2010年全国统一高考数学试卷（理科）（大纲版Ⅱ）

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1. （5分）复数 $(\frac{3-i}{1+i})^2$=（　　）

A．$-3-4i$　　B．$-3+4i$　　C．$3-4i$　　D．$3+4i$

2. （5分）函数 $y=\frac{1+\ln(x-1)}{2}(x>1)$ 的反函数是（　　）

A．$y=e^{2x-1}-1$（$x>0$）　　B．$y=e^{2x-1}+1$（$x>0$）

C．$y=e^{2x-1}-1$（$x\in R$）　　D．$y=e^{2x-1}+1$（$x\in R$）

3. （5分）若变量x，y满足约束条件 $\begin{cases}x\geqslant -1\\ y\geqslant x\\ 3x+2y\leqslant 5\end{cases}$，则 $z=2x+y$ 的最大值为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

4. （5分）如果等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3+a_4+a_5=12$，那么 $a_1+a_2+\ldots+a_7$=（　　）

A．14　　B．21　　C．28　　D．35

5. （5分）不等式 $\frac{x^2-x-6}{x-1}>0$ 的解集为（　　）

A．$\{x|x<-2$，或 $x>3\}$　　B．$\{x|x<-2$，或 $1<x<3\}$

C．$\{x|-2<x<1$，或 $x>3\}$　　D．$\{x|-2<x<1$，或 $1<x<3\}$

6. （5分）将标号为1，2，3，4，5，6的6张卡片放入3个不同的信封中，若每个信封放2张，其中标号为1，2的卡片放入同一信封，则不同的方法共有（　　）

A．12种　　B．18种　　C．36种　　D．54种

7. （5分）为了得到函数 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 的图象，只需把函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 的图象（　　）

A．向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个长度单位　　B．向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个长度单位

C．向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个长度单位　　D．向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个长度单位

8. （5分）△ABC中，点D在边AB上，CD平分∠ACB，若 $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{b}$，$|\overrightarrow{a}|=1$，$|\overrightarrow{b}|=2$，则 $\overrightarrow{CD}$=（　　）

A．$\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$　　B．$\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$　　C．$\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{b}$　　D．$\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$

9．（5 分）已知正四棱锥 S﹣ ABCD 中，SA=$2\sqrt{3}$，那么当该棱锥的体积最大时，它的高为（　　）

A．1　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．3

10．（5 分）若曲线 y=$x^{-\frac{1}{2}}$在点（a，$a^{-\frac{1}{2}}$）处的切线与两个坐标围成的三角形的面积为 18，则 a=（　　）

A．64　　B．32　　C．16　　D．8

11．（5 分）与正方体 ABCD﹣ $A_1B_1C_1D_1$ 的三条棱 AB、CC_1、A_1D_1 所在直线的距离相等的点（　　）

A．有且只有 1 个　B．有且只有 2 个　C．有且只有 3 个　D．有无数个

12．（5 分）已知椭圆 T：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，过右焦点 F 且斜率为 k（k＞0）的直线与 T 相交于 A，B 两点，若$\overline{AF}=3\overline{FB}$，则 k=（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

二、填空题（共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分）

13．（5 分）已知 a 是第二象限的角，tan（π+2α）=﹣$\frac{4}{3}$，则 tanα=________．

14．（5 分）若（x﹣$\frac{a}{x}$）^{9} 的展开式中 x^3 的系数是﹣ 84，则 a=________．

15．（5 分）已知抛物线 C：$y^2=2px$（p＞0）的准线 l，过 M（1，0）且斜率为$\sqrt{3}$的直线与 l 相交于 A，与 C 的一个交点为 B，若$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，则 p=________．

16．（5 分）已知球 O 的半径为 4，圆 M 与圆 N 为该球的两个小圆，AB 为圆 M 与圆 N 的公共弦，AB=4，若 OM=ON=3，则两圆圆心的距离 MN=________．

三、解答题（共 6 小题，满分 70 分）

17．（10 分）△ABC 中，D 为边 BC 上的一点，BD=33，sinB=$\frac{5}{13}$，cos∠ADC=$\frac{3}{5}$，求 AD．

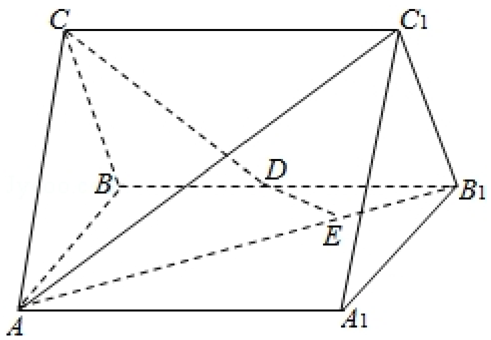
18．（12 分）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=(n^2+n)\bullet 3^n$.

（Ⅰ）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}$；（Ⅱ）证明：$\frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\ldots+\frac{a_n}{n^2}>3^n$.

19．（12 分）如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=BC$，$AA_1=AB$，D 为 BB_1 的中点，E 为 AB_1 上的一点，$AE=3EB_1$.

（Ⅰ）证明：DE 为异面直线 AB_1 与 CD 的公垂线；

（Ⅱ）设异面直线 AB_1 与 CD 的夹角为 45°，求二面角 $A_1-AC_1-B_1$ 的大小.

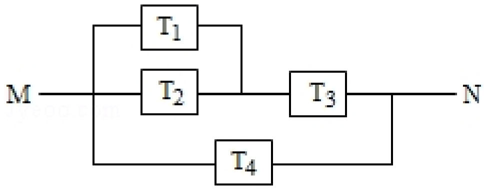


20．（12 分）如图，由 M 到 N 的电路中有 4 个元件，分别标为 T_1，T_2，T_3，T_4，电流能通过 T_1，T_2，T_3 的概率都是 P，电流能通过 T_4 的概率是 0.9，电流能否通过各元件相互独立. 已知 T_1,T_2,T_3 中至少有一个能通过电流的概率为 0.999

.

（Ⅰ）求 P；

（Ⅱ）求电流能在 M 与 N 之间通过的概率．



21．（12 分）已知斜率为 1 的直线 l 与双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$相交于 B、D 两点，且 BD 的中点为 M（1，3）．

（Ⅰ）求 C 的离心率；

（Ⅱ）设 C 的右顶点为 A，右焦点为 F，$|DF|\bullet|BF|=17$，证明：过 A、B、D 三点的圆与 x 轴相切．

22．（12 分）设函数 f（x）=1﹣ e^{-x}．

（Ⅰ）证明：当 x＞﹣1 时，f（x）$\geqslant\frac{x}{x+1}$；

（Ⅱ）设当 x≥0 时，f（x）$\leqslant\frac{x}{ax+1}$，求 a 的取值范围．

2010 年全国统一高考数学试卷（理科）（大纲版Ⅱ）

参考答案与试题解析

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分）

1. （5 分）复数（$\frac{3-i}{1+i}$）^{2}=（　　）

A．﹣3﹣4i　　B．﹣3+4i　　C．3﹣4i　　D．3+4i

【考点】A5：复数的运算．

【专题】11：计算题．

【分析】首先进行复数的除法运算，分子和分母同乘以分母的共轭复数，把复数整理成整式形式，再进行复数的乘方运算，合并同类项，得到结果．

【解答】解：（$\frac{3-i}{1+i}$）^{2}=$[\frac{(3-i)(1-i)}{2}]^2$=（1﹣2i）^{2}=﹣3﹣4i．

故选：A．

【点评】本题主要考查复数的除法和乘方运算，是一个基础题，解题时没有规律和技巧可寻，只要认真完成，则一定会得分．

2. （5 分）函数 $y=\frac{1+\ln(x-1)}{2}(x>1)$的反函数是（　　）

A．$y=e^{2x-1}-1$（x＞0）　　B．$y=e^{2x-1}+1$（x＞0）

C．$y=e^{2x-1}-1$（x∈R）　　D．$y=e^{2x-1}+1$（x∈R）

【考点】4H：对数的运算性质；4R：反函数．

【专题】11：计算题；16：压轴题．

【分析】从条件中 $y=\frac{1+\ln(x-1)}{2}(x>1)$中反解出 x，再将 x，y 互换即得．解答本题首先熟悉反函数的概念，然后根据反函数求解三步骤：1、换：x、y 换位，2、解：解出 y，3、标：标出定义域，据此即可求得反函数．

【解答】解：由原函数解得

$x=e^{2y-1}+1$，

∴f^{-1}（x）$=e^{2x-1}+1$，

又 x＞1，∴x－ 1＞0；

∴ln（x－ 1）∈R∴在反函数中 x∈R，

故选：D.

【点评】求反函数，一般应分以下步骤：（1）由已知解析式 y=f（x）反求出 x=Φ（y）；（2）交换 x=Φ（y）中 x、y 的位置；（3）求出反函数的定义域（一般可通过求原函数的值域的方法求反函数的定义域）.

3．（5 分）若变量 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x\geqslant -1\\ y\geqslant x\\ 3x+2y\leqslant 5\end{cases}$，则 z=2x+y 的最大值为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【考点】7C：简单线性规划.

【专题】31：数形结合.

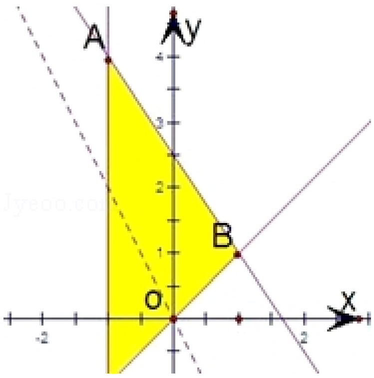
【分析】先根据约束条件画出可行域，设 z=2x+y，再利用 z 的几何意义求最值，只需求出直线 z=2x+y 过可行域内的点 B 时，从而得到 m 值即可.

【解答】解：作出可行域，作出目标函数线，

可得直线与 y=x 与 3x+2y=5 的交点为最优解点，

∴即为 B（1，1），当 x=1，y=1 时 $z_{max}=3$.

故选：C.



【点评】本题考查了线性规划的知识，以及利用几何意义求最值，属于基础题.

4. （5 分）如果等差数列$\{a_n\}$中，$a_3+a_4+a_5=12$，那么 $a_1+a_2+\ldots+a_7=$（　　）

A. 14　　B. 21　　C. 28　　D. 35

【考点】83：等差数列的性质；85：等差数列的前 n 项和.

【分析】由等差数列的性质求解.

【解答】解：$a_3+a_4+a_5=3a_4=12$，$a_4=4$，

$\therefore a_1+a_2+\ldots+a_7=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=7a_4=28$

故选：C.

【点评】本题主要考查等差数列的性质.

5. （5 分）不等式$\frac{x^2-x-6}{x-1}>0$的解集为（　　）

A. $\{x|x<-2$，或 $x>3\}$　　B. $\{x|x<-2$，或 $1<x<3\}$

C. $\{x|-2<x<1$，或 $x>3\}$　　D. $\{x|-2<x<1$，或 $1<x<3\}$

【考点】73：一元二次不等式及其应用.

【专题】11：计算题.

【分析】解$\frac{f(x)}{g(x)}>0$，可转化成 $f(x)\cdot g(x)>0$，再利用根轴法进行求解.

【解答】解：$\frac{x^2-x-6}{x-1}>0\Leftrightarrow\frac{(x-3)(x+2)}{(x-1)}>0\Leftrightarrow(x-3)(x+2)(x-1)>0$

利用数轴穿根法解得$-2<x<1$ 或 $x>3$，

故选：C.

【点评】本试题主要考查分式不等式与高次不等式的解法，属于不等式的基础题.

6. （5 分）将标号为 1，2，3，4，5，6 的 6 张卡片放入 3 个不同的信封中，若每个信封放 2 张，其中标号为 1，2 的卡片放入同一信封，则不同的方法共有（　　）

A．12 种　　B．18 种　　C．36 种　　D．54 种

【考点】D9：排列、组合及简单计数问题．

【专题】11：计算题．

【分析】本题是一个分步计数问题，首先从 3 个信封中选一个放 1，2 有 3 种不同的选法，再从剩下的 4 个数中选两个放一个信封有 C_4^2，余下放入最后一个信封，根据分步计数原理得到结果．

【解答】解：由题意知，本题是一个分步计数问题，

∵先从 3 个信封中选一个放 1，2，有 $C_3^1=3$ 种不同的选法；根据分组公式，其他四封信放入两个信封，每个信封两个有 $\frac{C_4^2\cdot C_2^2}{A_2^2}\cdot A_2^2=6$ 种放法，

∴共有 3×6×1=18．

故选：B．

【点评】本题考查分步计数原理，考查平均分组问题，是一个易错题，解题的关键是注意到第二步从剩下的 4 个数中选两个放到一个信封中，这里包含两个步骤，先平均分组，再排列．

7．（5 分）为了得到函数 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 的图象，只需把函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 的图象（　　）

A．向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个长度单位　　B．向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个长度单位

C．向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个长度单位　　D．向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个长度单位

【考点】HJ：函数 y=Asin（ωx+φ）的图象变换．

【专题】1：常规题型．

【分析】先将 2 提出来，再由左加右减的原则进行平移即可．

【解答】解：$y=\sin(2x+\frac{\pi}{6})=\sin2(x+\frac{\pi}{12})$，$y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})=\sin2(x-\frac{\pi}{6})$，

所以将 y=sin（2x+$\frac{\pi}{6}$）的图象向右平移$\frac{\pi}{4}$个长度单位得到 y=sin（2x－$\frac{\pi}{3}$）的图象，

故选：B．

【点评】本试题主要考查三角函数图象的平移．平移都是对单个的 x 来说的．

8．（5 分）△ABC 中，点 D 在边 AB 上，CD 平分∠ACB，若$\overrightarrow{CB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{b}$，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，则$\overrightarrow{CD}=$（　　）

A．$\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$　　B．$\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$　　C．$\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{b}$　　D．$\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$

【考点】9B：向量加减混合运算．

【分析】由△ABC 中，点 D 在边 AB 上，CD 平分∠ACB，根据三角形内角平分线定理，我们易得到$\frac{BD}{AD}=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{2}$，我们将$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}$后，将各向量用$\vec{a}$，$\vec{b}$表示，即可得到答案．

【解答】解：∵CD 为角平分线，

∴$\frac{BD}{AD}=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{2}$，

∵$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{b}$，

∴$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$，

∴$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

故选：B．

【点评】本题考查了平面向量的基础知识，解答的核心是三角形内角平分线定理，即若 AD 为三角形 ABC 的内角 A 的角平分线，则 AB：AC=BD：CD

9．（5 分）已知正四棱锥 S－ ABCD 中，SA=2$\sqrt{3}$，那么当该棱锥的体积最大时，它的高为（　　）

A．1　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．3

【考点】LF：棱柱、棱锥、棱台的体积．

【专题】11：计算题；16：压轴题．

【分析】设出底面边长，求出正四棱锥的高，写出体积表达式，利用求导求得最大值时，高的值．

【解答】解：设底面边长为 a，则高 $h=\sqrt{SA^2-(\frac{\sqrt{2}a}{2})^2}=\sqrt{12-\frac{a^2}{2}}$，所以体积

$V=\frac{1}{3}a^2h=\frac{1}{3}\sqrt{12a^4-\frac{1}{2}a^6}$，

设 $y=12a^4-\frac{1}{2}a^6$，则 $y'=48a^3-3a^5$，当 y 取最值时，$y'=48a^3-3a^5=0$，解得 a=0 或 a=4 时，当 a=4 时，体积最大，

此时 $h=\sqrt{12-\frac{a^2}{2}}=2$，

故选：C．

【点评】本试题主要考查椎体的体积，考查高次函数的最值问题的求法．是中档题．

10．（5 分）若曲线 $y=x^{-\frac{1}{2}}$在点（a，$a^{-\frac{1}{2}}$）处的切线与两个坐标围成的三角形的面积为 18，则 a=（　　）

A．64　　B．32　　C．16　　D．8

【考点】6H：利用导数研究曲线上某点切线方程．

【专题】31：数形结合．

【分析】欲求参数 a 值，必须求出在点（a，$a^{-\frac{1}{2}}$）处的切线方程，只须求出其斜率的值即可，故先利用导数求出在 x=a 处的导函数值，再结合导数的几何意义即可求出切线的斜率得到切线的方程，最后求出与坐标轴的交点坐标结合三角形的面积公式．从而问题解决．

【解答】解：$y'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$，$\therefore k=-\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}$，

切线方程是 $y-a^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}(x-a)$，

令 x=0，$y=\frac{3}{2}a^{-\frac{1}{2}}$，令 y=0，x=3a，

∴三角形的面积是 $s=\frac{1}{2}\bullet 3a\bullet \frac{3}{2}a^{-\frac{1}{2}}=18$，

解得 a=64．

故选：A．

【点评】本试题主要考查求导法则、导数的几何意义、切线的求法和三角形的面积公式，考查考生的计算能力．

11．（5 分）与正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的三条棱 AB、CC_1、A_1D_1 所在直线的距离相等的点（　　）

A．有且只有 1 个　B．有且只有 2 个　C．有且只有 3 个　D．有无数个

【考点】LO：空间中直线与直线之间的位置关系．

【专题】16：压轴题．

【分析】由于点 D、B_1 显然满足要求，猜想 B_1D 上任一点都满足要求，然后想办法证明结论．

【解答】解：在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 上建立如图所示空间直角坐标系，

并设该正方体的棱长为 1，连接 B_1D，并在 B_1D 上任取一点 P，

因为 $\overrightarrow{DB_1}=(1,1,1)$，

所以设 P（a，a，a），其中 $0\leqslant a\leqslant 1$．

作 PE⊥平面 A_1D，垂足为 E，再作 $EF\perp A_1D_1$，垂足为 F，

则 PF 是点 P 到直线 A_1D_1 的距离．

所以 $PF=\sqrt{a^2+(1-a)^2}$；

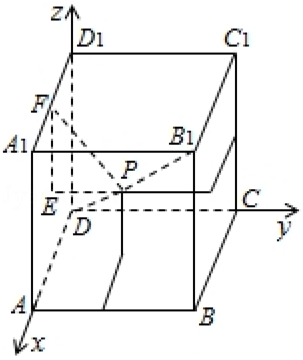
同理点 P 到直线 AB、CC_1 的距离也是 $\sqrt{a^2+(1-a)^2}$．

所以 B_1D 上任一点与正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的三条棱 AB、CC_1、A_1D_1 所在直线

的距离都相等，

所以与正方体 ABCD﹣ $A_1B_1C_1D_1$ 的三条棱 AB、CC_1、A_1D_1 所在直线的距离相等的点有无数个．

故选：D．



【点评】本题主要考查合情推理的能力及空间中点到线的距离的求法．

12．（5 分）已知椭圆 T：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，过右焦点 F 且斜率为 k（k＞0）的直线与 T 相交于 A，B 两点，若$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，则 k=（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

【考点】KH：直线与圆锥曲线的综合．

【专题】11：计算题；16：压轴题．

【分析】设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），根据$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$求得 y_1 和 y_2 关系根据离心率设$a=2t$，$c=\sqrt{3}t$，b=t，代入椭圆方程与直线方程联立，消去 x，根据韦达定理表示出 y_1+y_2 和 y_1y_2，进而根据 y_1 和 y_2 关系求得 k．

【解答】解：A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

∵$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，∴$y_1=-3y_2$，

∵$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，设$a=2t$，$c=\sqrt{3}t$，b=t，

∴$x^2+4y^2-4t^2=0$①，

设直线 AB 方程为$x=sy+\sqrt{3}t$，代入①中消去 x，可得$(s^2+4)y^2+2\sqrt{3}sty-t^2=0$，

$\therefore y_1+y_2=-\frac{2\sqrt{3}st}{s^2+4}$，$y_1y_2=-\frac{t^2}{s^2+4}$，$-2y_2=-\frac{2\sqrt{3}st}{s^2+4}$，$-3y_2^2=-\frac{t^2}{s^2+4}$，

解得 $s^2=\frac{1}{2}$，$k=\sqrt{2}$

故选：B．

【点评】本题主要考查了直线与圆锥曲线的综合问题．此类题问题综合性强，要求考生有较高地转化数学思想的运用能力，能将已知条件转化到基本知识的运用．

二、填空题（共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分）

13．（5 分）已知 a 是第二象限的角，tan（π+2α）=$-\frac{4}{3}$，则 tanα=__$\underline{-\frac{1}{2}}$__．

【考点】GO：运用诱导公式化简求值；GS：二倍角的三角函数．

【专题】11：计算题．

【分析】根据诱导公式 tan（π+α）=tanα 得到 tan2α，然后利用公式 tan（α+β）$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$求出 tanα，因为 α 为第二象限的角，判断取值即可．

【解答】解：由 tan（π+2a）=$-\frac{4}{3}$得 tan2a=$-\frac{4}{3}$，又 tan2a=$\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$=$-\frac{4}{3}$，

解得 tana=$-\frac{1}{2}$或 tana=2，

又 a 是第二象限的角，所以 tana=$-\frac{1}{2}$．

故答案为：$-\frac{1}{2}$．

【点评】本试题主要考查三角函数的诱导公式、正切的二倍角公式和解方程，考查考生的计算能力．

14．（5 分）若（x$-\frac{a}{x}$）^{9}的展开式中 x^3 的系数是$-$ 84，则 a=__$\underline{1}$__．

【考点】DA：二项式定理．

【专题】11：计算题．

【分析】利用二项展开式的通项公式求出第 r+1 项，令 x 的指数为 3 得展开式中

x^3的系数，列出方程解得．

【解答】解：$(x-\frac{a}{x})^9$展开式的通项为$T_{r+1}=C_9^r x^{9-r}(-\frac{a}{x})^r$=（﹣ a）$^r C_9^r x^{9-2r}$

令 9﹣ 2r=3 得 r=3

∴展开式中 x^3 的系数是 C_9^3（﹣ a）^{3}=﹣ 84a^3=﹣ 84，

∴a=1．

故答案为 1

【点评】本试题主要考查二项展开式的通项公式和求指定项系数的方法．

15．（5 分）已知抛物线 C：$y^2=2px$（p＞0）的准线 l，过 M（1，0）且斜率为$\sqrt{3}$的直线与 l 相交于 A，与 C 的一个交点为 B，若$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，则 p=__2__．

【考点】K8：抛物线的性质．

【专题】11：计算题；16：压轴题．

【分析】设直线 AB 的方程与抛物线方程联立消去 y 得 $3x^2+$（﹣ 6﹣ 2p）x+3=0，进而根据$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，可知 M 为 A、B 的中点，

可得 p 的关系式，解方程即可求得 p．

【解答】解：设直线 AB：$y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$，代入 $y^2=2px$ 得 $3x^2+$（﹣ 6﹣ 2p）x+3=0，

又∵$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，即 M 为 A、B 的中点，

∴x_B+（﹣ $\frac{p}{2}$）=2，即 $x_B=2+\frac{p}{2}$，

得 $p^2+4P-12=0$，

解得 p=2，p=﹣ 6（舍去）

故答案为：2

【点评】本题考查了抛物线的几何性质．属基础题．

16．（5 分）已知球 O 的半径为 4，圆 M 与圆 N 为该球的两个小圆，AB 为圆 M 与圆 N 的公共弦，AB=4，若 OM=ON=3，则两圆圆心的距离 MN=__3__．

【考点】JE：直线和圆的方程的应用；ND：球的性质．

【专题】11：计算题；16：压轴题．

【分析】根据题意画出图形，欲求两圆圆心的距离，将它放在与球心组成的三角形 MNO 中，只要求出球心角即可，通过球的性质构成的直角三角形即可解得．

【解答】解法一：∵ON=3，球半径为 4，

∴小圆 N 的半径为$\sqrt{7}$，

∵小圆 N 中弦长 AB=4，作 NE 垂直于 AB，

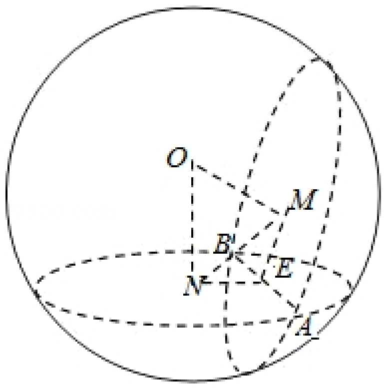
∴NE=$\sqrt{3}$，同理可得 ME=$\sqrt{3}$，在直角三角形 ONE 中，

∵NE=$\sqrt{3}$，ON=3，

∴$\angle EON=\frac{\pi}{6}$，

∴$\angle MON=\frac{\pi}{3}$，

∴MN=3．



故填：3．

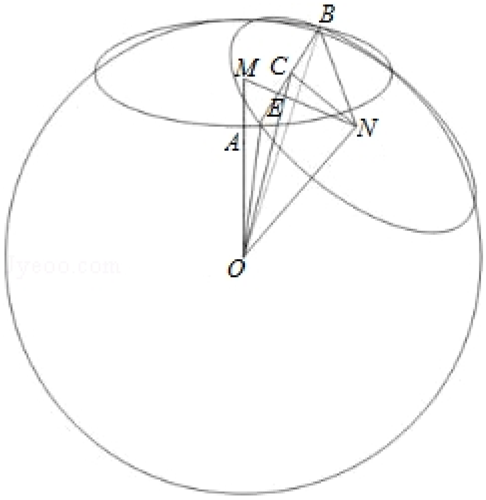
解法二：如下图：设 AB 的中点为 C，则 OC 与 MN 必相交于 MN 中点为 E，因为 OM=ON=3，

故小圆半径 NB 为$\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

C 为 AB 中点，故 CB=2；所以 NC=$\sqrt{\sqrt{7}^2-2^2}=\sqrt{3}$，

∵△ONC 为直角三角形，NE 为△ONC 斜边上的高，OC=$\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

∴MN=2EN=2•CN•$\frac{ON}{CO}=2\times\sqrt{3}\times\frac{3}{2\sqrt{3}}=3$



故填：3．

【点评】本题主要考查了点、线、面间的距离计算，还考查球、直线与圆的基础知识，考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力，属于基础题．

三、解答题（共 6 小题，满分 70 分）

17．（10 分）△ABC 中，D 为边 BC 上的一点，BD=33，$\sin B=\frac{5}{13}$，$\cos\angle ADC=\frac{3}{5}$，求 AD．

【考点】GG：同角三角函数间的基本关系；HP：正弦定理．

【分析】先由 $\cos\angle ADC=\frac{3}{5}$ 确定角 ADC 的范围，因为∠BAD=∠ADC﹣B 所以可求其正弦值，最后由正弦定理可得答案．

【解答】解：由 $\cos\angle ADC=\frac{3}{5}>0$，则 $\angle ADC<\frac{\pi}{2}$，

又由知 B＜∠ADC 可得 $B<\frac{\pi}{2}$，

由 $\sin B=\frac{5}{13}$，可得 $\cos B=\frac{12}{13}$，

又由 $\cos\angle ADC=\frac{3}{5}$，可得 $\sin\angle ADC=\frac{4}{5}$．

从而 $\sin\angle BAD=\sin(\angle ADC-B)=\sin\angle ADC\cos B-\cos\angle ADC\sin B=\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}-\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{33}{65}$．

由正弦定理得 $\frac{AD}{\sin B}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}$，

所以 $AD=\dfrac{BD\cdot\sin B}{\sin\angle BAD}=\dfrac{33\times\frac{5}{13}}{\frac{33}{65}}=25$.

【点评】三角函数与解三角形的综合性问题，是近几年高考的热点，在高考试题中频繁出现．这类题型难度比较低，一般出现在 17 或 18 题，属于送分题，估计以后这类题型仍会保留，不会有太大改变．解决此类问题，要根据已知条件，灵活运用正弦定理或余弦定理，求边角或将边角互化．

18．（12 分）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=(n^2+n)\cdot 3^n$.

（Ⅰ）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$；（Ⅱ）证明：$\dfrac{a_1}{1^2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\ldots+\dfrac{a_n}{n^2}>3^n$.

【考点】6F：极限及其运算；R6：不等式的证明．

【专题】11：计算题；14：证明题．

【分析】（1）由题意知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n-S_{n-1}}{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{S_{n-1}}{S_n})=1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_{n-1}}{S_n}$，

由此可知答案．

（2）由题意知，$\dfrac{a_1}{1^2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n^2}=\dfrac{S_1}{1^2}+\dfrac{S_2-S_1}{2^2}+\cdots+\dfrac{S_n-S_{n-1}}{n^2}$

$=(\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{2^2})S_1+(\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^2})S_2+\cdots+(\dfrac{1}{(n-1)^2}-\dfrac{1}{n^2})S_{n-1}+\dfrac{1}{n^2}S_n>\dfrac{1}{n^2}S_n$，由此可知，当 n≥1 时，$\dfrac{a_1}{1^2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n^2}>3^n$.

【解答】解：（1）

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n-S_{n-1}}{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{S_{n-1}}{S_n})=1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_{n-1}}{S_n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_{n-1}}{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{S_n}=\dfrac{2}{3}$；

（2）当 n=1 时，$\frac{a_1}{1^2}=S_1=6>3$；

当 n＞1 时，$\frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}=\frac{S_1}{1^2}+\frac{S_2-S_1}{2^2}+\cdots+\frac{S_n-S_{n-1}}{n^2}$

$=(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2})S_1+(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2})S_2+\cdots+(\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{n^2})S_{n-1}+\frac{1}{n^2}S_n>\frac{1}{n^2}S_n=$

$\frac{n^2+n}{n^2}\cdot 3^n>3^n$

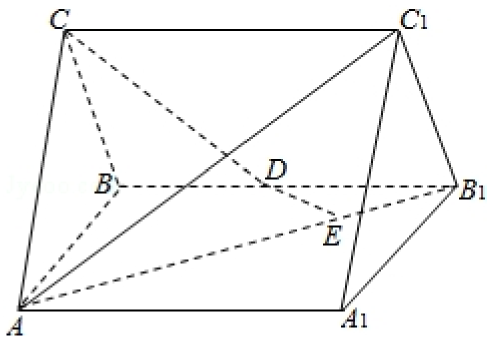
所以，n≥1 时，$\frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}>3^n$.

【点评】本题考查数列的极限问题，解题时要注意公式的灵活运用.

19．（12 分）如图，直三棱柱 ABC﹣$A_1B_1C_1$ 中，AC=BC，AA_1=AB，D 为 BB_1 的中点，E 为 AB_1 上的一点，AE=3EB_1.

（Ⅰ）证明：DE 为异面直线 AB_1 与 CD 的公垂线；

（Ⅱ）设异面直线 AB_1 与 CD 的夹角为 45°，求二面角 A_1﹣AC_1﹣B_1 的大小.



【考点】LM：异面直线及其所成的角；LQ：平面与平面之间的位置关系.

【专题】11：计算题；14：证明题.

【分析】（1）欲证 DE 为异面直线 AB_1 与 CD 的公垂线，即证 DE 与异面直线 AB_1 与 CD 垂直相交即可；

（2）将 AB_1 平移到 DG，故∠CDG 为异面直线 AB_1 与 CD 的夹角，作 HK⊥AC_1，K 为垂足，连接 B_1K，由三垂线定理，得 B_1K⊥AC_1，因此∠B_1KH 为二面角 A_1﹣AC_1﹣B_1 的平面角，在三角形 B_1KH 中求出此角即可.

【解答】解：（1）连接 A_1B，记 A_1B 与 AB_1 的交点为 F．

因为面 AA_1BB_1 为正方形，故 $A_1B\perp AB_1$，且 $AF=FB_1$，

又 $AE=3EB_1$，所以 $FE=EB_1$，

又 D 为 BB_1 的中点，

故 DE∥BF，$DE\perp AB_1$．

作 $CG\perp AB$，G 为垂足，由 AC=BC 知，G 为 AB 中点．

又由底面 $ABC\perp$ 面 AA_1B_1B．连接 DG，则 $DG\parallel AB_1$，

故 $DE\perp DG$，由三垂线定理，得 $DE\perp CD$．

所以 DE 为异面直线 AB_1 与 CD 的公垂线．

（2）因为 $DG\parallel AB_1$，故∠CDG 为异面直线 AB_1 与 CD 的夹角，∠CDG=45°

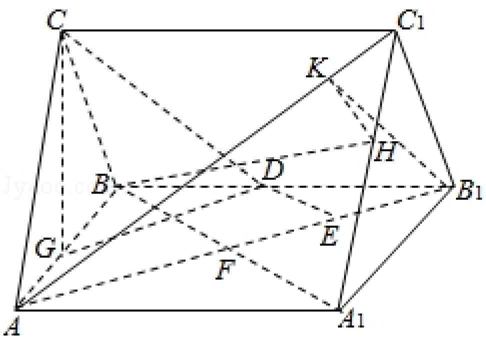
设 AB=2，则 $AB_1=2\sqrt{2}$，$DG=\sqrt{2}$，$CG=\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{3}$．

作 $B_1H\perp A_1C_1$，H 为垂足，因为底面 $A_1B_1C_1\perp$ 面 AA_1CC_1，故 $B_1H\perp$ 面 AA_1C_1C．又作 $HK\perp AC_1$，K 为垂足，连接 B_1K，由三垂线定理，得 $B_1K\perp AC_1$，因此 $\angle B_1KH$ 为二面角 $A_1-AC_1-B_1$ 的平面角．

$B_1H=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$C_1H=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$AC_1=\sqrt{7}$，$HK=\frac{2\sqrt{21}}{21}$

$\tan\angle B_1KH=\sqrt{14}$，

∴二面角 $A_1-AC_1-B_1$ 的大小为 $\arctan\sqrt{14}$．

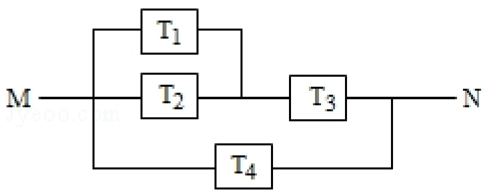


【点评】本试题主要考查空间的线面关系与空间角的求解，考查考生的空间想象与推理计算的能力．三垂线定理是立体几何的最重要定理之一，是高考的热点，它是处理线线垂直问题的有效方法，同时它也是确定二面角的平面角的主要手段．通过引入空间向量，用向量代数形式来处理立体几何问题，淡化了传统几何中的“形”到“形”的推理方法，从而降低了思维难度，使解题变得程序化，这是用向量解立体几何问题的独到之处．

20．（12 分）如图，由 M 到 N 的电路中有 4 个元件，分别标为 T_1，T_2，T_3，T_4，电流能通过 T_1，T_2，T_3 的概率都是 P，电流能通过 T_4 的概率是 0.9，电流能否通过各元件相互独立．已知 T_1，T_2，T_3 中至少有一个能通过电流的概率为 0.999．

（Ⅰ）求 P；

（Ⅱ）求电流能在 M 与 N 之间通过的概率．



【考点】C5：互斥事件的概率加法公式；C8：相互独立事件和相互独立事件的概率乘法公式．

【专题】11：计算题．

【分析】（1）设出基本事件，将要求事件用基本事件的来表示，将 T1，T2，T3 至少有一个能通过电流用基本事件表示并求出概率即可求得 p．

（Ⅱ）根据题意，B 表示事件：电流能在 M 与 N 之间通过，根据电路图，可得 $B=A_4+(1-A_4)A_1A_3+(1-A_4)(1-A_1)A_2A_3$，由互斥事件的概率公式，代入数据计算可得答案．

【解答】解：（Ⅰ）根据题意，记电流能通过 T_i 为事件 A_i，i=1、2、3、4，

A 表示事件：T_1，T_2，T_3，中至少有一个能通过电流，

易得 A_1，A_2，A_3 相互独立，且 $\overline{A}=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}$，

$P(\overline{A})=(1-p)^3=1-0.999=0.001$，

计算可得，p=0.9；

（Ⅱ）根据题意，B 表示事件：电流能在 M 与 N 之间通过，

有 $B=A_4+(1-A_4)A_1A_3+(1-A_4)(1-A_1)A_2A_3$，

则 $P(B)=P(A_4+(1-A_4)A_1A_3+(1-A_4)(1-A_1)A_2A_3)$

$=0.9+0.1\times0.9\times0.9+0.1\times0.1\times0.9\times0.9$

$=0.9891$.

【点评】本题考查了概率中的互斥事件、对立事件及独立事件的概率，注意先明确事件之间的关系，进而选择对应的公式来计算.

21．（12 分）已知斜率为 1 的直线 l 与双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$相交于 B、D 两点，且 BD 的中点为 M（1，3）.

（Ⅰ）求 C 的离心率；

（Ⅱ）设 C 的右顶点为 A，右焦点为 F，|DF|•|BF|=17，证明：过 A、B、D 三点的圆与 x 轴相切.

【考点】J9：直线与圆的位置关系；KC：双曲线的性质；KH：直线与圆锥曲线的综合.

【专题】11：计算题；14：证明题；16：压轴题.

【分析】（Ⅰ）由直线过点（1，3）及斜率可得直线方程，直线与双曲线交于 BD 两点的中点为（1，3），可利用直线与双曲线消元后根据中点坐标公式找出 a，b 的关系式即求得离心率.

（Ⅱ）利用离心率将条件|FA||FB|=17，用含 a 的代数式表示，即可求得 a，则 A 点坐标可得（1，0），由于 A 在 x 轴上所以，只要证明 2AM=BD 即证得.

【解答】解：（Ⅰ）由题设知，l 的方程为：y=x+2，代入 C 的方程，并化简，

得$(b^2-a^2)x^2-4a^2x-a^2b^2-4a^2=0$，

设 B(x_1,y_1)，D(x_2,y_2)，则$x_1+x_2=\frac{4a^2}{b^2-a^2}$，$x_1x_2=-\frac{4a^2+a^2b^2}{b^2-a^2}$，①

由 M（1，3）为 BD 的中点知$\frac{x_1+x_2}{2}=1$.

故$\frac{1}{2}\times\frac{4a^2}{b^2-a^2}=1$，即 $b^2=3a^2$，②

故$c=\sqrt{a^2+b^2}=2a$，

∴C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=2$.

（Ⅱ）由①②知，C 的方程为：$3x^2-y^2=3a^2$，A（a，0），F（2a，0），

$x_1+x_2=2$，$x_1x_2=-\frac{4+3a^2}{2}$.

故不妨设 $x_1\leqslant -a$，$x_2\geqslant a$，

$|BF|=\sqrt{(x_1-2a)^2+y_1^2}=a-2x_1$，$|FD|=\sqrt{(x_2-2a)^2+y_2^2}=2x_2-a$，

$|BF|\bullet|FD|=(a-2x_1)(2x_2-a)=-4x_1x_2+2a(x_1+x_2)-a^2=5a^2+4a+8$.

又 $|BF|\bullet|FD|=17$，故 $5a^2+4a+8=17$.

解得 $a=1$，或 $a=-\frac{9}{5}$（舍去），

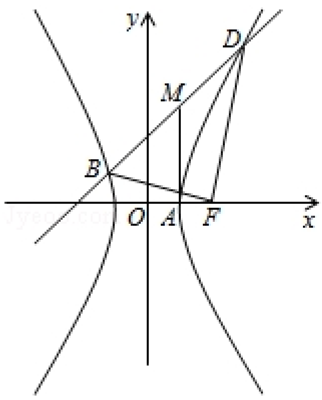
故 $|BD|=\sqrt{2}|x_1-x_2|=\sqrt{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=6$，

连接 MA，则由 A（1，0），M（1，3）知 $|MA|=3$，

从而 MA=MB=MD，且 MA⊥x 轴，

因此以 M 为圆心，MA 为半径的圆经过 A、B、D 三点，且在点 A 处与 x 轴相切，

所以过 A、B、D 三点的圆与 x 轴相切.



【点评】本题考查了圆锥曲线、直线与圆的知识，考查学生运用所学知识解决问题的能力.

22. （12 分）设函数 $f(x)=1-e^{-x}$.

（Ⅰ）证明：当 $x>-1$ 时，$f(x)\geqslant\frac{x}{x+1}$；

（Ⅱ）设当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant\frac{x}{ax+1}$，求 a 的取值范围.

【考点】6E：利用导数研究函数的最值．

【专题】15：综合题；16：压轴题．

【分析】（1）将函数 f（x）的解析式代入 f（x）$\geq\frac{x}{x+1}$整理成 $e^x\geq1+x$，组成新函数 g（x）$=e^x-x-1$，然后根据其导函数判断单调性进而可求出函数 g（x）的最小值 g（0），进而 g（x）≥g（0）可得证．

（2）先确定函数 f（x）的取值范围，然后对 a 分 a＜0 和 a≥0 两种情况进行讨论．当 a＜0 时根据 x 的范围可直接得到 f（x）$\leq\frac{x}{ax+1}$不成立；当 a≥0 时，令 h（x）=axf（x）+f（x）－x，然后对函数 h（x）进行求导，根据导函数判断单调性并求出最值，求 a 的范围．

【解答】解：（1）当 x＞－1 时，f（x）$\geq\frac{x}{x+1}$当且仅当 $e^x\geq1+x$

令 g（x）$=e^x-x-1$，则 g'（x）$=e^x-1$

当 x≥0 时 g'（x）≥0，g（x）在[0，+∞）是增函数

当 x≤0 时 g'（x）≤0，g（x）在（－∞，0]是减函数

于是 g（x）在 x=0 处达到最小值，因而当 x∈R 时，g（x）≥g（0）时，即 $e^x\geq1+x$

所以当 x＞－1 时，f（x）$\geq\frac{x}{x+1}$

（2）由题意 x≥0，此时 f（x）≥0

当 a＜0 时，若 x＞$-\frac{1}{a}$，则$\frac{x}{ax+1}$＜0，f（x）$\leq\frac{x}{ax+1}$不成立；

当 a≥0 时，令 h（x）=axf（x）+f（x）－x，则

f（x）$\leq\frac{x}{ax+1}$当且仅当 h（x）≤0

因为 f（x）$=1-e^{-x}$，所以 h'（x）=af（x）+axf'（x）+f'（x）－1=af（x）－axf（x）+ax－f（x）

（i）当 0≤a≤$\frac{1}{2}$时，由（1）知 x≤（x+1）f（x）

h'（x）≤af（x）－axf（x）+a（x+1）f（x）－f（x）

$=(2a-1)f(x)\leqslant 0$，

$h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 是减函数，$h(x)\leqslant h(0)=0$，即 $f(x)\leqslant \frac{x}{ax+1}$；

（ii）当 $a>\frac{1}{2}$ 时，由 $y=x-f(x)=x-1+e^{-x}$，

$y'=1-e^{-x}$，$x>0$ 时，函数 y 递增；$x<0$，函数 y 递减.

可得 $x=0$ 处函数 y 取得最小值 0，即有 $x\geqslant f(x)$．

$h'(x)=af(x)-axf(x)+ax-f(x)\geqslant af(x)-axf(x)+af(x)-f(x)=(2a-1-ax)f(x)$

当 $0<x<\frac{2a-1}{a}$ 时，$h'(x)>0$，所以 $h'(x)>0$，所以 $h(x)>h(0)=0$，即 $f(x)>\frac{x}{ax+1}$

综上，a 的取值范围是 $[0,\frac{1}{2}]$

【点评】本题主要考查导数的应用和利用导数证明不等式，考查考生综合运用知识的能力及分类讨论的思想，考查考生的计算能力及分析问题、解决问题的能力；导数常作为高考的压轴题，对考生的能力要求非常高，它不仅要求考生牢固掌握基础知识、基本技能，还要求考生具有较强的分析能力和计算能力．估计以后对导数的考查力度不会减弱．作为压轴题，主要是涉及利用导数求最值解决恒成立问题，利用导数证明不等式等，常伴随对参数的讨论，这也是难点之所在．