

2012 年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给同的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. (5 分) 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in A, x - y \in A\}$, 则 B 中所含元素的个数为 ()

A. 3 B. 6 C. 8 D. 10

2. (5 分) 将 2 名教师, 4 名学生分成 2 个小组, 分别安排到甲、乙两地参加社会实践活动, 每个小组由 1 名教师和 2 名学生组成, 不同的安排方案共有 ()

A. 12 种 B. 10 种 C. 9 种 D. 8 种

3. (5 分) 下面是关于复数 $z = \frac{2}{-1+i}$ 的四个命题: 其中的真命题为 (),

$p_1: |z| = 2$,

$p_2: z^2 = 2i$,

$p_3: z$ 的共轭复数为 $1+i$,

$p_4: z$ 的虚部为 -1 .

A. p_2, p_3 B. p_1, p_2 C. p_2, p_4 D. p_3, p_4

4. (5 分) 设 F_1, F_2 是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点, P 为直线 $x =$

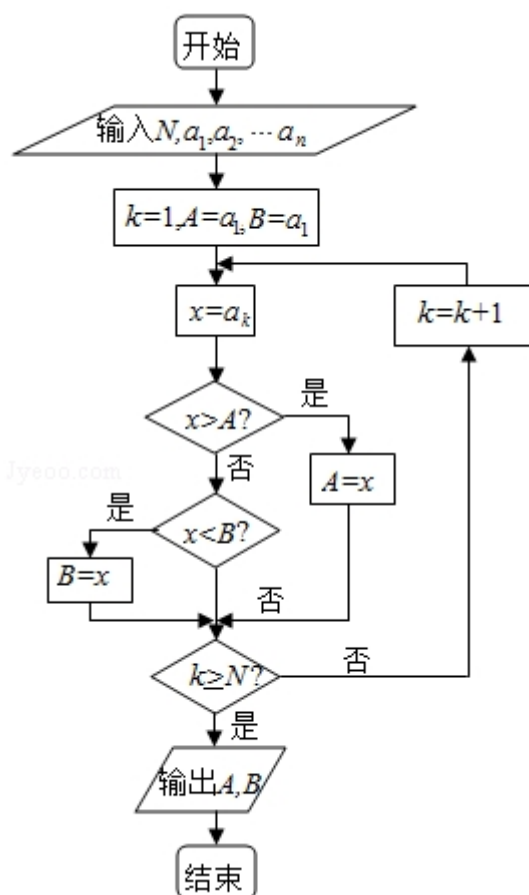
$\frac{3a}{2}$ 上一点, $\triangle F_2PF_1$ 是底角为 30° 的等腰三角形, 则 E 的离心率为 ()

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{5}$

5. (5 分) 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_4 + a_7 = 2$, $a_5 a_6 = -8$, 则 $a_1 + a_{10} =$ ()

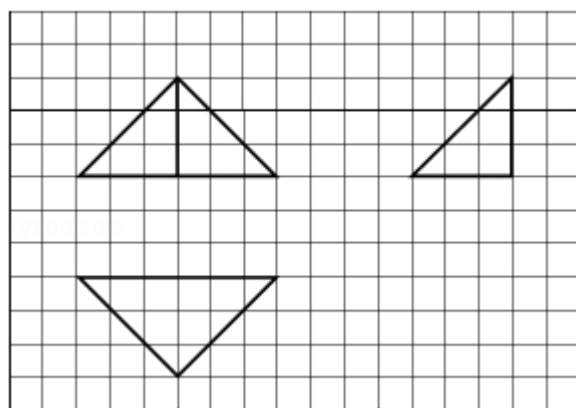
A. 7 B. 5 C. -5 D. -7

6. (5 分) 如果执行右边的程序框图, 输入正整数 N ($N \geq 2$) 和实数 a_1, a_2, \dots, a_n , 输出 A, B , 则 ()



- A. $A+B$ 为 a_1, a_2, \dots, a_n 的和
- B. $\frac{A+B}{2}$ 为 a_1, a_2, \dots, a_n 的算术平均数
- C. A 和 B 分别是 a_1, a_2, \dots, a_n 中最大的数和最小的数
- D. A 和 B 分别是 a_1, a_2, \dots, a_n 中最小的数和最大的数

7. (5 分) 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗线画出的是某几何体的三视图, 则此几何体的体积为 ()



- A. 6 B. 9 C. 12 D. 18

8. (5 分) 等轴双曲线 C 的中心在原点, 焦点在 x 轴上, C 与抛物线 $y^2=16x$ 的

准线交于点 A 和点 B, $|AB|=4\sqrt{3}$, 则 C 的实轴长为 ()

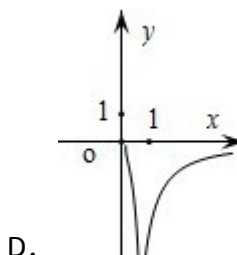
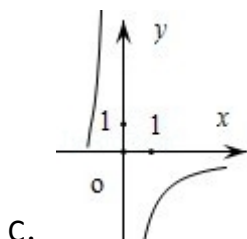
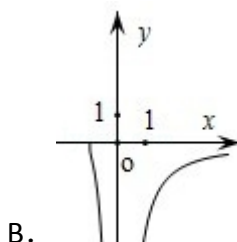
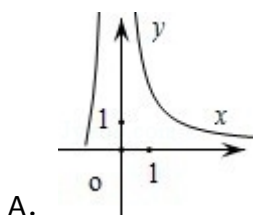
- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. 8

9. (5 分) 已知 $\omega > 0$, 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$ 在区间 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上单调递减,

则实数 ω 的取值范围是 ()

- A. $[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}]$ B. $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ C. $(0, \frac{1}{2}]$ D. $(0, 2]$

10. (5 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{\ln(x+1)-x}$, 则 $y=f(x)$ 的图象大致为 ()



11. (5 分) 已知三棱锥 S-ABC 的所有顶点都在球 O 的表面上, $\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形, SC 为球 O 的直径, 且 $SC=2$, 则此三棱锥的体积为 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{12}$

12. (5 分) 设点 P 在曲线 $y = \frac{1}{2}e^x$ 上, 点 Q 在曲线 $y = \ln(2x)$ 上, 则 $|PQ|$ 最小值为 ()

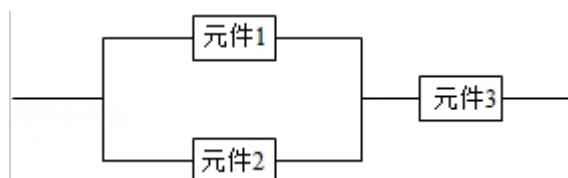
- A. $1 - \ln 2$ B. $\sqrt{2}(1 - \ln 2)$ C. $1 + \ln 2$ D. $\sqrt{2}(1 + \ln 2)$

二. 填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分.

13. (5 分) 已知向量 \vec{a} , \vec{b} 夹角为 45° , 且 $|\vec{a}|=1$, $|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{10}$, 则 $|\vec{b}|=$ _____.

14. (5 分) 设 x, y 满足约束条件: $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x-y \geq -1 \\ x+y \leq 3 \end{cases}$; 则 $z=x-2y$ 的取值范围为

15. (5 分) 某个部件由三个元件按下图方式连接而成，元件 1 或元件 2 正常工作，且元件 3 正常工作，则部件正常工作，设三个电子元件的使用寿命（单位：小时）均服从正态分布 $N(1000, 50^2)$ ，且各个元件能否正常相互独立，那么该部件的使用寿命超过 1000 小时的概率为_____.



16. (5 分) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} + (-1)^n a_n = 2n - 1$ ，则 $\{a_n\}$ 的前 60 项和为_____.

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边，

$$a \cos C + \sqrt{3} a \sin C - b - c = 0$$

(1) 求 A ;

(2) 若 $a=2$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$ ；求 b, c .

18. (12 分) 某花店每天以每枝 5 元的价格从农场购进若干枝玫瑰花, 然后以每枝 10 元的价格出售, 如果当天卖不完, 剩下的玫瑰花作垃圾处理.

(1) 若花店一天购进 16 枝玫瑰花, 求当天的利润 y (单位: 元) 关于当天需求量 n (单位: 枝, $n \in \mathbb{N}$) 的函数解析式.

(2) 花店记录了 100 天玫瑰花的日需求量 (单位: 枝), 整理得如表:

日需求量 n	14	15	16	17	18	19	20
频数	10	20	16	16	15	13	10

以 100 天记录的各需求量的频率作为各需求量发生的概率.

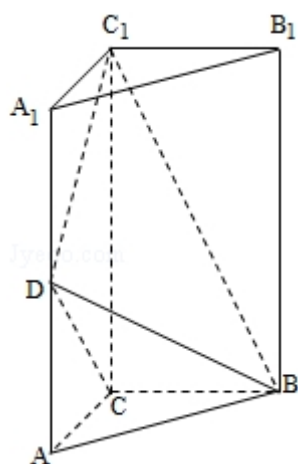
(i) 若花店一天购进 16 枝玫瑰花, x 表示当天的利润 (单位: 元), 求 x 的分布列、数学期望及方差;

(ii) 若花店计划一天购进 16 枝或 17 枝玫瑰花, 你认为应购进 16 枝还是 17 枝? 请说明理由.

19. (12 分) 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC=BC=\frac{1}{2}AA_1$, D 是棱 AA_1 的中点, $DC_1 \perp BD$

(1) 证明: $DC_1 \perp BC$;

(2) 求二面角 A_1-BD-C_1 的大小.



20. (12 分) 设抛物线 $C: x^2=2py$ ($p>0$) 的焦点为 F , 准线为 l , $A \in C$, 已知以 F 为圆心, FA 为半径的圆 F 交 l 于 B, D 两点;
- (1) 若 $\angle BFD=90^\circ$, $\triangle ABD$ 的面积为 $4\sqrt{2}$, 求 p 的值及圆 F 的方程;
- (2) 若 A, B, F 三点在同一直线 m 上, 直线 n 与 m 平行, 且 n 与 C 只有一个公共点, 求坐标原点到 m, n 距离的比值.

21. (12 分) 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f'(1)e^{x-1} - f(0)x + \frac{1}{2}x^2$;
- (1) 求 $f(x)$ 的解析式及单调区间;
- (2) 若 $f(x) \geq \frac{1}{2}x^2 + ax + b$, 求 $(a+1)b$ 的最大值.

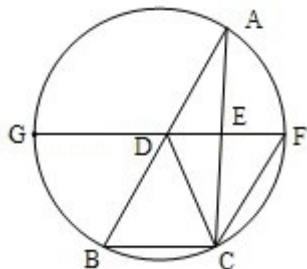
四、请考生在第 22, 23, 24 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分, 作答时请写清题号.

22. (10 分) 如图, D, E 分别为 $\triangle ABC$ 边 AB, AC 的中点, 直线 DE 交 $\triangle ABC$ 的

外接圆于 F, G 两点, 若 $CF \parallel AB$, 证明:

(1) $CD=BC$;

(2) $\triangle BCD \sim \triangle GBD$.



23. 选修 4-4: 坐标系与参数方程

已知曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases} x=2\cos\phi \\ y=3\sin\phi \end{cases}$ (ϕ 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立坐标系, 曲线 C_2 的坐标系方程是 $\rho=2$, 正方形 $ABCD$ 的顶点都在 C_2 上, 且 A, B, C, D 依逆时针次序排列, 点 A 的极坐标为 $(2, \frac{\pi}{3})$.

(1) 求点 A, B, C, D 的直角坐标;

(2) 设 P 为 C_1 上任意一点, 求 $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$ 的取值范围.

24. 已知函数 $f(x) = |x+a| + |x-2|$

①当 $a=-3$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 3$ 的解集;

② $f(x) \leq |x-4|$ 若的解集包含 $[1, 2]$, 求 a 的取值范围.

2012 年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给同的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. (5 分) 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in A, x - y \in A\}$, 则 B 中所含元素的个数为 ()
- A. 3 B. 6 C. 8 D. 10

【考点】12: 元素与集合关系的判断.

【专题】5J: 集合.

【分析】由题意，根据集合 B 中的元素属性对 x, y 进行赋值得出 B 中所有元素，即可得出 B 中所含有的元素个数，得出正确选项

【解答】解：由题意， $x=5$ 时， $y=1, 2, 3, 4$,

$x=4$ 时， $y=1, 2, 3$,

$x=3$ 时， $y=1, 2$,

$x=2$ 时， $y=1$

综上知，B 中的元素个数为 10 个

故选：D.

【点评】本题考查元素与集合的关系的判断，解题的关键是理解题意，领会集合 B 中元素的属性，用分类列举的方法得出集合 B 中的元素的个数.

2. (5 分) 将 2 名教师，4 名学生分成 2 个小组，分别安排到甲、乙两地参加社会实践活动，每个小组由 1 名教师和 2 名学生组成，不同的安排方案共有 ()
- A. 12 种 B. 10 种 C. 9 种 D. 8 种

【考点】D9: 排列、组合及简单计数问题.

【专题】11：计算题.

【分析】将任务分三步完成，在每步中利用排列和组合的方法计数，最后利用分步计数原理，将各步结果相乘即可得结果

【解答】解：第一步，为甲地选一名老师，有 $C_2^1=2$ 种选法；

第二步，为甲地选两个学生，有 $C_4^2=6$ 种选法；

第三步，为乙地选 1 名教师和 2 名学生，有 1 种选法

故不同的安排方案共有 $2 \times 6 \times 1=12$ 种

故选：A.

【点评】本题主要考查了分步计数原理的应用，排列组合计数的方法，理解题意，恰当分步是解决本题的关键，属基础题

3. (5 分) 下面是关于复数 $z=\frac{2}{-1+i}$ 的四个命题：其中的真命题为 ()，

$p_1: |z|=2$,

$p_2: z^2=2i$,

$p_3: z$ 的共轭复数为 $1+i$,

$p_4: z$ 的虚部为 -1 .

A. p_2, p_3

B. p_1, p_2

C. p_2, p_4

D. p_3, p_4

【考点】2K：命题的真假判断与应用；A5：复数的运算.

【专题】11：计算题.

【分析】由 $z=\frac{2}{-1+i}=\frac{2(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=-1-i$ ，知 $p_1: |z|=\sqrt{2}$ ， $p_2: z^2=2i$ ， $p_3:$

z 的共轭复数为 $-1+i$ ， $p_4: z$ 的虚部为 -1 ，由此能求出结果.

【解答】解： $\because z=\frac{2}{-1+i}=\frac{2(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=-1-i$ ，

$\therefore p_1: |z|=\sqrt{2}$ ，

$p_2: z^2=2i$ ，

$p_3: z$ 的共轭复数为 $-1+i$ ，

p_4 : z 的虚部为 -1 ,

故选: C.

【点评】 本题考查复数的基本概念, 是基础题. 解题时要认真审题, 仔细解答.

4. (5 分) 设 F_1 、 F_2 是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点, P 为直线 $x =$

$\frac{3a}{2}$ 上一点, $\triangle F_2PF_1$ 是底角为 30° 的等腰三角形, 则 E 的离心率为 ()

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{4}{5}$

【考点】 K4: 椭圆的性质.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 利用 $\triangle F_2PF_1$ 是底角为 30° 的等腰三角形, 可得 $|PF_2| = |F_2F_1|$, 根据 P 为直线 $x = \frac{3a}{2}$ 上一点, 可建立方程, 由此可求椭圆的离心率.

【解答】 解: $\because \triangle F_2PF_1$ 是底角为 30° 的等腰三角形,

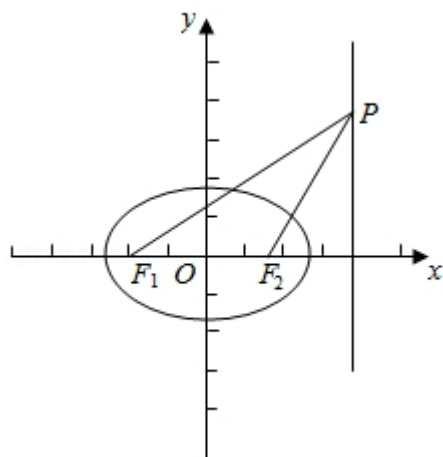
$$\therefore |PF_2| = |F_2F_1|$$

$$\because P \text{ 为直线 } x = \frac{3a}{2} \text{ 上一点}$$

$$\therefore 2\left(\frac{3}{2}a - c\right) = 2c$$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{3}{4}$$

故选: C.



【点评】本题考查椭圆的几何性质，解题的关键是确定几何量之间的关系，属于基础题.

5. (5 分) 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_4+a_7=2$, $a_5a_6=-8$, 则 $a_1+a_{10}=(\quad)$

- A. 7 B. 5 C. -5 D. -7

【考点】87: 等比数列的性质; 88: 等比数列的通项公式.

【专题】11: 计算题.

【分析】由 $a_4+a_7=2$, 及 $a_5a_6=a_4a_7=-8$ 可求 a_4, a_7 , 进而可求公比 q , 代入等比数列的通项可求 a_1, a_{10} , 即可

【解答】解: $\because a_4+a_7=2$, 由等比数列的性质可得, $a_5a_6=a_4a_7=-8$

$$\therefore a_4=4, a_7=-2 \text{ 或 } a_4=-2, a_7=4$$

$$\text{当 } a_4=4, a_7=-2 \text{ 时, } q^3=-\frac{1}{2},$$

$$\therefore a_1=-8, a_{10}=1,$$

$$\therefore a_1+a_{10}=-7$$

$$\text{当 } a_4=-2, a_7=4 \text{ 时, } q^3=2, \text{ 则 } a_{10}=-8, a_1=1$$

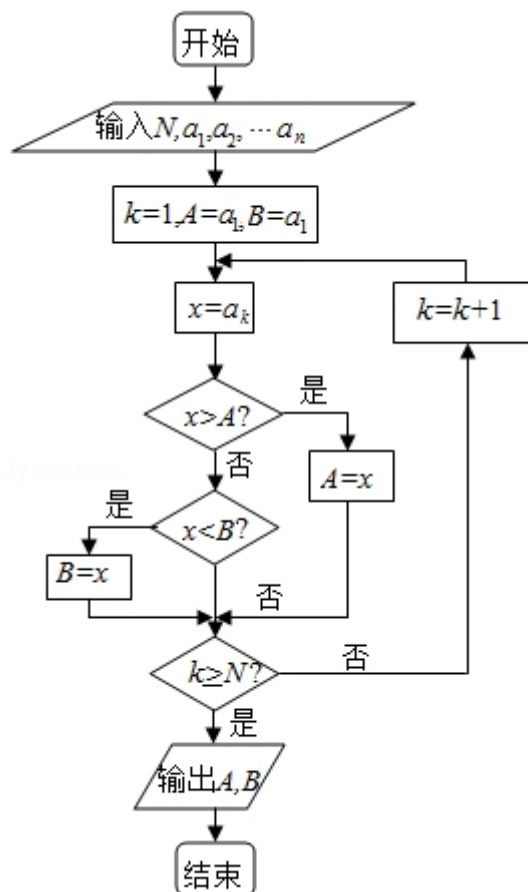
$$\therefore a_1+a_{10}=-7$$

综上可得, $a_1+a_{10}=-7$

故选: D.

【点评】本题主要考查了等比数列的性质及通项公式的应用, 考查了基本运算的能力.

6. (5 分) 如果执行右边的程序框图, 输入正整数 $N(N \geq 2)$ 和实数 a_1, a_2, \dots, a_n , 输出 A, B , 则 (\quad)



- A. $A+B$ 为 a_1, a_2, \dots, a_n 的和
- B. $\frac{A+B}{2}$ 为 a_1, a_2, \dots, a_n 的算术平均数
- C. A 和 B 分别是 a_1, a_2, \dots, a_n 中最大的数和最小的数
- D. A 和 B 分别是 a_1, a_2, \dots, a_n 中最小的数和最大的数

【考点】E7：循环结构.

【专题】5K：算法和程序框图.

【分析】分析程序中各变量、各语句的作用，再根据流程图所示的顺序，可知：

该程序的作用是求出 a_1, a_2, \dots, a_n 中最大的数和最小的数.

【解答】解：分析程序中各变量、各语句的作用，

再根据流程图所示的顺序，

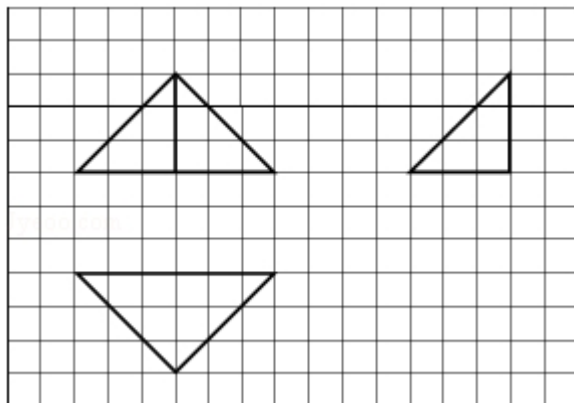
可知，该程序的作用是：求出 a_1, a_2, \dots, a_n 中最大的数和最小的数

其中 A 为 a_1, a_2, \dots, a_n 中最大的数， B 为 a_1, a_2, \dots, a_n 中最小的数

故选：C.

【点评】本题主要考查了循环结构，解题的关键是建立数学模型，根据每一步分析的结果，选择恰当的数学模型，属于中档题.

7. (5 分) 如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗线画出的是某几何体的三视图，则此几何体的体积为 ()



- A. 6 B. 9 C. 12 D. 18

【考点】L1: 由三视图求面积、体积.

【专题】11: 计算题.

【分析】通过三视图判断几何体的特征，利用三视图的数据求出几何体的体积即可.

【解答】解：该几何体是三棱锥，底面是俯视图，三棱锥的高为 3；
底面三角形斜边长为 6，高为 3 的等腰直角三角形，
此几何体的体积为 $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 3 \times 3 = 9$.

故选：B.

【点评】本题考查三视图与几何体的关系，考查几何体的体积的求法，考查计算能力.

8. (5 分) 等轴双曲线 C 的中心在原点，焦点在 x 轴上，C 与抛物线 $y^2 = 16x$ 的准线交于点 A 和点 B， $|AB| = 4\sqrt{3}$ ，则 C 的实轴长为 ()
- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. 8

【考点】K1：圆锥曲线的综合.

【专题】11：计算题；16：压轴题.

【分析】设等轴双曲线 $C: x^2 - y^2 = a^2$ ($a > 0$)， $y^2 = 16x$ 的准线 $l: x = -4$ ，由 C 与抛物线 $y^2 = 16x$ 的准线交于 A, B 两点， $|AB| = 4\sqrt{3}$ ，能求出 C 的实轴长.

【解答】解：设等轴双曲线 $C: x^2 - y^2 = a^2$ ($a > 0$)，

$y^2 = 16x$ 的准线 $l: x = -4$ ，

$\because C$ 与抛物线 $y^2 = 16x$ 的准线 $l: x = -4$ 交于 A, B 两点， $|AB| = 4\sqrt{3}$

$\therefore A(-4, 2\sqrt{3})$ ， $B(-4, -2\sqrt{3})$ ，

将 A 点坐标代入双曲线方程得 $a^2 = (-4)^2 - (2\sqrt{3})^2 = 4$ ，

$\therefore a = 2$ ， $2a = 4$.

故选：C.

【点评】本题考查双曲线的性质和应用，解题时要认真审题，仔细解答，注意挖掘题设中的隐含条件，合理地进行等价转化.

9. (5分) 已知 $\omega > 0$ ，函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$ 在区间 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上单调递减，

则实数 ω 的取值范围是 ()

A. $[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}]$ B. $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ C. $(0, \frac{1}{2}]$ D. $(0, 2]$

【考点】HK：由 $y = A\sin(\omega x + \phi)$ 的部分图象确定其解析式.

【专题】11：计算题；16：压轴题.

【分析】法一：通过特殊值 $\omega = 2$ 、 $\omega = 1$ ，验证三角函数的角的范围，排除选项，得到结果.

法二：可以通过角的范围，直接推导 ω 的范围即可.

【解答】解：法一：令： $\omega = 2 \Rightarrow (\omega x + \frac{\pi}{4}) \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]$ 不合题意 排除 (D)

$\omega = 1 \Rightarrow (\omega x + \frac{\pi}{4}) \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ 合题意 排除 (B) (C)

法 二 : $\omega(\pi - \frac{\pi}{2}) \leq \pi \Leftrightarrow \omega \leq 2$,

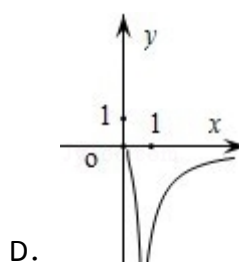
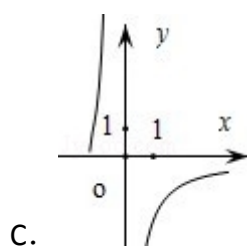
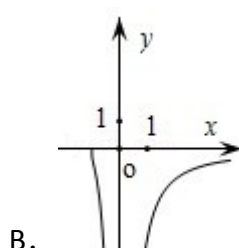
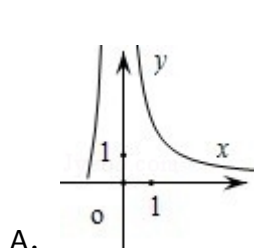
$$(\omega x + \frac{\pi}{4}) \in [\frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4}, \pi\omega + \frac{\pi}{4}] \subset [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$$

$$\text{得: } \frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4} \geq \frac{\pi}{2}, \pi\omega + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \omega \leq \frac{5}{4}.$$

故选：A.

【点评】 本题考查三角函数的单调性的应用，函数的解析式的求法，考查计算能力.

10. (5分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{\ln(x+1)-x}$, 则 $y=f(x)$ 的图象大致为 ()



【考点】 4N：对数函数的图象与性质；4T：对数函数图象与性质的综合应用.

【专题】 11：计算题.

【分析】 考虑函数 $f(x)$ 的分母的函数值恒小于零，即可排除 A，C，由 $f(x)$ 的定义域能排除 D，这一性质可利用导数加以证明

【解答】 解：设 $g(x) = \ln(1+x) - x$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{x}{1+x}$$

$\therefore g(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上为增函数，在 $(0, +\infty)$ 上为减函数

$$\therefore g(x) < g(0) = 0$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{g(x)} < 0$$

得： $x > 0$ 或 $-1 < x < 0$ 均有 $f(x) < 0$ 排除 A，C，

又 $f(x) = \frac{1}{\ln(x+1)-x}$ 中, $\begin{cases} x+1 > 0 \\ \ln(x+1)-x \neq 0 \end{cases}$, 能排除 D.

故选: B.

【点评】 本题主要考查了函数解析式与函数图象间的关系, 利用导数研究函数性质的应用, 排除法解图象选择题, 属基础题

11. (5 分) 已知三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的表面上, $\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形, SC 为球 O 的直径, 且 $SC=2$, 则此三棱锥的体积为 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{12}$

【考点】 LF: 棱柱、棱锥、棱台的体积.

【专题】 11: 计算题; 5F: 空间位置关系与距离.

【分析】 根据题意作出图形, 利用截面圆的性质即可求出 OO_1 , 进而求出底面 ABC 上的高 SD , 即可计算出三棱锥的体积.

【解答】 解: 根据题意作出图形:

设球心为 O , 过 ABC 三点的小圆的圆心为 O_1 , 则 $OO_1 \perp$ 平面 ABC ,

延长 CO_1 交球于点 D , 则 $SD \perp$ 平面 ABC .

$$\because CO_1 = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore OO_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

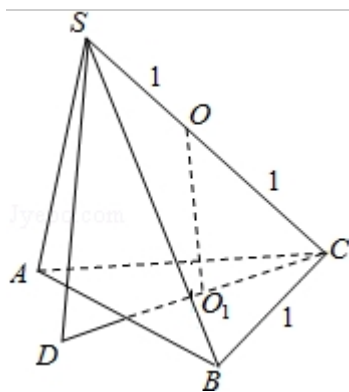
$$\therefore \text{高 } SD = 2OO_1 = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$\because \triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore V_{\text{三棱锥 } S-ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

故选: C.



【点评】本题考查棱锥的体积，考查球内接多面体，解题的关键是确定点 S 到面 ABC 的距离.

12. (5 分) 设点 P 在曲线 $y = \frac{1}{2}e^x$ 上, 点 Q 在曲线 $y = \ln(2x)$ 上, 则 $|PQ|$ 最小值为 ()
- A. $1 - \ln 2$ B. $\sqrt{2}(1 - \ln 2)$ C. $1 + \ln 2$ D. $\sqrt{2}(1 + \ln 2)$

【考点】4R: 反函数; IT: 点到直线的距离公式.

【专题】5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】由于函数 $y = \frac{1}{2}e^x$ 与函数 $y = \ln(2x)$ 互为反函数, 图象关于 $y = x$ 对称, 要求 $|PQ|$ 的最小值, 只要求出函数 $y = \frac{1}{2}e^x$ 上的点 $P(x, \frac{1}{2}e^x)$ 到直线 $y = x$ 的距离为 $d = \frac{|\frac{1}{2}e^x - x|}{\sqrt{2}}$ 的最小值,

设 $g(x) = \frac{1}{2}e^x - x$, 利用导数可求函数 $g(x)$ 的单调性, 进而可求 $g(x)$ 的最小值, 即可求.

【解答】解: \because 函数 $y = \frac{1}{2}e^x$ 与函数 $y = \ln(2x)$ 互为反函数, 图象关于 $y = x$ 对称,

函数 $y = \frac{1}{2}e^x$ 上的点 $P(x, \frac{1}{2}e^x)$ 到直线 $y = x$ 的距离为 $d = \frac{|\frac{1}{2}e^x - x|}{\sqrt{2}}$,

设 $g(x) = \frac{1}{2}e^x - x$ ($x > 0$), 则 $g'(x) = \frac{1}{2}e^x - 1$,

由 $g'(x) = \frac{1}{2}e^x - 1 \geq 0$ 可得 $x \geq \ln 2$,

由 $g'(x) = \frac{1}{2}e^x - 1 < 0$ 可得 $0 < x < \ln 2$,

\therefore 函数 $g(x)$ 在 $(0, \ln 2)$ 单调递减, 在 $[\ln 2, +\infty)$ 单调递增,

\therefore 当 $x = \ln 2$ 时, 函数 $g(x)_{\min} = 1 - \ln 2$,

$$d_{\min} = \frac{1 - \ln 2}{\sqrt{2}},$$

由图象关于 $y=x$ 对称得: $|PQ|$ 最小值为 $2d_{\min} = \sqrt{2}(1 - \ln 2)$.

故选: B.

【点评】 本题主要考查了点到直线的距离公式的应用, 注意本题解法中的转化思想的应用, 根据互为反函数的对称性把所求的点点距离转化为点线距离, 构造很好

二. 填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分.

13. (5 分) 已知向量 \vec{a} , \vec{b} 夹角为 45° , 且 $|\vec{a}| = 1$, $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{10}$, 则 $|\vec{b}| = \underline{3\sqrt{2}}$

【考点】 90: 平面向量数量积的性质及其运算; 9S: 数量积表示两个向量的夹角.

【专题】 11: 计算题; 16: 压轴题.

【分析】 由已知可得, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} |\vec{b}|$, 代入

$$|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(2\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}|\vec{b}| + |\vec{b}|^2} = \sqrt{10} \text{ 可求}$$

【解答】 解: $\because \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 45^\circ$, $|\vec{a}| = 1$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} |\vec{b}|$$

$$\therefore |2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(2\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}|\vec{b}| + |\vec{b}|^2} = \sqrt{10}$$

解得 $|\vec{b}| = 3\sqrt{2}$

故答案为: $3\sqrt{2}$

【点评】 本题主要考查了向量的数量积定义的应用, 向量的数量积性质 $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

是求解向量的模常用的方法

14. (5 分) 设 x, y 满足约束条件:
$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x - y \geq -1 \\ x + y \leq 3 \end{cases}$$
; 则 $z = x - 2y$ 的取值范围为_____.

【考点】7C: 简单线性规划.

【专题】11: 计算题.

【分析】先作出不等式组表示的平面区域, 由 $z = x - 2y$ 可得, $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z$, 则 $-\frac{1}{2}z$

表示直线 $x - 2y - z = 0$ 在 y 轴上的截距, 截距越大, z 越小, 结合函数的图形

可求 z 的最大与最小值, 从而可求 z 的范围

【解答】解: 作出不等式组表示的平面区域

由 $z = x - 2y$ 可得, $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z$, 则 $-\frac{1}{2}z$ 表示直线 $x - 2y - z = 0$ 在 y 轴上的截距, 截

距越大, z 越小

结合函数的图形可知, 当直线 $x - 2y - z = 0$ 平移到 B 时, 截距最大, z 最小; 当直

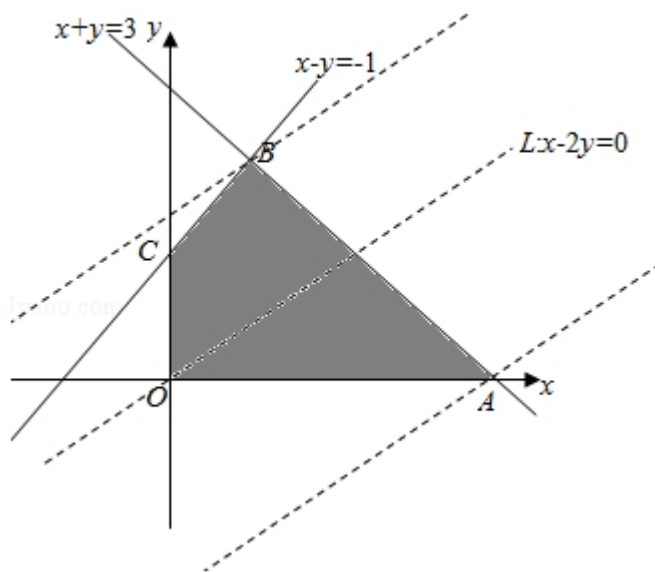
线 $x - 2y - z = 0$ 平移到 A 时, 截距最小, z 最大

由 $\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 3 \end{cases}$ 可得 B (1, 2), 由 $\begin{cases} x + y = 3 \\ y = 0 \end{cases}$ 可得 A (3, 0)

$$\therefore z_{\max} = 3, z_{\min} = -3$$

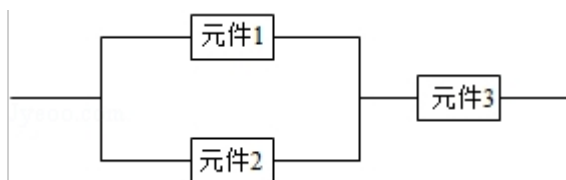
则 $z = x - 2y \in [-3, 3]$

故答案为: $[-3, 3]$



【点评】平面区域的范围问题是线性规划问题中一类重要题型，在解题时，关键是正确地画出平面区域，分析表达式的几何意义，然后结合数形结合的思想，分析图形，找出满足条件的点的坐标，即可求出答案.

15. (5 分) 某个部件由三个元件按下图方式连接而成，元件 1 或元件 2 正常工作，且元件 3 正常工作，则部件正常工作，设三个电子元件的使用寿命（单位：小时）均服从正态分布 $N(1000, 50^2)$ ，且各个元件能否正常相互独立，那么该部件的使用寿命超过 1000 小时的概率为 $\frac{3}{8}$.



【考点】CP：正态分布曲线的特点及曲线所表示的意义.

【专题】11：计算题；16：压轴题.

【分析】先根据正态分布的意义，知三个电子元件的使用寿命超过 1000 小时的概率为 $\frac{1}{2}$ ，而所求事件“该部件的使用寿命超过 1000 小时”当且仅当“超过 1000 小时时，元件 1、元件 2 至少有一个正常”和“超过 1000 小时时，元件 3 正常”同时发生，由于其为独立事件，故分别求其概率再相乘即可

【解答】解：三个电子元件的使用寿命均服从正态分布 $N(1000, 50^2)$

得：三个电子元件的使用寿命超过 1000 小时的概率为 $p=\frac{1}{2}$

设 $A=\{\text{超过 1000 小时时，元件 1、元件 2 至少有一个正常}\}$ ， $B=\{\text{超过 1000 小时时，元件 3 正常}\}$

$C=\{\text{该部件的使用寿命超过 1000 小时}\}$

则 $P(A)=1-(1-p)^2=\frac{3}{4}$ ， $P(B)=\frac{1}{2}$

$P(C)=P(AB)=P(A)P(B)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

故答案为 $\frac{3}{8}$

【点评】 本题主要考查了正态分布的意义，独立事件同时发生的概率运算，对立事件的概率运算等基础知识，属基础题

16. (5 分) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$ ，则 $\{a_n\}$ 的前 60 项和为 1830

【考点】 8E：数列的求和；8H：数列递推式.

【专题】 11：计算题；35：转化思想；4M：构造法；54：等差数列与等比数列.

【分析】 由题意可得 $a_2-a_1=1$ ， $a_3+a_2=3$ ， $a_4-a_3=5$ ， $a_5+a_4=7$ ， $a_6-a_5=9$ ， $a_7+a_6=11$

，... $a_{50}-a_{49}=97$ ，变形可得 $a_3+a_1=2$ ， $a_4+a_2=8$ ， $a_7+a_5=2$ ， $a_8+a_6=24$ ， $a_9+a_7=2$ ，

$a_{12}+a_{10}=40$ ， $a_{13}+a_{15}=2$ ， $a_{16}+a_{14}=56$ ，...利用数列的结构特征，求出 $\{a_n\}$ 的前 60 项和

【解答】 解： $\because a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$ ，

故有 $a_2-a_1=1$ ， $a_3+a_2=3$ ， $a_4-a_3=5$ ， $a_5+a_4=7$ ， $a_6-a_5=9$ ， $a_7+a_6=11$ ，... $a_{50}-a_{49}=97$

从而可得 $a_3+a_1=2$ ， $a_4+a_2=8$ ， $a_7+a_5=2$ ， $a_8+a_6=24$ ， $a_9+a_{11}=2$ ， $a_{12}+a_{10}=40$ ， $a_{13}+a_{11}=2$ ， $a_{16}+a_{14}=56$ ，...

从第一项开始，依次取 2 个相邻奇数项的和都等于 2，从第二项开始，依次取 2 个相邻偶数项的和构成以 8 为首项，以 16 为公差的等差数列.

$\{a_n\}$ 的前 60 项和为 $15 \times 2 + (15 \times 8 + \frac{15 \times 14}{2} \times 16) = 1830$

【点评】本题考查数列递推式，训练了利用构造等差数列求数列的前 n 项和，属中档题.

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边，

$$a \cos C + \sqrt{3} a \sin C - b - c = 0$$

(1) 求 A ;

(2) 若 $a=2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$; 求 b, c .

【考点】HP: 正弦定理.

【专题】33: 函数思想; 4R: 转化法; 58: 解三角形.

【分析】(1) 已知等式利用正弦定理化简，整理后得到 $\sin(A - 30^\circ) = \frac{1}{2}$. 即可求出 A 的值;

(2) 若 $a=2$, 由 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求得 $bc=4$. ①, 再利用余弦定理可得 $b+c=4$. ②, 结合①②求得 b 和 c 的值.

【解答】解: (1) 由正弦定理得: $a \cos C + \sqrt{3} a \sin C - b - c = 0$,

$$\text{即 } \sin A \cos C + \sqrt{3} \sin A \sin C = \sin B + \sin C$$

$$\therefore \sin A \cos C + \sqrt{3} \sin A \sin C = \sin(A+C) + \sin C,$$

$$\text{即 } \sqrt{3} \sin A - \cos A = 1$$

$$\therefore \sin(A - 30^\circ) = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore A - 30^\circ = 30^\circ$$

$$\therefore A = 60^\circ;$$

$$(2) \text{ 若 } a=2, \triangle ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4} bc = \sqrt{3},$$

$$\therefore bc = 4. \text{ ①}$$

再利用余弦定理可得: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

$$= (b+c)^2 - 2bc - bc = (b+c)^2 - 3 \times 4 = 4,$$

$$\therefore b+c=4. \quad ②$$

结合①②求得 $b=c=2$.

【点评】 本题考查了正弦定理及余弦定理的应用，考查了三角形面积公式的应用，是中档题.

18. (12 分) 某花店每天以每枝 5 元的价格从农场购进若干枝玫瑰花，然后以每枝 10 元的价格出售，如果当天卖不完，剩下的玫瑰花作垃圾处理.

(1) 若花店一天购进 16 枝玫瑰花，求当天的利润 y (单位：元) 关于当天需求量 n (单位：枝， $n \in \mathbb{N}$) 的函数解析式.

(2) 花店记录了 100 天玫瑰花的日需求量 (单位：枝)，整理得如表：

日需求量 n	14	15	16	17	18	19	20
频数	10	20	16	16	15	13	10

以 100 天记录的各需求量的频率作为各需求量发生的概率.

(i) 若花店一天购进 16 枝玫瑰花， x 表示当天的利润 (单位：元)，求 x 的分布列、数学期望及方差；

(ii) 若花店计划一天购进 16 枝或 17 枝玫瑰花，你认为应购进 16 枝还是 17 枝？请说明理由.

【考点】 CH：离散型随机变量的期望与方差；CS：概率的应用.

【专题】 15：综合题.

【分析】 (1) 根据卖出一枝可得利润 5 元，卖不出一枝可得赔本 5 元，即可建立分段函数；

(2) (i) x 可取 60, 70, 80，计算相应的概率，即可得到 x 的分布列，数学期望及方差；

(ii) 求出进 17 枝时当天的利润，与购进 16 枝玫瑰花时当天的利润比较，即可得到结论.

【解答】 解：(1) 当 $n \geq 16$ 时， $y = 16 \times (10 - 5) = 80$ ；

当 $n \leq 15$ 时, $y = 5n - 5(16 - n) = 10n - 80$, 得: $y = \begin{cases} 10n - 80 & (n \leq 15) \\ 80 & (n \geq 16) \end{cases} (n \in \mathbb{N})$

(2) (i) X 可取 60, 70, 80, 当日需求量 $n=14$ 时, $X=60$, $n=15$ 时, $X=70$, 其他情况 $X=80$,

$$P(X=60) = \frac{\text{频数}}{\text{总数}} = \frac{10}{10+20+16+16+15+13+10} = \frac{10}{100} = 0.1, P(X=70) = \frac{20}{100} = 0.2, P(X=80) = 1 - 0.1 - 0.2 = 0.7,$$

X 的分布列为

X	60	70	80
P	0.1	0.2	0.7

$$EX = 60 \times 0.1 + 70 \times 0.2 + 80 \times 0.7 = 76$$

$$DX = 16^2 \times 0.1 + 6^2 \times 0.2 + 4^2 \times 0.7 = 44$$

(ii) 购进 17 枝时, 当天的利润的期望为 $y = (14 \times 5 - 3 \times 5) \times 0.1 + (15 \times 5 - 2 \times 5) \times 0.2 + (16 \times 5 - 1 \times 5) \times 0.16 + 17 \times 5 \times 0.54 = 76.4$

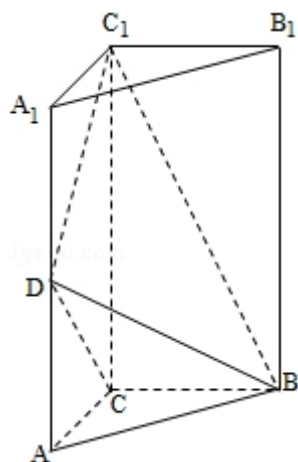
$\because 76.4 > 76$, \therefore 应购进 17 枝

【点评】 本题考查分段函数模型的建立, 考查离散型随机变量的期望与方差, 考查学生利用数学知识解决实际问题的能力.

19. (12 分) 如图, 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AC = BC = \frac{1}{2}AA_1$, D 是棱 AA_1 的中点, $DC_1 \perp BD$

(1) 证明: $DC_1 \perp BC$;

(2) 求二面角 $A_1 - BD - C_1$ 的大小.



【考点】LO：空间中直线与直线之间的位置关系；MJ：二面角的平面角及求法．

【专题】15：综合题．

【分析】（1）证明 $DC_1 \perp BC$ ，只需证明 $DC_1 \perp$ 面 BCD ，即证明 $DC_1 \perp DC$ ， $DC_1 \perp BD$ ；

（2）证明 $BC \perp$ 面 ACC_1A_1 ，可得 $BC \perp AC$ 取 A_1B_1 的中点 O ，过点 O 作 $OH \perp BD$ 于点 H ，连接 C_1O ， C_1H ，可得点 H 与点 D 重合且 $\angle C_1DO$ 是二面角 A_1-BD-C_1 的平面角，由此可求二面角 A_1-BD-C_1 的大小．

【解答】（1）证明：在 $Rt\triangle DAC$ 中， $AD=AC$ ， $\therefore \angle ADC=45^\circ$

同理： $\angle A_1DC_1=45^\circ$ ， $\therefore \angle CDC_1=90^\circ$

$\therefore DC_1 \perp DC$ ， $DC_1 \perp BD$

$\because DC \cap BD=D$

$\therefore DC_1 \perp$ 面 BCD

$\because BC \subset$ 面 BCD

$\therefore DC_1 \perp BC$

（2）解： $\because DC_1 \perp BC$ ， $CC_1 \perp BC$ ， $DC_1 \cap CC_1=C_1$ ， $\therefore BC \perp$ 面 ACC_1A_1 ，

$\because AC \subset$ 面 ACC_1A_1 ， $\therefore BC \perp AC$

取 A_1B_1 的中点 O ，过点 O 作 $OH \perp BD$ 于点 H ，连接 C_1O ， OH

$\because A_1C_1=B_1C_1$ ， $\therefore C_1O \perp A_1B_1$ ，

\because 面 $A_1B_1C_1 \perp$ 面 A_1BD ，面 $A_1B_1C_1 \cap$ 面 $A_1BD=A_1B_1$ ，

$$\therefore C_1O \perp \text{面 } A_1BD$$

而 $BD \subset \text{面 } A_1BD$

$$\therefore BD \perp C_1O,$$

$$\because OH \perp BD, C_1O \cap OH = O,$$

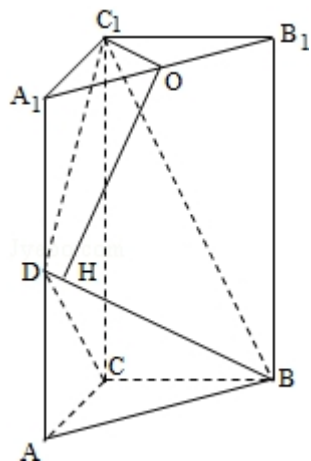
$\therefore BD \perp \text{面 } C_1OH \therefore C_1H \perp BD$, \therefore 点 H 与点 D 重合且 $\angle C_1DO$ 是二面角 A_1-BD-C_1 的平面角

$$\text{设 } AC=a, \text{ 则 } C_1O=\frac{\sqrt{2}a}{2}, C_1D=\sqrt{2}a=2C_1O,$$

$$\therefore \sin \angle C_1DO = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \angle C_1DO = 30^\circ$$

即二面角 A_1-BD-C_1 的大小为 30°



【点评】 本题考查线面垂直，考查面面角，解题的关键是掌握线面垂直的判定，正确作出面面角，属于中档题.

20. (12 分) 设抛物线 $C: x^2=2py$ ($p>0$) 的焦点为 F , 准线为 l , $A \in C$, 已知以 F 为圆心, FA 为半径的圆 F 交 l 于 B, D 两点;

(1) 若 $\angle BFD=90^\circ$, $\triangle ABD$ 的面积为 $4\sqrt{2}$, 求 p 的值及圆 F 的方程;

(2) 若 A, B, F 三点在一直线 m 上, 直线 n 与 m 平行, 且 n 与 C 只有一个公共点, 求坐标原点到 m, n 距离的比值.

【考点】 J1: 圆的标准方程; K8: 抛物线的性质; K1: 圆锥曲线的综合.

【专题】 15: 综合题; 16: 压轴题.

【分析】(1) 由对称性知: $\triangle BFD$ 是等腰直角 \triangle , 斜边 $|BD|=2p$ 点 A 到准线 l 的距离 $d=|FA|=|FB|=\sqrt{2}p$, 由 $\triangle ABD$ 的面积 $S_{\triangle ABD}=4\sqrt{2}$, 知 $\frac{1}{2} \times BD \times d = \frac{1}{2} \times 2p \times \sqrt{2}p = 4\sqrt{2}$, 由此能求出圆 F 的方程.

(2) 由对称性设 $A(x_0, \frac{x_0^2}{2p})$ ($x_0 > 0$), 则 $F(0, \frac{p}{2})$ 点 A, B 关于点 F 对称得:

$$B(-x_0, p - \frac{x_0^2}{2p}) \Rightarrow p - \frac{x_0^2}{2p} = -\frac{p}{2} \Leftrightarrow x_0^2 = 3p^2, \text{ 得: } A(\sqrt{3}p, \frac{3p}{2}), \text{ 由此能求出坐标}$$

原点到 m, n 距离的比值.

【解答】解: (1) 由对称性知: $\triangle BFD$ 是等腰直角 \triangle , 斜边 $|BD|=2p$ 点 A 到准线 l 的距离 $d=|FA|=|FB|=\sqrt{2}p$,

$$\because \triangle ABD \text{ 的面积 } S_{\triangle ABD} = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times BD \times d = \frac{1}{2} \times 2p \times \sqrt{2}p = 4\sqrt{2},$$

解得 $p=2$, 所以 F 坐标为 $(0, 1)$,

$$\therefore \text{圆 F 的方程为 } x^2 + (y-1)^2 = 8.$$

(2) 由题设 $A(x_0, \frac{x_0^2}{2p})$ ($x_0 > 0$), 则 $F(0, \frac{p}{2})$,

\because A, B, F 三点在同一直线 m 上,

又 AB 为圆 F 的直径, 故 A, B 关于点 F 对称.

$$\text{由点 A, B 关于点 F 对称得: } B(-x_0, p - \frac{x_0^2}{2p}) \Rightarrow p - \frac{x_0^2}{2p} = -\frac{p}{2} \Leftrightarrow x_0^2 = 3p^2$$

$$\text{得: } A(\sqrt{3}p, \frac{3p}{2}), \text{ 直线 } m: y = \frac{\frac{3p}{2} - \frac{p}{2}}{\sqrt{3}p}x + \frac{p}{2} \Leftrightarrow x - \sqrt{3}y + \frac{\sqrt{3}p}{2} = 0,$$

$$x^2 = 2py \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{2p} \Rightarrow y' = \frac{x}{p} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}p \Rightarrow \text{切点 } P(\frac{\sqrt{3}p}{3}, \frac{p}{6})$$

$$\text{直线 } n: y - \frac{p}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - \frac{\sqrt{3}p}{3}) \Leftrightarrow x - \sqrt{3}y - \frac{\sqrt{3}}{6}p = 0$$

$$\text{坐标原点到 } m, n \text{ 距离的比值为 } \frac{\frac{\sqrt{3}p}{2}}{\frac{\sqrt{3}p}{6}} = 3.$$

【点评】本题考查抛物线与直线的位置关系的综合应用, 具体涉及到抛物线的基本性质、圆的性质、导数的应用, 解题时要认真审题, 仔细解答, 注意合理

地进行等价转化.

21. (12分) 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f'(1)e^{x-1} - f(0)x + \frac{1}{2}x^2$;

(1) 求 $f(x)$ 的解析式及单调区间;

(2) 若 $f(x) \geq \frac{1}{2}x^2 + ax + b$, 求 $(a+1)b$ 的最大值.

【考点】6B: 利用导数研究函数的单调性; 6E: 利用导数研究函数的最值.

【专题】15: 综合题; 16: 压轴题; 2A: 探究型; 35: 转化思想.

【分析】(1) 对函数 $f(x)$ 求导, 再令自变量为 1, 求出 $f'(1)$ 得到函数的解析式及导数, 再由导数求函数的单调区间;

(2) 由题意 $f(x) \geq \frac{1}{2}x^2 + ax + b \Leftrightarrow h(x) = e^x - (a+1)x - b \geq 0$, 借助导数求出新函数的最小值, 令其大于 0 即可得到参数 a, b 所满足的关系式, 再研究 $(a+1)b$ 的最大值

【解答】解: (1) $f(x) = f'(1)e^{x-1} - f(0)x + \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x) = f'(1)e^{x-1} - f(0) + x$

令 $x=1$ 得: $f(0) = 1$

$\therefore f(x) = f'(1)e^{x-1} - x + \frac{1}{2}x^2$ 令 $x=0$, 得 $f(0) = f'(1)e^{-1} = 1$ 解得 $f'(1) = e$

故函数的解析式为 $f(x) = e^x - x + \frac{1}{2}x^2$

令 $g(x) = f'(x) = e^x - 1 + x$

$\therefore g'(x) = e^x + 1 > 0$, 由此知 $y = g(x)$ 在 $x \in \mathbb{R}$ 上单调递增

当 $x > 0$ 时, $f'(x) > f'(0) = 0$; 当 $x < 0$ 时, 有

$f'(x) < f'(0) = 0$ 得:

函数 $f(x) = e^x - x + \frac{1}{2}x^2$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-\infty, 0)$

(2) $f(x) \geq \frac{1}{2}x^2 + ax + b \Leftrightarrow h(x) = e^x - (a+1)x - b \geq 0$ 得 $h'(x) = e^x - (a+1)$

①当 $a+1 \leq 0$ 时, $h'(x) > 0 \Rightarrow y = h(x)$ 在 $x \in \mathbb{R}$ 上单调递增, $x \rightarrow -\infty$ 时, $h(x) \rightarrow -$

∞ 与 $h(x) \geq 0$ 矛盾

②当 $a+1 > 0$ 时, $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \ln(a+1)$, $h'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \ln(a+1)$

得: 当 $x = \ln(a+1)$ 时, $h(x)_{\min} = (a+1) - (a+1) \ln(a+1) - b \geq 0$, 即 $(a+1)$

$$) - (a+1) \ln(a+1) \geq b$$

$$\therefore (a+1)b \leq (a+1)^2 - (a+1)^2 \ln(a+1), \quad (a+1 > 0)$$

令 $F(x) = x^2 - x^2 \ln x \quad (x > 0)$, 则 $F'(x) = x(1 - 2 \ln x)$

$$\therefore F'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{e}, \quad F'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{e}$$

当 $x = \sqrt{e}$ 时, $F(x)_{\max} = \frac{e}{2}$

即当 $a = \sqrt{e} - 1$, $b = \frac{\sqrt{e}}{2}$ 时, $(a+1)b$ 的最大值为 $\frac{e}{2}$

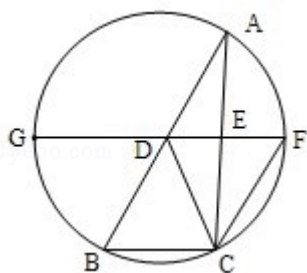
【点评】 本题考查导数在最值问题中的应用及利用导数研究函数的单调性, 解题的关键是第一题中要赋值求出 $f'(1)$, 易因为没有将 $f'(1)$ 看作常数而出错, 第二题中将不等式恒成立研究参数关系的问题转化为最小值问题, 本题考查了转化的思想, 考查判断推理能力, 是高考中的热点题型, 计算量大, 易马虎出错.

四、请考生在第 22, 23, 24 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分, 作答时请写清题号.

22. (10 分) 如图, D, E 分别为 $\triangle ABC$ 边 AB, AC 的中点, 直线 DE 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 F, G 两点, 若 $CF \parallel AB$, 证明:

(1) $CD = BC$;

(2) $\triangle BCD \sim \triangle GBD$.



【考点】N4：相似三角形的判定.

【专题】14：证明题.

【分析】（1）根据 D, E 分别为 $\triangle ABC$ 边 AB, AC 的中点, 可得 $DE \parallel BC$, 证明四边形 ADCF 是平行四边形, 即可得到结论;

（2）证明两组对应角相等, 即可证得 $\triangle BCD \sim \triangle GBD$.

【解答】证明：（1） \because D, E 分别为 $\triangle ABC$ 边 AB, AC 的中点

$\therefore DF \parallel BC, AD = DB$

$\because AB \parallel CF, \therefore$ 四边形 BDFC 是平行四边形

$\therefore CF \parallel BD, CF = BD$

$\therefore CF \parallel AD, CF = AD$

\therefore 四边形 ADCF 是平行四边形

$\therefore AF = CD$

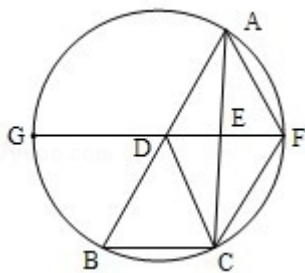
$\because \widehat{BC} = \widehat{AF}, \therefore BC = AF, \therefore CD = BC.$

（2）由（1）知 $\widehat{BC} = \widehat{AF}$, 所以 $\widehat{BF} = \widehat{AC}$.

所以 $\angle BGD = \angle DBC$.

因为 $GF \parallel BC$, 所以 $\angle BDG = \angle ADF = \angle DBC = \angle BDC$.

所以 $\triangle BCD \sim \triangle GBD$.



【点评】本题考查几何证明选讲, 考查平行四边形的证明, 考查三角形的相似, 属于基础题.

23. 选修 4-4: 坐标系与参数方程

已知曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases} x = 2\cos\phi \\ y = 3\sin\phi \end{cases}$ (ϕ 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的

正半轴为极轴建立坐标系, 曲线 C_2 的坐标系方程是 $\rho = 2$, 正方形 ABCD 的顶

点都在 C_2 上, 且 A, B, C, D 依逆时针次序排列, 点 A 的极坐标为 $(2, \frac{\pi}{3})$

(1) 求点 A, B, C, D 的直角坐标;

(2) 设 P 为 C_1 上任意一点, 求 $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$ 的取值范围.

【考点】Q4: 简单曲线的极坐标方程; Q8: 点的极坐标和直角坐标的互化; QL: 椭圆的参数方程.

【专题】15: 综合题; 16: 压轴题.

【分析】(1) 确定点 A, B, C, D 的极坐标, 即可得点 A, B, C, D 的直角坐标;

(2) 利用参数方程设出 P 的坐标, 借助于三角函数, 即可求得 $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$ 的取值范围.

【解答】解: (1) 点 A, B, C, D 的极坐标为 $(2, \frac{\pi}{3}), (2, \frac{5\pi}{6}), (2, \frac{4\pi}{3}), (2, \frac{11\pi}{6})$

点 A, B, C, D 的直角坐标为 $(1, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, 1), (-1, -\sqrt{3}), (\sqrt{3}, -1)$

(2) 设 $P(x_0, y_0)$, 则 $\begin{cases} x_0 = 2\cos\phi \\ y_0 = 3\sin\phi \end{cases}$ (ϕ 为参数)

$$t = |PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 = 4x^2 + 4y^2 + 16 = 32 + 20\sin^2\phi$$

$$\because \sin^2\phi \in [0, 1]$$

$$\therefore t \in [32, 52]$$

【点评】本题考查极坐标与直角坐标的互化, 考查圆的参数方程的运用, 属于中档题.

24. 已知函数 $f(x) = |x+a| + |x-2|$

①当 $a = -3$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 3$ 的解集;

② $f(x) \leq |x-4|$ 若的解集包含 $[1, 2]$, 求 a 的取值范围.

【考点】R5：绝对值不等式的解法.

【专题】17：选作题；59：不等式的解法及应用；5T：不等式.

【分析】①不等式等价于 $\begin{cases} x \leq 2 \\ 3-x+2-x \geq 3 \end{cases}$; 或 $\begin{cases} 2 < x < 3 \\ 3-x+x-2 \geq 3 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} x \geq 3 \\ x-3+x-2 \geq 3 \end{cases}$,

求出每个不等式组的解集, 再取并集即得所求.

②原命题等价于 $-2-x \leq a \leq 2-x$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立, 由此求得求 a 的取值范围.

【解答】解: (1) 当 $a = -3$ 时, $f(x) \geq 3$ 即 $|x-3| + |x-2| \geq 3$, 即

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ 3-x+2-x \geq 3 \end{cases}, \text{ 可得 } x \leq 1;$$
$$\begin{cases} 2 < x < 3 \\ 3-x+x-2 \geq 3 \end{cases}, \text{ 可得 } x \in \emptyset;$$
$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x-3+x-2 \geq 3 \end{cases}, \text{ 可得 } x \geq 4.$$

取并集可得不等式的解集为 $\{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 4\}$.

(2) 原命题即 $f(x) \leq |x-4|$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立, 等价于 $|x+a| + 2-x \leq 4-x$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立,

等价于 $|x+a| \leq 2$, 等价于 $-2 \leq x+a \leq 2$, $-2-x \leq a \leq 2-x$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立.

故当 $1 \leq x \leq 2$ 时, $-2-x$ 的最大值为 $-2-1=-3$, $2-x$ 的最小值为 0 ,

故 a 的取值范围为 $[-3, 0]$.

【点评】本题主要考查绝对值不等式的解法, 关键是去掉绝对值, 化为与之等价的不等式组来解, 体现了分类讨论的数学思想, 属于中档题.