2009年全国统一高考数学试卷（理科）（全国卷Ⅱ）

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1. （5分）$\frac{10i}{2-i}$=（　　）

A．－2+4i　　B．－2－4i　　C．2+4i　　D．2－4i

2. （5分）设集合A={x||x|＞3}，B={x|$\frac{x-1}{x-4}$＜0}，则A∩B=（　　）

A．φ　　B．（3，4）　　C．（－2，1）　　D．（4，+∞）

3. （5分）已知△ABC中，cotA=－$\frac{12}{5}$，则cosA=（　　）

A．$\frac{12}{13}$　　B．$\frac{5}{13}$　　C．$-\frac{5}{13}$　　D．$-\frac{12}{13}$

4. （5分）函数$y=\frac{x}{2x-1}$在点（1，1）处的切线方程为（　　）

A．x－y－2=0　　B．x+y－2=0　　C．x+4y－5=0　　D．x－4y+3=0

5. （5分）已知正四棱柱ABCD－$A_1B_1C_1D_1$中，AA_1=2AB，E为AA_1中点，则异面直线BE与CD_1所形成角的余弦值为（　　）

A．$\frac{\sqrt{10}}{10}$　　B．$\frac{1}{5}$　　C．$\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　D．$\frac{3}{5}$

6. （5分）已知向量$\vec{a}$=（2，1），$\vec{a}\cdot\vec{b}$=10，$|\vec{a}+\vec{b}|=5\sqrt{2}$，则$|\vec{b}|$=（　　）

A．$\sqrt{5}$　　B．$\sqrt{10}$　　C．5　　D．25

7. （5分）设a=$\log_3\pi$，b=$\log_2\sqrt{3}$，c=$\log_3\sqrt{2}$，则（　　）

A．a＞b＞c　　B．a＞c＞b　　C．b＞a＞c　　D．b＞c＞a

8. （5分）若将函数y=tan（ωx+$\frac{\pi}{4}$）（ω＞0）的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后，与函数y=tan（ωx+$\frac{\pi}{6}$）的图象重合，则ω的最小值为（　　）

A．$\frac{1}{6}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{1}{2}$

9. （5分）已知直线y=k（x+2）（k＞0）与抛物线C：y^2=8x相交于A、B两点，F为C的焦点，若|FA|=2|FB|，则k=（　　）

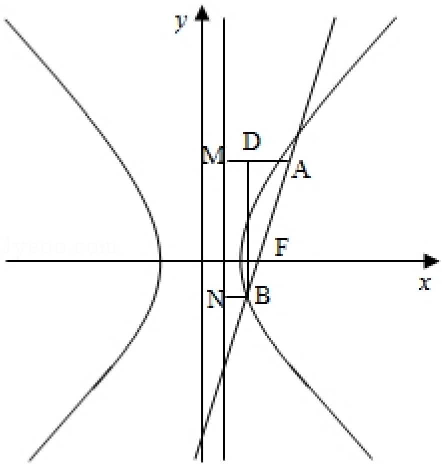
A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

10. （5分）甲、乙两人从4门课程中各选修2门，则甲、乙所选的课程中恰有

1 门相同的选法有（　　）

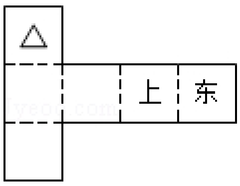
A．6 种　　B．12 种　　C．24 种　　D．30 种

11．（5 分）已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的右焦点为 F，过 F 且斜率为$\sqrt{3}$的直线交 C 于 A、B 两点，若$\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{FB}$，则 C 的离心率为（　　）



A．$\frac{6}{5}$　　B．$\frac{7}{5}$　　C．$\frac{5}{8}$　　D．$\frac{9}{5}$

12．（5 分）纸制的正方体的六个面根据其方位分别标记为上、下、东、南、西、北．现在沿该正方体的一些棱将正方体剪开、外面朝上展平，得到如图所示的平面图形，则标“△”的面的方位（　　）



A．南　　B．北　　C．西　　D．下

二、填空题（共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分）

13．（5 分）$(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})^4$的展开式中 x^3y^3 的系数为________.

14．（5 分）设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $a_5=5a_3$，则$\frac{S_9}{S_5}$=________.

15．（5 分）设 OA 是球 O 的半径，M 是 OA 的中点，过 M 且与 OA 成 45°角的平面截球 O 的表面得到圆 C．若圆 C 的面积等于$\frac{7\pi}{4}$，则球 O 的表面积等于

.

16．（5 分）求证：菱形各边中点在以对角线的交点为圆心的同一个圆上．

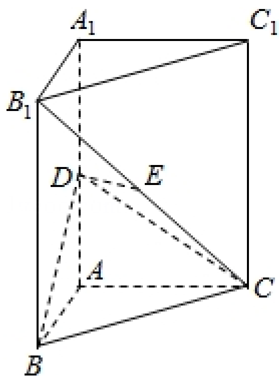
三、解答题（共 6 小题，满分 70 分）

17．（10 分）设△ABC 的内角 A、B、C 的对边长分别为 a、b、c，cos（A﹣C）+cosB=$\frac{3}{2}$，b^2=ac，求 B．

18．（12 分）如图，直三棱柱 ABC﹣$A_1B_1C_1$中，AB⊥AC，D、E 分别为 AA_1、B_1C 的中点，DE⊥平面 BCC_1．

（Ⅰ）证明：AB=AC；

（Ⅱ）设二面角 A﹣BD﹣C 为 60°，求 B_1C 与平面 BCD 所成的角的大小．



19．（12 分）设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，已知 a_1=1，S_{n+1}=4a_n+2（n∈N*）．

（1）设 $b_n=a_{n+1}-2a_n$，证明数列$\{b_n\}$是等比数列；

（2）求数列$\{a_n\}$的通项公式．

20．（12 分）某车间甲组有 10 名工人，其中有 4 名女工人；乙组有 5 名工人，其中有 3 名女工人，现采用分层抽样方法（层内采用不放回简单随机抽样）从甲、乙两组中共抽取 3 名工人进行技术考核．

（Ⅰ）求从甲、乙两组各抽取的人数；

（Ⅱ）求从甲组抽取的工人中恰有 1 名女工人的概率；

（Ⅲ）记 ξ 表示抽取的 3 名工人中男工人数，求 ξ 的分布列及数学期望．

21．（12 分）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，过右焦点 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点，当 l 的斜率为 1 时，坐标原点 O 到 l 的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$

，

（Ⅰ）求 a，b 的值；

（Ⅱ）C 上是否存在点 P，使得当 l 绕 F 转到某一位置时，有$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$成立？若存在，求出所有的 P 的坐标与 l 的方程；若不存在，说明理由．

22．（12 分）设函数 $f(x)=x^2+a\ln(1+x)$ 有两个极值点 x_1、x_2，且 $x_1<x_2$，

（Ⅰ）求 a 的取值范围，并讨论 f（x）的单调性；

（Ⅱ）证明：$f(x_2)>\frac{1-2\ln2}{4}$．

2009年全国统一高考数学试卷（理科）（全国卷Ⅱ）

参考答案与试题解析

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1．（5分）$\frac{10i}{2-i}$=（　　）

A．﹣2+4i　　B．﹣2﹣4i　　C．2+4i　　D．2﹣4i

【考点】A5：复数的运算．

【专题】11：计算题．

【分析】首先进行复数的除法运算，分子和分母同乘以分母的共轭复数，分子和分母进行乘法运算，整理成最简形式，得到结果．

【解答】解：原式=$\frac{10i(2+i)}{(2-i)(2+i)}$=$-2+4i$，

故选：A．

【点评】本题考查复数的乘除运算，是一个基础题，在近几年的高考题目中，复数的简单的运算题目是一个必考的问题，通常出现在试卷的前几个题目中．

2．（5分）设集合A={x||x|＞3}，B={x|$\frac{x-1}{x-4}$＜0}，则A∩B=（　　）

A．ϕ　　B．（3，4）　　C．（﹣2，1）　　D．（4，+∞）

【考点】1E：交集及其运算．

【分析】先化简集合A和B，再根据两个集合的交集的意义求解．

【解答】解：A={x||x|＞3}⇒{x|x＞3或x＜﹣3}，B={x|$\frac{x-1}{x-4}$＜0}={x|1＜x＜4}，

∴A∩B=（3，4），

故选：B．

【点评】本题属于以不等式为依托，求集合的交集的基础题，也是高考常会考的题型．

3．（5 分）已知△ABC 中，cotA=$-\frac{12}{5}$，则 cosA=（　　）

A．$\frac{12}{13}$　　B．$\frac{5}{13}$　　C．$-\frac{5}{13}$　　D．$-\frac{12}{13}$

【考点】GG：同角三角函数间的基本关系．

【专题】11：计算题．

【分析】利用同角三角函数的基本关系 cosA 转化成正弦和余弦，求得 sinA 和 cosA 的关系式，进而与 $\sin^2A+\cos^2A=1$ 联立方程求得 cosA 的值．

【解答】解：∵cotA=$-\frac{12}{5}$

∴A 为钝角，cosA＜0 排除 A 和 B，

再由 cotA=$\frac{\cos A}{\sin A}$=$-\frac{12}{5}$，和 $\sin^2A+\cos^2A=1$ 求得 cosA=$-\frac{12}{13}$，

故选：D．

【点评】本题考查同角三角函数基本关系的运用．主要是利用了同角三角函数中的平方关系和商数关系．

4．（5 分）函数 $y=\frac{x}{2x-1}$ 在点（1，1）处的切线方程为（　　）

A．x－ y－ 2=0　　B．x+y－ 2=0　　C．x+4y－ 5=0　　D．x－ 4y+3=0

【考点】6H：利用导数研究曲线上某点切线方程．

【专题】11：计算题．

【分析】欲求切线方程，只须求出其斜率即可，故先利用导数求出在 x=1 处的导函数值，再结合导数的几何意义即可求出切线的斜率．从而问题解决．

【解答】解：依题意得 y′=$-\frac{1}{(2x-1)^2}$，

因此曲线 $y=\frac{x}{2x-1}$ 在点（1，1）处的切线的斜率等于－ 1，

相应的切线方程是 y－ 1=－ 1×（x－ 1），即 x+y－ 2=0，

故选：B．

【点评】本小题主要考查直线的斜率、导数的几何意义、利用导数研究曲线上某点切线方程等基础知识，考查运算求解能力．属于基础题．

5．（5 分）已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2AB$，E 为 AA_1 中点，则异面直线 BE 与 CD_1 所形成角的余弦值为（　　）

A．$\frac{\sqrt{10}}{10}$　　B．$\frac{1}{5}$　　C．$\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　D．$\frac{3}{5}$

【考点】LM：异面直线及其所成的角．

【专题】11：计算题；31：数形结合；44：数形结合法；5G：空间角．

【分析】由 $BA_1\parallel CD_1$，知 $\angle A_1BE$ 是异面直线 BE 与 CD_1 所形成角，由此能求出异面直线 BE 与 CD_1 所形成角的余弦值．

【解答】解：∵正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2AB$，E 为 AA_1 中点，

∴$BA_1\parallel CD_1$，∴$\angle A_1BE$ 是异面直线 BE 与 CD_1 所形成角，

设 $AA_1=2AB=2$，

则 $A_1E=1$，$BE=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

$A_1B=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，

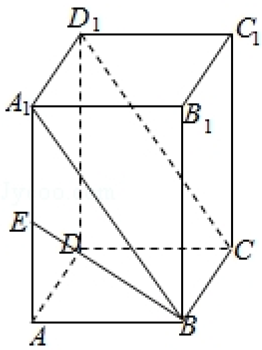
∴$\cos\angle A_1BE=\frac{A_1B^2+BE^2-A_1E^2}{2\cdot A_1B\cdot BE}$

$=\frac{5+2-1}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}}$

$=\frac{3\sqrt{10}}{10}$．

∴异面直线 BE 与 CD_1 所形成角的余弦值为$\frac{3\sqrt{10}}{10}$．

故选：C．



【点评】本题考查异面直线所成角的余弦值的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意空间思维能力的培养．

6．（5 分）已知向量$\vec{a}$=（2，1），$\vec{a}\cdot\vec{b}$=10，$|\vec{a}+\vec{b}|=5\sqrt{2}$，则$|\vec{b}|$=（　　）

A．$\sqrt{5}$　　B．$\sqrt{10}$　　C．5　　D．25

【考点】91：向量的概念与向量的模；9O：平面向量数量积的性质及其运算．

【专题】5A：平面向量及应用．

【分析】根据所给的向量的数量积和模长，对$|a+b|=5\sqrt{2}$两边平方，变化为有模长和数量积的形式，代入所给的条件，等式变为关于要求向量的模长的方程，解方程即可．

【解答】解：∵$|\vec{a}+\vec{b}|=5\sqrt{2}$，$|\vec{a}|=\sqrt{5}$

∴$(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=50$，

得$|\vec{b}|=5$

故选：C．

【点评】本题考查平面向量数量积运算和性质，根据所给的向量表示出要求模的向量，用求模长的公式写出关于变量的方程，解方程即可，解题过程中注意对于变量的应用．

7．（5 分）设 a=$\log_3\pi$，b=$\log_2\sqrt{3}$，c=$\log_3\sqrt{2}$，则（　　）

A．a＞b＞c　　B．a＞c＞b　　C．b＞a＞c　　D．b＞c＞a

【考点】4M：对数值大小的比较．

【分析】利用对数函数 $y=\log_a^x$ 的单调性进行求解．当 a＞1 时函数为增函数当 0＜a＜1 时函数为减函数，

如果底 a 不相同时可利用 1 做为中介值．

【解答】解：∵ $\log_3\sqrt{2}<\log_2\sqrt{2}<\log_2\sqrt{3}$∴b＞c

∵ $\log_2\sqrt{3}<\log_2 2=\log_3 3<\log_3\pi$ ∴a＞b∴a＞b＞c，故选 A

【点评】本题考查的是对数函数的单调性，这里需要注意的是当底不相同时可用 1 做为中介值．

8．（5 分）若将函数 y=tan（ωx+$\frac{\pi}{4}$）（ω＞0）的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后，与函数 y=tan（ωx+$\frac{\pi}{6}$）的图象重合，则 ω 的最小值为（　　）

A．$\frac{1}{6}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{1}{2}$

【考点】HJ：函数 y=Asin（ωx+φ）的图象变换．

【专题】11：计算题．

【分析】根据图象的平移求出平移后的函数解析式，与函数 y=tan（ωx+$\frac{\pi}{6}$）的图象重合，比较系数，求出 ω=6k+$\frac{1}{2}$（k∈Z），然后求出 ω 的最小值．

【解答】解：y=tan（ωx+$\frac{\pi}{4}$），向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位可得：y=tan[ω（x－$\frac{\pi}{6}$）+$\frac{\pi}{4}$]=tan（ωx+$\frac{\pi}{6}$）

∴$\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\omega+k\pi=\frac{\pi}{6}$

∴ω=k+$\frac{1}{2}$（k∈Z），

又∵ω＞0

∴$\omega_{min}=\frac{1}{2}$．

故选：D．

【点评】本题是基础题，考查三角函数的图象的平移，待定系数法的应用，考查计算能力，是常考题．

9．（5 分）已知直线 y=k（x+2）（k＞0）与抛物线 C：$y^2=8x$ 相交于 A、B 两点，F 为 C 的焦点，若|FA|=2|FB|，则 k=（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【考点】K8：抛物线的性质．

【专题】11：计算题；16：压轴题．

【分析】根据直线方程可知直线恒过定点，如图过 A、B 分别作 AM⊥l 于 M，BN⊥l 于 N，根据|FA|=2|FB|，推断出|AM|=2|BN|，点 B 为 AP 的中点、连接 OB，进而可知 $|OB|=\frac{1}{2}|AF|$，进而推断出|OB|=|BF|，进而求得点 B 的横坐标，则点 B 的坐标可得，最后利用直线上的两点求得直线的斜率．

【解答】解：设抛物线 C：$y^2=8x$ 的准线为 l：x=﹣ 2

直线 y=k（x+2）（k＞0）恒过定点 P（﹣ 2，0）

如图过 A、B 分别作 AM⊥l 于 M，BN⊥l 于 N，

由|FA|=2|FB|，则|AM|=2|BN|，

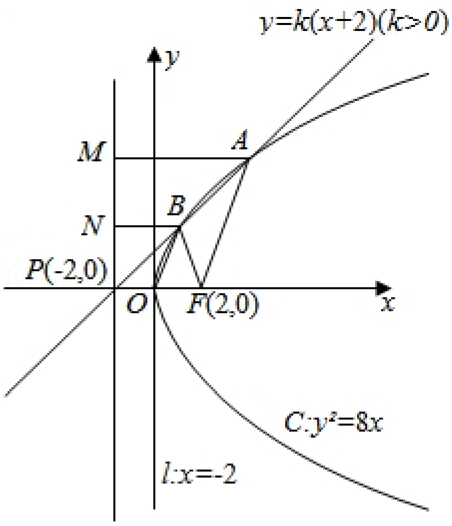
点 B 为 AP 的中点、连接 OB，

则 $|OB|=\frac{1}{2}|AF|$，

∴|OB|=|BF|，点 B 的横坐标为 1，

故点 B 的坐标为 $(1,\ 2\sqrt{2})$ $\therefore k=\frac{2\sqrt{2}-0}{1-(-2)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

故选：D．



【点评】本题主要考查了抛物线的简单性质．考查了对抛物线的基础知识的灵活运用．

10．（5 分）甲、乙两人从 4 门课程中各选修 2 门，则甲、乙所选的课程中恰有 1 门相同的选法有（　　）

A．6 种　　B．12 种　　C．24 种　　D．30 种

【考点】D5：组合及组合数公式．

【专题】11：计算题．

【分析】根据题意，分两步，①先求所有两人各选修 2 门的种数，②再求两人所选两门都相同与都不同的种数，进而由事件间的相互关系，分析可得答案．

【解答】解：根据题意，分两步，

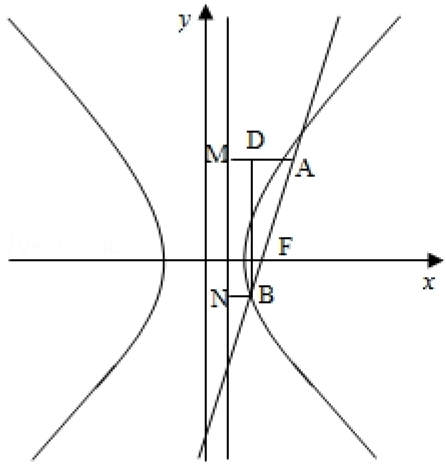
①由题意可得，所有两人各选修 2 门的种数 $C_4^2C_4^2=36$，

②两人所选两门都相同的有为 $C_4^2=6$ 种，都不同的种数为 $C_4^2=6$，

故选：C．

【点评】本题考查组合公式的运用，解题时注意事件之间的关系，选用直接法或间接法．

11．（5 分）已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的右焦点为 F，过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于 A、B 两点，若 $\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{FB}$，则 C 的离心率为（　　）



A. $\frac{6}{5}$　　B. $\frac{7}{5}$　　C. $\frac{5}{8}$　　D. $\frac{9}{5}$

【考点】I3：直线的斜率；KA：双曲线的定义．

【专题】11：计算题；16：压轴题．

【分析】设双曲线的有准线为 l，过 A、B 分别作 AM⊥l 于 M，BN⊥l 于 N，BD⊥AM 于 D，由直线 AB 的斜率可知直线 AB 的倾斜角，进而推$|AD|=\frac{1}{2}|AB|$，由双曲线的第二定义|AM|﹣ |BN|=|AD|，进而根据$\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{FB}$，求得离心率．

【解答】解：设双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的右准线为 l，

过 A、B 分别作 AM⊥l 于 M，BN⊥l 于 N，BD⊥AM 于 D，

由直线 AB 的斜率为$\sqrt{3}$，

知直线 AB 的倾斜角为 60°

∴∠BAD=60°

$|AD|=\frac{1}{2}|AB|$，

由双曲线的第二定义有：

$|AM|-|BN|=|AD|=\frac{1}{e}(|\overrightarrow{AF}|-|\overrightarrow{FB}|)$

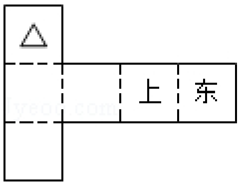
$=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AF}|+|\overrightarrow{FB}|)$

$\therefore\frac{1}{e}\cdot 3|\overrightarrow{FB}|=\frac{5}{2}|\overrightarrow{FB}|$，$\therefore e=\frac{6}{5}$

故选：A．

【点评】本题主要考查了双曲线的定义．解题的关键是利用了双曲线的第二定义，找到了已知条件与离心率之间的联系．

12．（5 分）纸制的正方体的六个面根据其方位分别标记为上、下、东、南、西、北．现在沿该正方体的一些棱将正方体剪开、外面朝上展平，得到如图所示的平面图形，则标“△”的面的方位（　　）



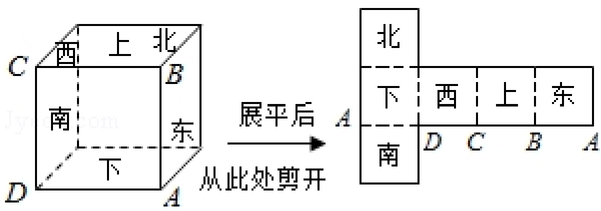
A．南　　B．北　　C．西　　D．下

【考点】LC：空间几何体的直观图．

【专题】16：压轴题．

【分析】本题考查多面体展开图；正方体的展开图有多种形式，结合题目，首先满足上和东所在正方体的方位，“△”的面就好确定．

【解答】解：如图所示．



故选 B

【点评】本题主要考查多面体的展开图的复原，属于基本知识基本能力的考查．

二、填空题（共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分）

13．（5 分）$(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})^4$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为__6__．

【考点】DA：二项式定理．

【分析】先化简代数式，再利用二项展开式的通项公式求出第 r+1 项，令 x，y 的指数都为 1 求出 x^3y^3 的系数

【解答】解：$(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})^4=x^2y^2(\sqrt{x}-\sqrt{y})^4$，

只需求$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^4$展开式中的含 xy 项的系数．

∵$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^4$的展开式的通项为$T_{r+1}=C_4^r(\sqrt{x})^{4-r}(-\sqrt{y})^r$

令$\begin{cases}4-r=2\\r=2\end{cases}$得 $r=2$

∴展开式中 x^3y^3 的系数为 $C_4^2=6$

故答案为 6．

【点评】本题考查二项展开式的通项公式是解决二项展开式的特定项问题的工具．

14．（5 分）设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $a_5=5a_3$，则$\frac{S_9}{S_5}$=__9__．

【考点】83：等差数列的性质．

【专题】11：计算题．

【分析】根据等差数列的等差中项的性质可知 $S_9=9a_5$，$S_5=5a_3$，根据 $a_5=5a_3$，进而可得则$\frac{S_9}{S_5}$的值．

【解答】解：∵$\{a_n\}$为等差数列，

$S_9=a_1+a_2+\ldots+a_9=9a_5$，$S_5=a_1+a_2+\ldots+a_5=5a_3$，

∴$\frac{S_9}{S_5}=\frac{9a_5}{5a_3}=9$

故答案为 9

【点评】本题主要考查了等差数列中等差中项的性质．属基础题．

15．（5 分）设 OA 是球 O 的半径，M 是 OA 的中点，过 M 且与 OA 成 45°角的平面截球 O 的表面得到圆 C．若圆 C 的面积等于$\frac{7\pi}{4}$，则球 O 的表面积等于__8π__．

【考点】LG：球的体积和表面积．

【专题】11：计算题；16：压轴题．

【分析】本题可以设出球和圆的半径，利用题目的关系，求解出具体的值，即可得到答案．

【解答】解：设球半径为 R，圆 C 的半径为 r，

由 $\pi r^2=\frac{7\pi}{4}$，得 $r^2=\frac{7}{4}$．

因为 $OC=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{R}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}R$．

由 $R^2=(\frac{\sqrt{2}}{4}R)^2+r^2=\frac{1}{8}R^2+\frac{7}{4}$ 得 $R^2=2$

故球 O 的表面积等于 8π

故答案为：8π，

【点评】本题考查学生对空间想象能力，以及球的面积体积公式的利用，是基础题．

16．（5 分）求证：菱形各边中点在以对角线的交点为圆心的同一个圆上．

【考点】N8：圆内接多边形的性质与判定．

【专题】14：证明题；16：压轴题．

【分析】如图，菱形 ABCD 的对角线 AC 和 BD 相交于点 O，菱形 ABCD 各边中点分别为 M、N、P、Q，根据菱形的性质得到 AC⊥BD，垂足为 O，且 AB=BC=CD=DA，再根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半得到 $OM=ON=OP=OQ=\frac{1}{2}AB$，得到 M、N、P、Q 四点在以 O 为圆心 OM 为半径的圆上．

【解答】已知：如图，菱形 ABCD 的对角线 AC 和 BD 相交于点 O．

求证：菱形 ABCD 各边中点 M、N、P、Q 在以 O 为圆心的同一个圆上．

证明：∵四边形 ABCD 是菱形，

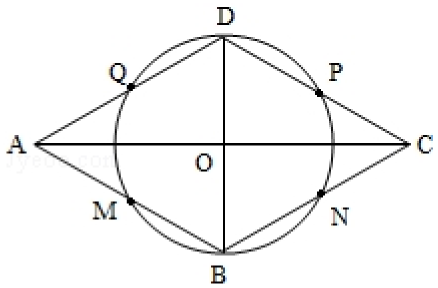
∴AC⊥BD，垂足为 O，且 AB=BC=CD=DA，

而 M、N、P、Q 分别是边 AB、BC、CD、DA 的中点，

∴$OM=ON=OP=OQ=\frac{1}{2}AB$，

∴M、N、P、Q 四点在以 O 为圆心 OM 为半径的圆上．

所以菱形各边中点在以对角线的交点为圆心的同一个圆上.



【点评】本题考查了四点共圆的判定方法．也考查了菱形的性质以及直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半．

三、解答题（共 6 小题，满分 70 分）

17．（10 分）设△ABC 的内角 A、B、C 的对边长分别为 a、b、c，cos（A﹣ C）$+\cos B=\frac{3}{2}$，$b^2=ac$，求 B．

【考点】GG：同角三角函数间的基本关系；HP：正弦定理．

【专题】11：计算题．

【分析】本题考查三角函数化简及解三角形的能力，关键是注意角的范围对角的三角函数值的制约，并利用正弦定理得到 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$（负值舍掉），从而求出答案．

【解答】解：由 $\cos(A-C)+\cos B=\frac{3}{2}$及 $B=\pi-(A+C)$得

$\cos(A-C)-\cos(A+C)=\frac{3}{2}$，

$\therefore \cos A\cos C+\sin A\sin C-(\cos A\cos C-\sin A\sin C)=\frac{3}{2}$，

$\therefore \sin A\sin C=\frac{3}{4}$．

又由 $b^2=ac$ 及正弦定理得 $\sin^2B=\sin A\sin C$，

故 $\sin^2B=\frac{3}{4}$，

$\therefore \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\sin B=-\frac{\sqrt{3}}{2}$（舍去），

于是 $B=\frac{\pi}{3}$或 $B=\frac{2\pi}{3}$．

又由 $b^2=ac$

知 $b\leqslant a$ 或 $b\leqslant c$

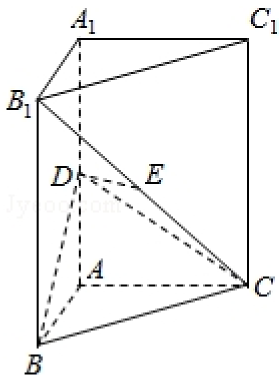
所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

【点评】三角函数给值求值问题的关键就是分析已知角与未知角的关系，然后通过角的关系，选择恰当的公式，即：如果角与角相等，则使用同角三角函数关系；如果角与角之间的和或差是直角的整数倍，则使用诱导公式；如果角与角之间存在和差关系，则我们用和差角公式；如果角与角存在倍数关系，则使用倍角公式.

18．（12 分）如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp AC$，D、E 分别为 AA_1、B_1C 的中点，$DE\perp$ 平面 BCC_1.

（Ⅰ）证明：$AB=AC$；

（Ⅱ）设二面角 $A-BD-C$ 为 60°，求 B_1C 与平面 BCD 所成的角的大小.



【考点】LQ：平面与平面之间的位置关系.

【专题】11：计算题；14：证明题.

【分析】（1）连接 BE，可根据射影相等的两条斜线段相等证得 $BD=DC$，再根据相等的斜线段的射影相等得到 $AB=AC$；

（2）求 B_1C 与平面 BCD 所成的线面角，只需求点 B_1 到面 BDC 的距离即可，作 $AG\perp BD$ 于 G，连 GC，$\angle AGC$ 为二面角 $A-BD-C$ 的平面角，在三角形 AGC 中求出 GC 即可.

【解答】解：如图

（I）连接 BE，∵ABC－ $A_1B_1C_1$ 为直三棱柱，

∴∠B_1BC=90°，

∵E 为 B_1C 的中点，∴BE=EC.

又 DE⊥平面 BCC_1，

∴BD=DC（射影相等的两条斜线段相等）而 DA⊥平面 ABC，

∴AB=AC（相等的斜线段的射影相等）.

（II）求 B_1C 与平面 BCD 所成的线面角，

只需求点 B_1 到面 BDC 的距离即可.

作 AG⊥BD 于 G，连 GC，

∵AB⊥AC，∴GC⊥BD，

∠AGC 为二面角 A－ BD－ C 的平面角，∠AGC=60°

不妨设$AC=2\sqrt{3}$，则 AG=2，GC=4

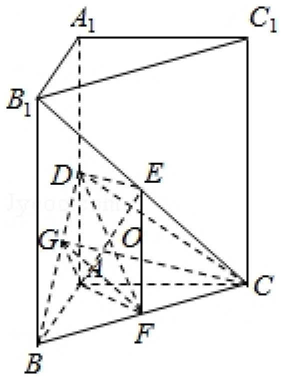
在 RT△ABD 中，由 AD•AB=BD•AG，易得$AD=\sqrt{6}$

设点 B_1 到面 BDC 的距离为 h，B_1C 与平面 BCD 所成的角为 α.

利用$\frac{1}{3}S_{\triangle B_1BC}\cdot DE=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot h$，

可求得 h=$2\sqrt{3}$，又可求得$B_1C=4\sqrt{3}$ $\sin\alpha=\frac{h}{B_1C}=\frac{1}{2}$，∴α=30°.

即 B_1C 与平面 BCD 所成的角为 30°.



【点评】本题主要考查了平面与平面之间的位置关系，考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力，属于基础题.

19．（12 分）设数列{a_n}的前 n 项和为 S_n，已知 a_1=1，$S_{n+1}=4a_n+2$（n∈N^*）.

（1）设 $b_n=a_{n+1}-2a_n$，证明数列{b_n}是等比数列；

（2）求数列$\{a_n\}$的通项公式.

【考点】87：等比数列的性质；8H：数列递推式.

【专题】15：综合题.

【分析】（1）由题设条件知 $b_1=a_2-2a_1=3$．由 $S_{n+1}=4a_n+2$ 和 $S_n=4a_{n-1}+2$ 相减得 $a_{n+1}=4a_n-4a_{n-1}$，即 $a_{n+1}-2a_n=2(a_n-2a_{n-1})$，所以 $b_n=2b_{n-1}$，由此可知$\{b_n\}$是以 $b_1=3$ 为首项、以 2 为公比的等比数列.

（2）由题设知$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{3}{4}$. 所以数列$\{\frac{a_n}{2^n}\}$是首项为$\frac{1}{2}$，公差为$\frac{3}{4}$的等差数列.

由此能求出数列$\{a_n\}$的通项公式.

【解答】解：（1）由 $a_1=1$，及 $S_{n+1}=4a_n+2$，

得 $a_1+a_2=4a_1+2$，$a_2=3a_1+2=5$，所以 $b_1=a_2-2a_1=3$.

由 $S_{n+1}=4a_n+2$，①

则当 $n\geqslant 2$ 时，有 $S_n=4a_{n-1}+2$，②

①－②得 $a_{n+1}=4a_n-4a_{n-1}$，所以 $a_{n+1}-2a_n=2(a_n-2a_{n-1})$，

又 $b_n=a_{n+1}-2a_n$，所以 $b_n=2b_{n-1}$（$b_n\neq 0$），所以$\{b_n\}$是以 $b_1=3$ 为首项、以 2 为公比的等比数列.（6 分）

（2）由（I）可得 $b_n=a_{n+1}-2a_n=3\bullet 2^{n-1}$，等式两边同时除以 2^{n+1}，得$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{3}{4}$.

所以数列$\{\frac{a_n}{2^n}\}$是首项为$\frac{1}{2}$，公差为$\frac{3}{4}$的等差数列.

所以$\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}+(n-1)\frac{3}{4}=\frac{3}{4}n-\frac{1}{4}$，即 $a_n=(3n-1)\bullet 2^{n-2}$（$n\in N^*$）．（13 分）

【点评】本题考查数列的性质和应用，解题时要掌握等比数列的证明方法，会求数列的通项公式.

20．（12 分）某车间甲组有 10 名工人，其中有 4 名女工人；乙组有 5 名工人，其中有 3 名女工人，现采用分层抽样方法（层内采用不放回简单随机抽样）从甲、乙两组中共抽取 3 名工人进行技术考核．

（Ⅰ）求从甲、乙两组各抽取的人数；

（Ⅱ）求从甲组抽取的工人中恰有 1 名女工人的概率；

（Ⅲ）记 ξ 表示抽取的 3 名工人中男工人数，求 ξ 的分布列及数学期望．

【考点】B3：分层抽样方法；CG：离散型随机变量及其分布列；CH：离散型随机变量的期望与方差．

【专题】11：计算题；48：分析法．

【分析】（Ⅰ）这一问较简单，关键是把握题意，理解分层抽样的原理即可．另外要注意此分层抽样与性别无关．

（Ⅱ）在第一问的基础上，这一问处理起来也并不困难．直接在男工里面抽取一人，在女工里面抽取一人，除以在总的里面抽取 2 人的种数即可得到答案．

（Ⅲ）求 ξ 的数学期望．因为 ξ 的可能取值为 0，1，2，3．分别求出每个取值的概率，然后根据期望公式求得结果即可得到答案．

【解答】解：（Ⅰ）因为甲组有 10 名工人，乙组有 5 名工人，从甲、乙两组中共抽取 3 名工人进行技术考核，根据分层抽样的原理可直接得到，在甲中抽取 2 名，乙中抽取 1 名．

（Ⅱ）因为由上问求得；在甲中抽取 2 名工人，

故从甲组抽取的工人中恰有 1 名女工人的概率 $P=\frac{C_4^1\cdot C_6^1}{C_{10}^2}=\frac{8}{15}$

（Ⅲ）ξ 的可能取值为 0，1，2，3

$P(\xi=0)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_3^1}{C_5^1}=\frac{6}{75}$，

$P(\xi=1)=\frac{C_4^1C_6^1}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_3^1}{C_5^1}+\frac{C_4^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_2^1}{C_5^1}=\frac{28}{75}$，

$P(\xi=3)=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_2^1}{C_5^1}=\frac{10}{75}$，

$P(\xi=2)=1-P(\xi=0)-P(\xi=1)-P(\xi=3)=\frac{31}{75}$

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{6}{75}$	$\frac{28}{75}$	$\frac{31}{75}$	$\frac{10}{75}$

故 $E\xi=0\times\frac{6}{75}+1\times\frac{28}{75}+2\times\frac{31}{75}+3\times\frac{10}{75}=\frac{8}{5}$.

【点评】本题较常规，比 08 年的概率统计题要容易．在计算 P（ξ=2）时，采用求反面的方法，用直接法也可，但较繁琐．考生应增强灵活变通的能力．

21．（12 分）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，过右焦点 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点，当 l 的斜率为 1 时，坐标原点 O 到 l 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，

（Ⅰ）求 a，b 的值；

（Ⅱ）C 上是否存在点 P，使得当 l 绕 F 转到某一位置时，有 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 成立？若存在，求出所有的 P 的坐标与 l 的方程；若不存在，说明理由．

【考点】K4：椭圆的性质．

【专题】15：综合题；16：压轴题．

【分析】（I）设 F（c，0），则直线 l 的方程为 x﹣ y﹣ c=0，由坐标原点 O 到 l 的距离求得 c，进而根据离心率求得 a 和 b．

（II）由（I）可得椭圆的方程，设 A（x_1，y_1）、B（x_2，y_2），l：x=my+1 代入椭圆的方程中整理得方程△>0．由韦达定理可求得 y_1+y_2 和 y_1y_2 的表达式，假设存在点 P，使 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 成立，则其充要条件为：点 P 的坐标为（x_1+x_2，y_1+y_2），代入椭圆方程；把 A，B 两点代入椭圆方程，最后联立方程求得 c，进而求得 P 点坐标，求出 m 的值得出直线 l 的方程．

【解答】解：（I）设 F（c，0），直线 l：x﹣ y﹣ c=0，

由坐标原点 O 到 l 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

则$\frac{|0-0-c|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得 c=1

又$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，∴$a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}$

（II）由（I）知椭圆的方程为C：$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$

设 A（x_1，y_1）、B（x_2，y_2）

由题意知 l 的斜率为一定不为 0，故不妨设 l：$x=my+1$

代入椭圆的方程中整理得（$2m^2+3$）$y^2+4my-4=0$，显然△＞0.

由韦达定理有：$y_1+y_2=-\frac{4m}{2m^2+3}$，$y_1y_2=-\frac{4}{2m^2+3}$，①

假设存在点 P，使$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$成立，则其充要条件为：

点 P 的坐标为（x_1+x_2，y_1+y_2），

点 P 在椭圆上，即$\frac{(x_1+x_2)^2}{3}+\frac{(y_1+y_2)^2}{2}=1$.

整理得 $2x_1^2+3y_1^2+2x_2^2+3y_2^2+4x_1x_2+6y_1y_2=6$.

又 A、B 在椭圆上，即 $2x_1^2+3y_1^2=6$，$2x_2^2+3y_2^2=6$、

故 $2x_1x_2+3y_1y_2+3=0$②

将 $x_1x_2=$（my_1+1）（my_2+1）$=m^2y_1y_2+m$（y_1+y_2）$+1$ 及①代入②解得$m^2=\frac{1}{2}$

∴$y_1+y_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$或$-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$x_1+x_2=-\frac{4m^2}{2m^2+3}+2=\frac{3}{2}$，即$P(\frac{3}{2},\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$

当$m=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$P(\frac{3}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2})$，l：$x=\frac{\sqrt{2}}{2}y+1$；

当$m=-\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$P(\frac{3}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2})$，l：$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}y+1$

【点评】本题主要考查了椭圆的性质．处理解析几何题，学生主要是在"算"上的功夫不够．所谓"算"，主要讲的是算理和算法．算法是解决问题采用的计算的方法，而算理是采用这种算法的依据和原因，一个是表，一个是里，一个是现象，一个是本质．有时候算理和算法并不是截然区分的．例如：三角形的面积是用底乘高的一半还是用两边与夹角的正弦的一半，还是分割成几部

分来算？在具体处理的时候，要根据具体问题及题意边做边调整，寻找合适的突破口和切入点．

22．（12 分）设函数 f（x）=x^2+aln（1+x）有两个极值点 x_1、x_2，且 $x_1 < x_2$，

（Ⅰ）求 a 的取值范围，并讨论 f（x）的单调性；

（Ⅱ）证明：f（x_2）$>\frac{1-2\ln 2}{4}$.

【考点】6B：利用导数研究函数的单调性；6D：利用导数研究函数的极值；R6：不等式的证明．

【专题】11：计算题；14：证明题；16：压轴题．

【分析】（1）先确定函数的定义域然后求导数 f′（x），令 g（x）=$2x^2+2x+a$，由题意知 x_1、x_2 是方程 g（x）=0 的两个均大于﹣1 的不相等的实根，建立不等关系解之即可，在函数的定义域内解不等式 f′（x）>0 和 f′（x）<0，求出单调区间；

（2）x_2 是方程 g（x）=0 的根，将 a 用 x_2 表示，消去 a 得到关于 x_2 的函数，研究函数的单调性求出函数的最大值，即可证得不等式．

【解答】解：（I）$f'(x)=2x+\frac{a}{1+x}=\frac{2x^2+2x+a}{1+x}(x>-1)$

令 g（x）=$2x^2+2x+a$，其对称轴为 $x=-\frac{1}{2}$.

由题意知 x_1、x_2 是方程 g（x）=0 的两个均大于﹣1 的不相等的实根，

其充要条件为$\begin{cases}\Delta=4-8a>0\\ g(-1)=a>0\end{cases}$，得 $0<a<\frac{1}{2}$

（1）当 x∈（﹣1，x_1）时，f'（x）>0，∴f（x）在（﹣1，x_1）内为增函数；

（2）当 x∈（x_1，x_2）时，f'（x）<0，∴f（x）在（x_1，x_2）内为减函数；

（3）当 x∈（x_2，+∞）时，f'（x）>0，∴f（x）在（x_2，+∞）内为增函数；

（II）由（I）g（0）=a>0，∴ $-\frac{1}{2}<x_2<0$，a=﹣（$2x_2^2+2x_2$）

∴f（x_2）=x_2^2+aln（1+x_2）=x_2^2﹣（$2x_2^2+2x_2$）ln（1+x_2）

设 $h(x)=x^2-(2x^2+2x)\ln(1+x)$，$(-\frac{1}{2}<x<0)$

则 $h'(x)=2x-2(2x+1)\ln(1+x)-2x=-2(2x+1)\ln(1+x)$

当 $x\in(-\frac{1}{2},0)$ 时，$h'(x)>0$，∴$h(x)$ 在 $[-\frac{1}{2},0)$ 单调递增，

当 $x\in(-\frac{1}{2},0)$ 时，$h(x)>h(-\frac{1}{2})=\frac{1-2\ln 2}{4}$

故 $f(x_2)=h(x_2)>\frac{1-2\ln 2}{4}$.

【点评】本题主要考查了利用导数研究函数的单调性，以及利用导数研究函数的极值等有关知识，属于中档题.