 b 的取值范围是 ()

A. $(0, 1)$ B. $(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ C. $(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{3})$ D. $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

【考点】H: 三角形的面积公式；I1: 确定直线位置的几何要素；IT: 点到直线的距离公式。

【专题】31: 数形结合；35: 转化思想；44: 数形结合法；5B: 直线与圆。

【分析】解法一：先求得直线 $y=ax+b$ ($a>0$) 与 x 轴的交点为 $M(-\frac{b}{a}, 0)$ ，

由 $-\frac{b}{a} \leq 0$ 可得点 M 在射线 OA 上. 求出直线和 BC 的交点 N 的坐标，①若点

M 和点 A 重合，求得 $b=\frac{1}{3}$ ；②若点 M 在点 O 和点 A 之间，求得 $\frac{1}{3} < b < \frac{1}{2}$ ；③

若点 M 在点 A 的左侧，求得 $\frac{1}{3} > b > 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. 再把以上得到的三个 b 的范围

取并集，可得结果.

解法二：考查临界位置时对应的 b 值，综合可得结论.

【解答】解：解法一：由题意可得，三角形 ABC 的面积为 $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot OC = 1$ ，

由于直线 $y=ax+b$ ($a>0$) 与 x 轴的交点为 $M(-\frac{b}{a}, 0)$ ，

由直线 $y=ax+b$ ($a>0$) 将 $\triangle ABC$ 分割为面积相等的两部分，可得 $b>0$ ，

故 $-\frac{b}{a} \leq 0$ ，故点 M 在射线 OA 上.

设直线 $y=ax+b$ 和 BC 的交点为 N ，则由 $\begin{cases} y=ax+b \\ x+y=1 \end{cases}$ 可得点 N 的坐标为 $(\frac{1-b}{a+1}, \frac{a+b}{a+1})$.

①若点 M 和点 A 重合，则点 N 为线段 BC 的中点，故 $N(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ，

把 A 、 N 两点的坐标代入直线 $y=ax+b$ ，求得 $a=b=\frac{1}{3}$.

②若点 M 在点 O 和点 A 之间，此时 $b>\frac{1}{3}$ ，点 N 在点 B 和点 C 之间，

由题意可得三角形 NMB 的面积等于 $\frac{1}{2}$ ，

即 $\frac{1}{2} \cdot MB \cdot y_N = \frac{1}{2}$ ，即 $\frac{1}{2} \times (1 + \frac{b}{a}) \cdot \frac{a+b}{a+1} = \frac{1}{2}$ ，可得 $a = \frac{b^2}{1-2b} > 0$ ，求得 $b < \frac{1}{2}$ ，

故有 $\frac{1}{3} < b < \frac{1}{2}$.

③若点 M 在点 A 的左侧，则 $b < \frac{1}{3}$ ，由点 M 的横坐标 $-\frac{b}{a} < -1$ ，求得 $b > a$.

设直线 $y=ax+b$ 和 AC 的交点为 P ，则由 $\begin{cases} y=ax+b \\ y=x+1 \end{cases}$ 求得点 P 的坐标为 $(\frac{1-b}{a-1}, \frac{a-b}{a-1})$ ，

此时，由题意可得，三角形 CPN 的面积等于 $\frac{1}{2}$ ，即 $\frac{1}{2} \cdot (1-b) \cdot |x_N - x_P| = \frac{1}{2}$ ，

即 $\frac{1}{2} (1-b) \cdot |\frac{1-b}{a+1} - \frac{1-b}{a-1}| = \frac{1}{2}$ ，化简可得 $2(1-b)^2 = |a^2 - 1|$.

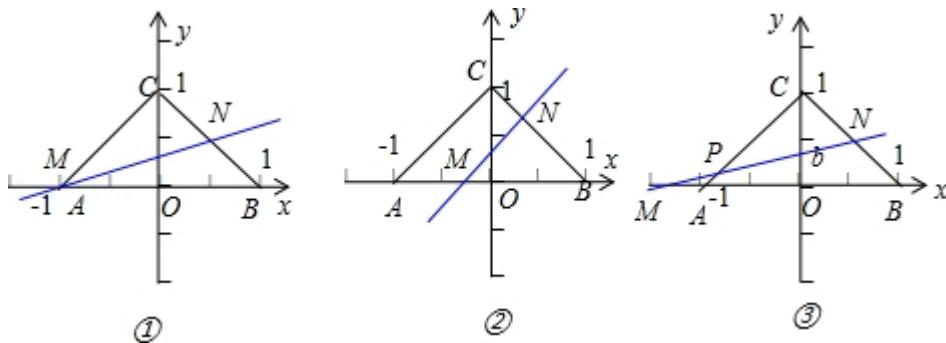
由于此时 $b > a > 0$, $0 < a < 1$, $\therefore 2(1-b)^2 = |a^2 - 1| = 1 - a^2$.

两边开方可得 $\sqrt{2}(1-b) = \sqrt{1-a^2} < 1$, $\therefore 1-b < \frac{1}{\sqrt{2}}$, 化简可得 $b > 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$,

故有 $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < b < \frac{1}{3}$.

再把以上得到的三个 b 的范围取并集, 可得 b 的取值范围应是 $(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{3})$,

故选: B.



解法二: 当 $a=0$ 时, 直线 $y=ax+b$ ($a>0$) 平行于 AB 边,

由题意根据三角形相似且面积比等于相似比的平方可得 $(\frac{1-b}{1})^2 = \frac{1}{2}$, $b = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$,

趋于最小.

由于 $a>0$, $\therefore b > 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

当 a 逐渐变大时, b 也逐渐变大,

当 $b = \frac{1}{2}$ 时, 直线经过点 $(0, \frac{1}{2})$, 再根据直线平分 $\triangle ABC$ 的面积, 故 a 不存在,

故 $b < \frac{1}{2}$.

综上可得, $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < b < \frac{1}{2}$,

故选: B.

【点评】本题主要考查确定直线的要素, 点到直线的距离公式以及三角形的面积公式的应用, 还考察运算能力以及综合分析能力, 分类讨论思想, 属于难题.

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分.

13. (5 分) 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2, E 为 CD 的中点, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = \underline{\underline{2}}$.

【考点】90：平面向量数量积的性质及其运算.

【专题】5A：平面向量及应用.

【分析】根据两个向量的加减法的法则，以及其几何意义，可得要求的式子为（

$$(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$$

再根据两个向量垂直的性质，运算求得结果.

【解答】解： \because 已知正方形ABCD的边长为2，E为CD的中点，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ ，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \\ &\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 = 4 + 0 - 0 - \frac{1}{2} \times 4 = 2, \end{aligned}$$

故答案为 2.

【点评】本题主要考查两个向量的加减法的法则，以及其几何意义，两个向量垂直的性质，属于中档题.

14. (5分) 从n个正整数1, 2, ..., n中任意取出两个不同的数，若取出的两

$$\text{数之和等于5的概率为} \frac{1}{14}, \text{ 则} n = \underline{8}.$$

【考点】CB：古典概型及其概率计算公式.

【专题】5I：概率与统计.

【分析】列出从n个正整数1, 2, ..., n中任意取出两个不同的数的所有取法种数，求出和等于5的种数，根据取出的两数之和等于5的概率为 $\frac{1}{14}$ 列式计算n的值.

【解答】解：从n个正整数1, 2, ..., n中任意取出两个不同的数，取出的两数之和等于5的情况有：(1, 4), (2, 3) 共2种情况；

从n个正整数1, 2, ..., n中任意取出两个不同的数的所有不同取法种数为 C_n^2 ，

由古典概型概率计算公式得：

从n个正整数1, 2, ..., n中任意取出两个不同的数，取出的两数之和等于5的

$$\text{概率为} p = \frac{2}{C_n^2} = \frac{1}{14}.$$

所以 $C_n^2 = 28$, 即 $\frac{n(n-1)}{2} = 28$, 解得 $n=8$.

故答案为 8.

【点评】本题考查了古典概型及其概率计算公式, 考查了组合数公式, 解答此题时既可以按有序取, 也可以按无序取, 问题的实质是一样的. 此题是基础题.

15. (5 分) 设 θ 为第二象限角, 若 $\tan(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$, 则 $\sin\theta + \cos\theta = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{10}}{5}}}$.

【考点】GG: 同角三角函数间的基本关系; GP: 两角和与差的三角函数.

【专题】16: 压轴题; 56: 三角函数的求值.

【分析】已知等式利用两角和与差的正切函数公式及特殊角的三角函数值化简, 求出 $\tan\theta$ 的值, 再根据 θ 为第二象限角, 利用同角三角函数间的基本关系求出 $\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 的值, 即可求出 $\sin\theta + \cos\theta$ 的值.

【解答】解: $\because \tan(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan\theta + 1}{1 - \tan\theta} = \frac{1}{2}$,

$$\therefore \tan\theta = -\frac{1}{3},$$

$$\text{而 } \cos^2\theta = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = \frac{1}{1 + \tan^2\theta},$$

$\because \theta$ 为第二象限角,

$$\therefore \cos\theta = -\sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2\theta}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}, \sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\text{则 } \sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{10}}{10} - \frac{3\sqrt{10}}{10} = -\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

$$\text{故答案为: } -\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

【点评】此题考查了两角和与差的正切函数公式, 以及同角三角函数间的基本关系, 熟练掌握公式是解本题的关键.

16. (5 分) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $S_{10}=0$, $S_{15}=25$, 则 nS_n 的最小值为 $\underline{\underline{-49}}$.

【考点】6D：利用导数研究函数的极值；83：等差数列的性质；85：等差数列的前 n 项和。

【专题】16：压轴题；54：等差数列与等比数列。

【分析】由等差数列的前 n 项和公式化简已知两等式，联立求出首项 a_1 与公差 d 的值，结合导数求出 nS_n 的最小值。

【解答】解：设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ，公差为 d ，

$$\because S_{10}=10a_1+45d=0, S_{15}=15a_1+105d=25,$$

$$\therefore a_1=-3, d=\frac{2}{3},$$

$$\therefore S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{1}{3}n^2-\frac{10}{3}n,$$

$$\therefore nS_n=\frac{1}{3}n^3-\frac{10}{3}n^2, \text{令 } nS_n=f(n),$$

$$\therefore f'(n)=n^2-\frac{20}{3}n,$$

\therefore 当 $n=\frac{20}{3}$ 时， $f(n)$ 取得极值，当 $n < \frac{20}{3}$ 时， $f(n)$ 递减；当 $n > \frac{20}{3}$ 时， $f(n)$ 递增；

因此只需比较 $f(6)$ 和 $f(7)$ 的大小即可。

$$f(6)=-48, f(7)=-49,$$

故 nS_n 的最小值为 -49 。

故答案为： -49 。

【点评】此题考查了等差数列的性质，以及等差数列的前 n 项和公式，熟练掌握性质及公式是解本题的关键。

三. 解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤：

17. (12 分) $\triangle ABC$ 在内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $a=bcosC+csinB$

(I) 求 B ；

(II) 若 $b=2$ ，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值。

【考点】HP: 正弦定理; HR: 余弦定理.

【专题】58: 解三角形.

【分析】(I) 已知等式利用正弦定理化简, 再利用两角和与差的正弦函数公式及诱导公式变形, 求出 $\tan B$ 的值, 由 B 为三角形的内角, 利用特殊角的三角函数值即可求出 B 的度数;

(II) 利用三角形的面积公式表示出三角形 ABC 的面积, 把 $\sin B$ 的值代入, 得到三角形面积最大即为 ac 最大, 利用余弦定理列出关系式, 再利用基本不等式求出 ac 的最大值, 即可得到面积的最大值.

【解答】解: (I) 由已知及正弦定理得: $\sin A = \sin B \cos C + \sin B \sin C$ ①,

$$\because \sin A = \sin (B+C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$$
 ②,

$$\therefore \sin B = \cos B, \text{ 即 } \tan B = 1,$$

$\because B$ 为三角形的内角,

$$\therefore B = \frac{\pi}{4};$$

$$(II) S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{\sqrt{2}}{4}ac,$$

$$\text{由已知及余弦定理得: } 4 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \frac{\pi}{4} \geq 2ac - 2ac \times \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{整理得: } ac \leq \frac{4}{2-\sqrt{2}}, \text{ 当且仅当 } a=c \text{ 时, 等号成立,}$$

$$\text{则 } \triangle ABC \text{ 面积的最大值为 } \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{4}{2-\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times (2+\sqrt{2}) = \sqrt{2}+1.$$

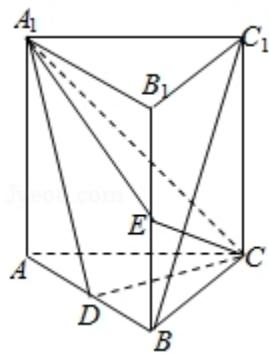
【点评】此题考查了正弦、余弦定理, 三角形的面积公式, 两角和与差的正弦函数公式, 以及基本不等式的运用, 熟练掌握定理及公式是解本题的关键.

18. (12 分) 如图, 直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D, E 分别是 AB, BB_1 的中点,

$$AA_1 = AC = CB = \frac{\sqrt{2}}{2}AB.$$

(I) 证明: $BC_1 \parallel$ 平面 A_1CD

(II) 求二面角 $D-A_1C-E$ 的正弦值.



【考点】 LS: 直线与平面平行; MJ: 二面角的平面角及求法.

【专题】11: 计算题; 14: 证明题; 5G: 空间角.

【分析】(I) 通过证明 BC_1 平行平面 A_1CD 内的直线 DF , 利用直线与平面平行的判定定理证明 $BC_1 \parallel$ 平面 A_1CD

(Ⅱ) 证明 $DE \perp$ 平面 A_1DC , 作出二面角 $D-A_1C-E$ 的平面角, 然后求解二面角平面角的正弦值即可.

【解答】解：（I）证明：连结 AC_1 交 A_1C 于点 F ，则 F 为 AC_1 的中点，

又 D 是 AB 中点, 连结 DF, 则 $BC_1 \parallel DF$,

因为 $DF \subset$ 平面 A_1CD , $BC_1 \not\subset$ 平面 A_1CD ,

所以 $BC_1 \parallel$ 平面 A_1CD .

(Ⅱ) 因为直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, 所以 $AA_1 \perp CD$,

由已知 $AC=CB$, D 为 AB 的中点, 所以 $CD \perp AB$,

又 $AA_1 \cap AB = A$, 于是, $CD \perp$ 平面 ABB_1A_1 ,

设 $AB=2\sqrt{2}$, 则 $AA_1=AC=CB=2$, 得 $\angle ACB=90^\circ$,

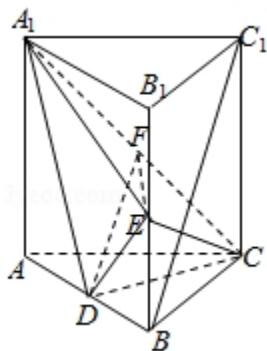
$$CD = \sqrt{2}, \quad A_1D = \sqrt{6}, \quad DE = \sqrt{3}, \quad A_1E = 3$$

故 $A_1D^2+DE^2=A_1E^2$, 即 $DE \perp A_1D$, 所以 $DE \perp$ 平面 A_1DC ,

又 $A_1C=2\sqrt{2}$, 过 D 作 $DF \perp A_1C$ 于 F , $\angle DFE$ 为二面角 $D-A_1C-E$ 的平面角,

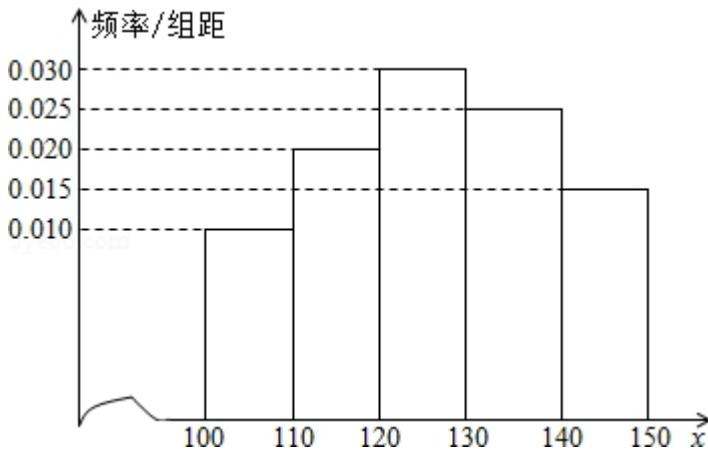
$$\text{在}\triangle A_1DC\text{中, } DF = \frac{A_1D \cdot DC}{A_1C} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad EF = \sqrt{DE^2 + DF^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

所以二面角 $D-A_1C-E$ 的正弦值. $\sin \angle DFE = \frac{DE}{EF} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.



【点评】本题考查直线与平面平行的判定定理的应用，二面角的平面角的求法，考查空间想象能力与计算能力。

19. (12分) 经销商经销某种农产品，在一个销售季度内，每售出1t该产品获利润500元，未售出的产品，每1t亏损300元。根据历史资料，得到销售季度内市场需求量的频率分布直方图，如图所示。经销商为下一个销售季度购进了130t该农产品。以 x （单位：t， $100 \leq x \leq 150$ ）表示下一个销售季度内的市场需求量， T （单位：元）表示下一个销售季度内经销该农产品的利润。



- (I) 将 T 表示为 x 的函数；
- (II) 根据直方图估计利润 T 不少于57000元的概率；
- (III) 在直方图的需求量分组中，以各组的区间中点值代表该组的各个值，并以需求量落入该区间的频率作为需求量取该区间中点值的概率（例如：若 $x \in [100, 110)$ ）则取 $x=105$ ，且 $x=105$ 的概率等于需求量落入 $[100, 110)$ 的频率，求 T 的数学期望。

【考点】B8：频率分布直方图；BE：用样本的数字特征估计总体的数字特征；CH

：离散型随机变量的期望与方差.

【专题】5I: 概率与统计.

【分析】 (I) 由题意先分段写出, 当 $x \in [100, 130)$ 时, 当 $x \in [130, 150)$ 时, 和利润值, 最后利用分段函数的形式进行综合即可.

(II) 由 (I) 知, 利润 T 不少于 57000 元, 当且仅当 $120 \leq x \leq 150$. 再由直方图知需求量 $x \in [120, 150]$ 的频率为 0.7, 利用样本估计总体的方法得出下一个销售季度的利润 T 不少于 57000 元的概率的估计值.

(III) 利用利润 T 的数学期望=各组的区间中点值×该区间的频率之和即得.

【解答】 解: (I) 由题意得, 当 $x \in [100, 130)$ 时, $T=500x-300(130-x)$
 $=800x-39000$,

当 $x \in [130, 150)$ 时, $T=500 \times 130=65000$,

$$\therefore T = \begin{cases} 800x-39000, & x \in [100, 130) \\ 65000, & x \in [130, 150] \end{cases}.$$

(II) 由 (I) 知, 利润 T 不少于 57000 元, 当且仅当 $120 \leq x \leq 150$.

由直方图知需求量 $x \in [120, 150]$ 的频率为 0.7,

所以下一个销售季度的利润 T 不少于 57000 元的概率的估计值为 0.7.

(III) 依题意可得 T 的分布列如图,

T	45000	53000	61000	65000
p	0.1	0.2	0.3	0.4

所以 $ET=45000 \times 0.1+53000 \times 0.2+61000 \times 0.3+65000 \times 0.4=59400$.

【点评】 本题考查用样本的频率分布估计总体分布及识图的能力, 求解的重点是对题设条件及直方图的理解, 了解直方图中每个小矩形的面积的意义, 是中档题.

20. (12 分) 平面直角坐标系 xOy 中, 过椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 右焦

点的直线 $x+y-\sqrt{3}=0$ 交 M 于 A, B 两点, P 为 AB 的中点, 且 OP 的斜率为 $\frac{1}{2}$.

(I) 求 M 的方程

(II) C, D 为 M 上的两点, 若四边形 ACBD 的对角线 CD \perp AB, 求四边形 ACBD 面积的最大值.

【考点】IJ: 直线的一般式方程与直线的垂直关系; KH: 直线与圆锥曲线的综合

【专题】16: 压轴题; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】(I) 把右焦点 (c, 0) 代入直线可解得 c. 设 A (x₁, y₁), B (x₂, y₂), 线段 AB 的中点 P (x₀, y₀), 利用“点差法”即可得到 a, b 的关系式, 再与 a²=b²+c² 联立即可得到 a, b, c.

(II) 由 CD \perp AB, 可设直线 CD 的方程为 y=x+t, 与椭圆的方程联立得到根与系数的关系, 即可得到弦长 |CD|. 把直线 x+y- $\sqrt{3}$ =0 与椭圆的方程联立得到根与系数的关系, 即可得到弦长 |AB|, 利用 S_{四边形 ACBD}= $\frac{1}{2}$ |AB||CD| 即可得到关于 t 的表达式, 利用二次函数的单调性即可得到其最大值.

【解答】解: (I) 把右焦点 (c, 0) 代入直线 x+y- $\sqrt{3}$ =0 得 c+0- $\sqrt{3}$ =0, 解得 c= $\sqrt{3}$.

设 A (x₁, y₁), B (x₂, y₂), 线段 AB 的中点 P (x₀, y₀),

$$\text{则 } \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \quad \text{相减得 } \frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0,$$

$$\therefore \frac{x_1 + x_2}{a^2} + \frac{y_1 + y_2}{b^2} \times \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 0,$$

$$\therefore \frac{2x_0}{a^2} + \frac{2y_0}{b^2} \times (-1) = 0, \quad \text{又 } k_{OP} = \frac{1}{2} = \frac{y_0}{x_0},$$

$$\therefore \frac{1}{a^2} - \frac{1}{2b^2} = 0, \quad \text{即 } a^2 = 2b^2.$$

$$\text{联立得 } \begin{cases} a^2 = 2b^2 \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} b^2 = 3 \\ a^2 = 6 \\ c = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\therefore M \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(II) $\because CD \perp AB$, \therefore 可设直线 CD 的方程为 $y=x+t$,

联立 $\begin{cases} y=x+t \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 消去 y 得到 $3x^2 + 4tx + 2t^2 - 6 = 0$,

\because 直线 CD 与椭圆有两个不同的交点,

$$\therefore \Delta = 16t^2 - 12(2t^2 - 6) = 72 - 8t^2 > 0, \text{ 解得 } -3 < t < 3 \text{ (*)}.$$

设 $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$, $\therefore x_3 + x_4 = -\frac{4t}{3}$, $x_3 x_4 = \frac{2t^2 - 6}{3}$.

$$\therefore |CD| = \sqrt{(1+1^2)[(x_3 + x_4)^2 - 4x_3 x_4]} = \sqrt{2[(\frac{4t}{3})^2 - 4 \times \frac{2t^2 - 6}{3}]} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{18 - 2t^2}}{3}.$$

联立 $\begin{cases} x+y-\sqrt{3}=0 \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 得到 $3x^2 - 4\sqrt{3}x = 0$, 解得 $x=0$ 或 $\frac{4}{3}\sqrt{3}$,

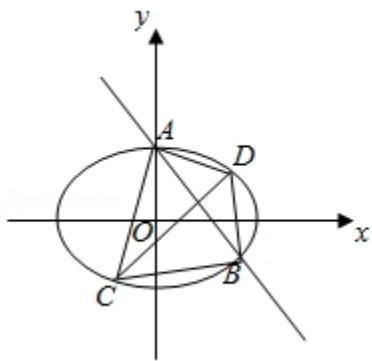
\therefore 交点为 $A(0, \sqrt{3})$, $B(\frac{4}{3}\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$,

$$\therefore |AB| = \sqrt{(\frac{4}{3}\sqrt{3}-0)^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3})^2} = \frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

$$\therefore S_{\text{四边形 } ACBD} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{18 - 2t^2}}{3} = \frac{8\sqrt{3} \cdot \sqrt{18 - 2t^2}}{9},$$

\therefore 当且仅当 $t=0$ 时, 四边形 $ACBD$ 面积的最大值为 $\frac{8}{3}\sqrt{6}$, 满足 (*) .

\therefore 四边形 $ACBD$ 面积的最大值为 $\frac{8}{3}\sqrt{6}$.



【点评】本题综合考查了椭圆的定义、标准方程及其性质、“点差法”、中点坐标

公式、直线与椭圆相交问题转化为方程联立得到一元二次方程根与系数的关系、弦长公式、四边形的面积计算、二次函数的单调性等基础知识，考查了推理能力、数形结合的思想方法、计算能力、分析问题和解决问题的能力.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = e^x - \ln(x+m)$

(I) 设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 m ，并讨论 $f(x)$ 的单调性；
(II) 当 $m \leq 2$ 时，证明 $f(x) > 0$.

【考点】 5C：根据实际问题选择函数类型；6B：利用导数研究函数的单调性.

【专题】 16：压轴题；53：导数的综合应用.

【分析】 (I) 求出原函数的导函数，因为 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极值点，由极值点处的导数等于 0 求出 m 的值，代入函数解析式后再由导函数大于 0 和小于 0 求出原函数的单调区间；

(II) 证明当 $m \leq 2$ 时， $f(x) > 0$ ，转化为证明当 $m=2$ 时 $f(x) > 0$. 求出当 $m=2$ 时函数的导函数，可知导函数在 $(-2, +\infty)$ 上为增函数，并进一步得到导函数在 $(-1, 0)$ 上有唯一零点 x_0 ，则当 $x=x_0$ 时函数取得最小值，借助于 x_0 是导函数的零点证出 $f(x_0) > 0$ ，从而结论得证.

【解答】 (I) 解 $\because f'(x) = e^x - \frac{1}{x+m}$, $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点， $\therefore f'(0) = 1 - \frac{1}{m} = 0$ ，解得 $m=1$.

所以函数 $f(x) = e^x - \ln(x+1)$ ，其定义域为 $(-1, +\infty)$.

$$\therefore f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1} = \frac{e^x(x+1)-1}{x+1}.$$

设 $g(x) = e^x(x+1) - 1$ ，则 $g'(x) = e^x(x+1) + e^x > 0$ ，所以 $g(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上为增函数，

又 $\because g(0) = 0$ ，所以当 $x > 0$ 时， $g(x) > 0$ ，即 $f'(x) > 0$ ；当 $-1 < x < 0$ 时， $g(x) < 0$ ， $f'(x) < 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上为减函数；在 $(0, +\infty)$ 上为增函数；

(Ⅱ) 证明: 当 $m \leq 2$, $x \in (-m, +\infty)$ 时, $\ln(x+m) \leq \ln(x+2)$, 故只需证
明当 $m=2$ 时 $f(x) > 0$.

当 $m=2$ 时, 函数 $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+2}$ 在 $(-2, +\infty)$ 上为增函数, 且 $f'(-1) < 0$
, $f'(0) > 0$.

故 $f'(x) = 0$ 在 $(-2, +\infty)$ 上有唯一实数根 x_0 , 且 $x_0 \in (-1, 0)$.

当 $x \in (-2, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

从而当 $x=x_0$ 时, $f(x)$ 取得最小值.

由 $f'(x_0) = 0$, 得 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0+2}$, $\ln(x_0+2) = -x_0$.

故 $f(x) \geq f(x_0) = \frac{1}{x_0+2} + x_0 = \frac{(x_0+1)^2}{x_0+2} > 0$.

综上, 当 $m \leq 2$ 时, $f(x) > 0$.

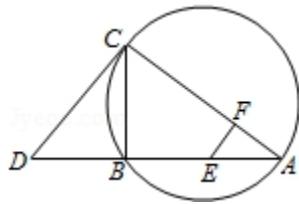
【点评】本题考查了利用导数研究函数的单调性, 利用导数求函数在闭区间上的最值, 考查了不等式的证明, 考查了函数与方程思想, 分类讨论的数学思想, 综合考查了学生分析问题和解决问题的能力. 熟练函数与导数的基础知识是解决该题的关键, 是难题.

选考题: (第 22 题~第 24 题为选考题, 考生根据要求作答. 请考生在第 22、
23、24 题中任选择一题作答, 如果多做, 则按所做的第一部分评分, 作答时
请写清题号)

22. (10 分) 【选修 4-1 几何证明选讲】

如图, CD 为 $\triangle ABC$ 外接圆的切线, AB 的延长线交直线 CD 于点 D , E 、 F 分别为
弦 AB 与弦 AC 上的点, 且 $BC \cdot AE = DC \cdot AF$, B 、 E 、 F 、 C 四点共圆.

- (1) 证明: CA 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径;
- (2) 若 $DB = BE = EA$, 求过 B 、 E 、 F 、 C 四点的圆的面积与 $\triangle ABC$ 外接圆面积的比
值.



【考点】 NC: 与圆有关的比例线段.

【专题】 5B: 直线与圆.

【分析】 (1) 已知 CD 为 $\triangle ABC$ 外接圆的切线, 利用弦切角定理可得 $\angle DCB = \angle A$, 及 $BC \cdot AE = DC \cdot AF$, 可知 $\triangle CDB \sim \triangle AEF$, 于是 $\angle CBD = \angle AFE$.

利用 B 、 E 、 F 、 C 四点共圆, 可得 $\angle CFE = \angle DBC$, 进而得到 $\angle CFE = \angle AFE = 90^\circ$ 即可证明 CA 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径;

(2) 要求过 B 、 E 、 F 、 C 四点的圆的面积与 $\triangle ABC$ 外接圆面积的比值. 只需求出其外接圆的直径的平方之比即可. 由过 B 、 E 、 F 、 C 四点的圆的直径为 CE , 及 $DB = BE$, 可得 $CE = DC$, 利用切割线定理可得 $DC^2 = DB \cdot DA$, $CA^2 = CB^2 + BA^2$, 都用 DB 表示即可.

【解答】 (1) 证明: $\because CD$ 为 $\triangle ABC$ 外接圆的切线, $\therefore \angle DCB = \angle A$,

$$\because BC \cdot AE = DC \cdot AF, \therefore \frac{BC}{FA} = \frac{DC}{EA}.$$

$\therefore \triangle CDB \sim \triangle AEF, \therefore \angle CBD = \angle AFE$.

$\because B$ 、 E 、 F 、 C 四点共圆, $\therefore \angle CFE = \angle DBC, \therefore \angle CFE = \angle AFE = 90^\circ$.

$\therefore \angle CBA = 90^\circ, \therefore CA$ 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径;

(2) 连接 CE , $\because \angle CBE = 90^\circ$,

\therefore 过 B 、 E 、 F 、 C 四点的圆的直径为 CE , 由 $DB = BE$, 得 $CE = DC$,

又 $BC^2 = DB \cdot BA = 2DB^2$,

$$\therefore CA^2 = 4DB^2 + BC^2 = 6DB^2.$$

而 $DC^2 = DB \cdot DA = 3DB^2$,

故过 B 、 E 、 F 、 C 四点的圆的面积与 $\triangle ABC$ 面积的外接圆的面积比值 $= \frac{CE^2}{AC^2} = \frac{DC^2}{CA^2} = \frac{3DB^2}{6DB^2} = \frac{1}{2}$

$$\frac{3DB^2}{6DB^2} = \frac{1}{2}.$$

【点评】 熟练掌握弦切角定理、相似三角形的判定与性质、四点共圆的性质、

直径的判定、切割线定理、勾股定理等腰三角形的性质是解题的关键.

23. 已知动点 P 、 Q 都在曲线 $C: \begin{cases} x=2\cos\beta \\ y=2\sin\beta \end{cases}$ (β 为参数) 上, 对应参数分别为 $\beta=\alpha$ 与 $\beta=2\alpha$ ($0<\alpha<2\pi$), M 为 PQ 的中点.

(1) 求 M 的轨迹的参数方程;

(2) 将 M 到坐标原点的距离 d 表示为 α 的函数, 并判断 M 的轨迹是否过坐标原点.

【考点】QH: 参数方程化成普通方程.

【专题】5S: 坐标系和参数方程.

【分析】(1) 利用参数方程与中点坐标公式即可得出;

(2) 利用两点之间的距离公式、三角函数的单调性即可得出.

【解答】解: (1) 依题意有 $P(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$, $Q(2\cos 2\alpha, 2\sin 2\alpha)$,
因此 $M(\cos\alpha + \cos 2\alpha, \sin\alpha + \sin 2\alpha)$.

M 的轨迹的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\alpha + \cos 2\alpha \\ y=\sin\alpha + \sin 2\alpha \end{cases}$ (α 为参数, $0<\alpha<2\pi$).

(2) M 点到坐标原点的距离 $d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2+2\cos\alpha}$ ($0<\alpha<2\pi$).

当 $\alpha=\pi$ 时, $d=0$, 故 M 的轨迹过坐标原点.

【点评】本题考查了参数方程与中点坐标公式、两点之间的距离公式、三角函数的单调性, 考查了推理能力与计算能力, 属于中档题.

24. 【选修 4-5; 不等式选讲】

设 a, b, c 均为正数, 且 $a+b+c=1$, 证明:

$$(I) ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}$$

$$(II) \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 1.$$

【考点】R6: 不等式的证明.

【专题】14: 证明题; 16: 压轴题.

【分析】 (I) 依题意, 由 $a+b+c=1 \Rightarrow (a+b+c)^2=1 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=1$,

利用基本不等式可得 $3(ab+bc+ca) \leq 1$, 从而得证;

(II) 利用基本不等式可证得: $\frac{a^2}{b}+b \geq 2a$, $\frac{b^2}{c}+c \geq 2b$, $\frac{c^2}{a}+a \geq 2c$, 三式累加

即可证得结论.

【解答】 证明: (I) 由 $a^2+b^2 \geq 2ab$, $b^2+c^2 \geq 2bc$, $c^2+a^2 \geq 2ca$ 得:

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca,$$

由题设得 $(a+b+c)^2=1$, 即 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=1$,

所以 $3(ab+bc+ca) \leq 1$, 即 $ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}$.

(II) 因为 $\frac{a^2}{b}+b \geq 2a$, $\frac{b^2}{c}+c \geq 2b$, $\frac{c^2}{a}+a \geq 2c$,

故 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+(a+b+c) \geq 2(a+b+c)$, 即 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq a+b+c$.

所以 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq 1$.

【点评】 本题考查不等式的证明, 突出考查基本不等式与综合法的应用, 考查

推理论证能力, 属于中档题.