2008年全国统一高考数学试卷（理科）（全国卷Ⅱ）

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1. （5分）设集合 $M=\{m\in Z|-3<m<2\}$，$N=\{n\in Z|-1\leqslant n\leqslant 3\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A. $\{0，1\}$　　B. $\{-1，0，1\}$

C. $\{0，1，2\}$　　D. $\{-1，0，1，2\}$

2. （5分）设 a，b∈R 且 b≠0，若复数 $(a+bi)^3$ 是实数，则（　　）

A. $b^2=3a^2$　　B. $a^2=3b^2$　　C. $b^2=9a^2$　　D. $a^2=9b^2$

3. （5分）函数 $f(x)=\frac{1}{x}-x$ 的图象关于（　　）

A. y轴对称　　B. 直线 $y=-x$ 对称　　C. 坐标原点对称　　D. 直线 $y=x$ 对称

4. （5分）若 $x\in(e^{-1}，1)$，$a=\ln x$，$b=2\ln x$，$c=\ln^3 x$，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $c<a<b$　　C. $b<a<c$　　D. $b<c<a$

5. （5分）设变量 x，y 满足约束条件：$\begin{cases}y\geqslant x\\x+2y\leqslant 2\\x\geqslant -2\end{cases}$，则 $z=x-3y$ 的最小值（　　）

A. -2　　B. -4　　C. -6　　D. -8

6. （5分）从20名男同学，10名女同学中任选3名参加体能测试，则选到的3名同学中既有男同学又有女同学的概率为（　　）

A. $\frac{9}{29}$　　B. $\frac{10}{29}$　　C. $\frac{19}{29}$　　D. $\frac{20}{29}$

7. （5分）$(1-\sqrt{x})^6(1+\sqrt{x})^4$ 的展开式中 x 的系数是（　　）

A. -4　　B. -3　　C. 3　　D. 4

8. （5分）若动直线 $x=a$ 与函数 $f(x)=\sin x$ 和 $g(x)=\cos x$ 的图象分别交于 M，N 两点，则 $|MN|$ 的最大值为（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

9. （5分）设 $a>1$，则双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{(a+1)^2}=1$ 的离心率 e 的取值范围是（　　）

A. $(\sqrt{2}，2)$　　B. $(\sqrt{2}，\sqrt{5})$　　C. $(2，5)$　　D. $(2，\sqrt{5})$

10. （5 分）已知正四棱锥 S﹣ ABCD 的侧棱长与底面边长都相等，E 是 SB 的中点，则 AE、SD 所成的角的余弦值为（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

11. （5 分）等腰三角形两腰所在直线的方程分别为 x+y﹣ 2=0 与 x﹣ 7y﹣ 4=0，原点在等腰三角形的底边上，则底边所在直线的斜率为（　　）

A. 3　　B. 2　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{1}{2}$

12. （5 分）已知球的半径为 2，相互垂直的两个平面分别截球面得两个圆，若两圆的公共弦长为 2，则两圆的圆心距等于（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

二、填空题（共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分）

13. （5 分）设向量$\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(2,3)$，若向量 $\lambda\vec{a}+\vec{b}$与向量$\vec{c}=(-4,-7)$共线，则 λ=_______.

14. （5 分）设曲线 $y=e^{ax}$ 在点（0，1）处的切线与直线 x+2y+1=0 垂直，则 a=
.

15. （5 分）已知 F 是抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点，过 F 且斜率为 1 的直线交 C 于 A，B 两点．设|FA|＞|FB|，则|FA|与|FB|的比值等于_______.

16. （5 分）平面内的一个四边形为平行四边形的充要条件有多个，如两组对边分别平行，类似地，写出空间中的一个四棱柱为平行六面体的两个充要条件：

充要条件①_______；

充要条件②_______.

（写出你认为正确的两个充要条件）

三、解答题（共 6 小题，满分 70 分）

17. （10 分）在△ABC 中，cosB=﹣ $\frac{5}{13}$，cosC=$\frac{4}{5}$.

（1）求 sinA 的值

（2）设△ABC 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{33}{2}$，求 BC 的长．

18．（12 分）购买某种保险，每个投保人每年度向保险公司交纳保费 a 元，若投保人在购买保险的一年度内出险，则可以获得 10 000 元的赔偿金．假定在一年度内有 10 000 人购买了这种保险，且各投保人是否出险相互独立．已知保险公司在一年度内至少支付赔偿金 10 000 元的概率为 $1-0.999^{10^4}$．

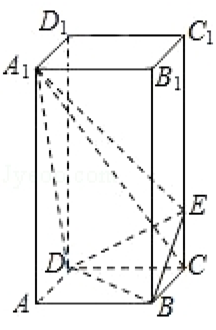
（Ⅰ）求一投保人在一年度内出险的概率 p；

（Ⅱ）设保险公司开办该项险种业务除赔偿金外的成本为 50 000 元，为保证盈利的期望不小于 0，求每位投保人应交纳的最低保费（单位：元）．

19．（12 分）如图，正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2AB=4$，点 E 在 CC_1 上且 $C_1E=3EC$．

（Ⅰ）证明：$A_1C\perp$平面 BED；

（Ⅱ）求二面角 A_1-DE-B 的大小．



20．（12 分）设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n．已知 $a_1=a$，$a_{n+1}=S_n+3^n$，$n\in N^*$．

（Ⅰ）设 $b_n=S_n-3^n$，求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）若 $a_{n+1}\geqslant a_n$，$n\in N^*$，求 a 的取值范围．

21．（12 分）设椭圆中心在坐标原点，A（2，0），B（0，1）是它的两个顶点，直线 y=kx（k＞0）与 AB 相交于点 D，与椭圆相交于 E、F 两点.

（Ⅰ）若$\overrightarrow{ED}=6\overrightarrow{DF}$，求 k 的值；

（Ⅱ）求四边形 AEBF 面积的最大值.

22．（12 分）设函数$f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}$.

（Ⅰ）求 f（x）的单调区间；

（Ⅱ）如果对任何 x≥0，都有 f（x）≤ax，求 a 的取值范围.

2008年全国统一高考数学试卷（理科）（全国卷Ⅱ）

参考答案与试题解析

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1．（5分）设集合M={m∈Z|－3＜m＜2}，N={n∈Z|－1≤n≤3}，则M∩N=（　　）

A．{0，1}　　B．{－1，0，1}

C．{0，1，2}　　D．{－1，0，1，2}

【考点】1E：交集及其运算．

【分析】由题意知集合M={m∈z|－3＜m＜2}，N={n∈z|－1≤n≤3}，然后根据交集的定义和运算法则进行计算．

【解答】解：∵M={－2，－1，0，1}，N={－1，0，1，2，3}，

∴M∩N={－1，0，1}，

故选：B．

【点评】此题主要考查集合和交集的定义及其运算法则，是一道比较基础的题．

2．（5分）设a，b∈R且b≠0，若复数$(a+bi)^3$是实数，则（　　）

A．$b^2=3a^2$　　B．$a^2=3b^2$　　C．$b^2=9a^2$　　D．$a^2=9b^2$

【考点】A5：复数的运算．

【分析】复数展开，化为a+bi（a、b∈R）的形式，虚部为0即可．

【解答】解：$(a+bi)^3=a^3+3a^2bi-3ab^2-b^3i=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i$，因是实数且b≠0，所以$3a^2b-b^3=0\Rightarrow b^2=3a^2$

故选：A．

【点评】本题考查复数的基本运算，是基础题．

3．（5分）函数 $f(x)=\frac{1}{x}-x$ 的图象关于（　　）

A．y 轴对称　　B．直线 y=﹣x 对称 C．坐标原点对称　D．直线 y=x 对称

【考点】3M：奇偶函数图象的对称性．

【分析】根据函数 f（x）的奇偶性即可得到答案．

【解答】解：∵$f(-x)=-\frac{1}{x}+x=-f(x)$

∴$f(x)=\frac{1}{x}-x$是奇函数，所以 f（x）的图象关于原点对称

故选：C．

【点评】本题主要考查函数奇偶性的性质，是高考必考题型．

4．（5分）若 $x\in(e^{-1},1)$，$a=\ln x$，$b=2\ln x$，$c=\ln^3 x$，则（　　）

A．a＜b＜c　　B．c＜a＜b　　C．b＜a＜c　　D．b＜c＜a

【考点】4M：对数值大小的比较．

【分析】根据函数的单调性，求 a 的范围，用比较法，比较 a、b 和 a、c 的大小．

【解答】解：因为 $a=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

故当 $x\in(e^{-1},1)$ 时，$a\in(-1,0)$，

于是 $b-a=2\ln x-\ln x=\ln x<0$，从而 b＜a．

又 $a-c=\ln x-\ln^3 x=a(1+a)(1-a)<0$，从而 a＜c．

综上所述，b＜a＜c．

故选：C．

【点评】对数值的大小，一般要用对数的性质，比较法，以及 0 或 1 的应用，本题是基础题．

5．（5 分）设变量 x，y 满足约束条件：$\begin{cases} y \geqslant x \\ x+2y \leqslant 2 \\ x \geqslant -2 \end{cases}$，则 z=x－3y 的最小值（　　）

A．－2　　B．－4　　C．－6　　D．－8

【考点】7C：简单线性规划．

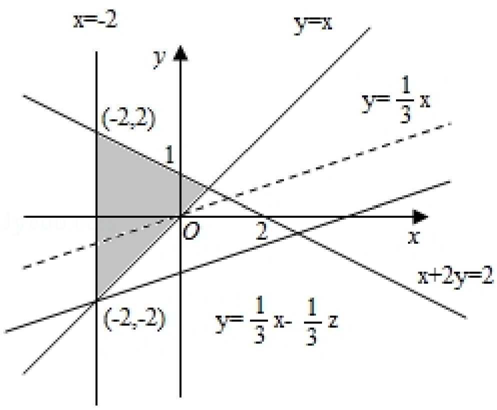
【专题】11：计算题．

【分析】我们先画出满足约束条件：$\begin{cases} y \geqslant x \\ x+2y \leqslant 2 \\ x \geqslant -2 \end{cases}$的平面区域，求出平面区域的各角点，然后将角点坐标代入目标函数，比较后，即可得到目标函数 z=x－3y 的最小值．

【解答】解：根据题意，画出可行域与目标函数线如图所示，

由图可知目标函数在点（－2，2）取最小值－8

故选：D．



【点评】用图解法解决线性规划问题时，分析题目的已知条件，找出约束条件和目标函数是关键，可先将题目中的量分类、列出表格，理清头绪，然后列出不等式组（方程组）寻求约束条件，并就题目所述找出目标函数．然后将可行域各角点的值一一代入，最后比较，即可得到目标函数的最优解．

6．（5 分）从 20 名男同学，10 名女同学中任选 3 名参加体能测试，则选到的 3 名同学中既有男同学又有女同学的概率为（　　）

A．$\frac{9}{29}$　　B．$\frac{10}{29}$　　C．$\frac{19}{29}$　　D．$\frac{20}{29}$

【考点】C6：等可能事件和等可能事件的概率.

【分析】由题意知本题是一个古典概型，试验发生的所有事件从 30 名同学中任选 3 名参加体能测试共有 C_{30}^3 种结果，而满足条件的事件是选到的 3 名同学中既有男同学又有女同学共有 $C_{20}^1C_{10}^2+C_{20}^2C_{10}^1$ 种结果．代入公式得到结果.

【解答】解：由题意知本题是一个古典概型，

∵试验发生的所有事件从 30 名同学中任选 3 名参加体能测试共有 C_{30}^3 种结果，

满足条件的事件是选到的 3 名同学中既有男同学又有女同学共有 $C_{20}^1C_{10}^2+C_{20}^2C_{10}^1$ 种结果，

∴由古典概型公式得到

$$P=\frac{C_{20}^{1}C_{10}^{2}+C_{20}^{2}C_{10}^{1}}{C_{30}^{3}}=\frac{20}{29},$$

故选：D.

【点评】本题考查的是古典概型，可以从它的对立事件来考虑，概率教学的核心问题是让学生了解随机现象与概率的意义，加强与实际生活的联系，以科学的态度评价身边的一些随机现象.

7．（5 分）$(1-\sqrt{x})^6(1+\sqrt{x})^4$ 的展开式中 x 的系数是（　　）

A．－4　　B．－3　　C．3　　D．4

【考点】DA：二项式定理.

【专题】11：计算题.

【分析】展开式中 x 的系数由三部分和组成：$(1-\sqrt{x})^6$ 的常数项与 $(1+\sqrt{x})^4$ 展开式的 x 的系数积；$(1-\sqrt{x})^6$ 的展开式的 x 的系数与 $(1+\sqrt{x})^4$ 的常数项的积；$(1-\sqrt{x})^6$ 的 $\sqrt{x}$ 的系数与 $(1+\sqrt{x})^4$ 的 $\sqrt{x}$ 的系数积．利用二项展开式的通项求得各项系数.

【解答】解：$(1-\sqrt{x})^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r(-\sqrt{x})^r=(-1)^rC_6^rx^{\frac{r}{2}}$

∴ $(1-\sqrt{x})^6$展开式中常数项为 C_6^0，含 x 的项的系数为 C_6^2，含$\sqrt{x}$的项的系数为 $-C_6^1$

$(1+\sqrt{x})^4$的展开式的通项为$T_{r+1}=C_4^r(\sqrt{x})^r$

∴ $(1+\sqrt{x})^4$的展开式中的 x 的系数为 C_4^2，常数项为 C_4^0，含$\sqrt{x}$的项的系数为 C_4^1

故$(1-\sqrt{x})^6(1+\sqrt{x})^4$的展开式中 x 的系数是

$C_6^0C_4^2+C_6^2C_4^0-C_6^1C_4^1=6+15-24=-3$

故选：B．

【点评】本题考查二项展开式的通项公式是解决二项展开式的特定项问题的工具．

8．（5 分）若动直线 x=a 与函数 f（x）=sinx 和 g（x）=cosx 的图象分别交于 M，N 两点，则|MN|的最大值为（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

【考点】H2：正弦函数的图象；H7：余弦函数的图象．

【分析】可令 F（x）=|sinx－cosx|求其最大值即可．

【解答】解：由题意知：f（x）=sinx、g（x）=cosx

令 F（x）=|sinx－cosx|=$\sqrt{2}$|sin（x－$\frac{\pi}{4}$）|

当 x－$\frac{\pi}{4}$=$\frac{\pi}{2}$+kπ，x=$\frac{3\pi}{4}$+kπ，即当 a=$\frac{3\pi}{4}$+kπ 时，函数 F（x）取到最大值$\sqrt{2}$

故选：B．

【点评】本题主要考查三角函数的图象和函数解析式的关系．属基础题．

9．（5 分）设 a＞1，则双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{(a+1)^2}=1$的离心率 e 的取值范围是（　　）

A．$(\sqrt{2},2)$　　B．$(\sqrt{2},\sqrt{5})$　　C．（2，5）　　D．$(2,\sqrt{5})$

【考点】KC：双曲线的性质．

【专题】11：计算题．

【分析】根据题设条件可知：$e^2=(\frac{c}{a})^2=\frac{a^2+(a+1)^2}{a^2}=1+(1+\frac{1}{a})^2$，然后由实数 a 的取值范围可以求出离心率 e 的取值范围．

【解答】解：$e^2=(\frac{c}{a})^2=\frac{a^2+(a+1)^2}{a^2}=1+(1+\frac{1}{a})^2$，

因为$\frac{1}{a}$是减函数，所以当 a＞1 时 $0<\frac{1}{a}<1$，

所以 $2<e^2<5$，即$\sqrt{2}<e<\sqrt{5}$，

故选：B．

【点评】本题的高考考点是解析几何与函数的交汇点，解题时要注意双曲线性质的灵活运用．

10．（5 分）已知正四棱锥 S﹣ABCD 的侧棱长与底面边长都相等，E 是 SB 的中点，则 AE、SD 所成的角的余弦值为（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{2}{3}$

【考点】LM：异面直线及其所成的角．

【专题】11：计算题；35：转化思想．

【分析】由于是正方体，又是求角问题，所以易选用向量量，所以建立如图所示坐标系，先求得相关点的坐标，进而求得相关向量的坐标，最后用向量夹角公式求解．

【解答】解：建立如图所示坐标系，

令正四棱锥的棱长为 2，则 A（1，﹣1，0），D（﹣1，﹣1，0），

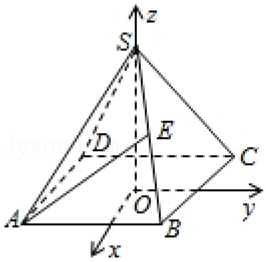
S（0，0，$\sqrt{2}$），E$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，

$\overrightarrow{AE}=(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，

$\overrightarrow{SD}=(-1,-1,-\sqrt{2})$

∴$\cos<\overrightarrow{AE},\overrightarrow{SD}>=\frac{\sqrt{3}}{3}$

故选：C.



【点评】本题主要考查多面体的结构特征和空间角的求法，同时，还考查了转化思想和运算能力，属中档题.

11．（5 分）等腰三角形两腰所在直线的方程分别为 x+y－ 2=0 与 x－ 7y－ 4=0，原点在等腰三角形的底边上，则底边所在直线的斜率为（　　）

A．3　　B．2　　C．$-\frac{1}{3}$　　D．$-\frac{1}{2}$

【考点】IQ：与直线关于点、直线对称的直线方程.

【专题】16：压轴题.

【分析】利用原点在等腰三角形的底边上，可设底边方程 y=kx，用到角公式，再借助草图，选项判定结果即可.

【解答】解：l_1：x+y－ 2=0，k_1=－ 1，l_2：$x-7y-4=0$，$k_2=\frac{1}{7}$，设底边为 l_3：y=kx

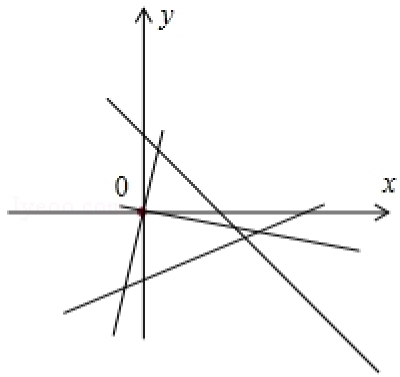
由题意，l_3 到 l_1 所成的角等于 l_2 到 l_3 所成的角于是有

$\frac{k_1-k}{1+k_1k}=\frac{k-k_2}{1+k_2k}\Rightarrow\frac{k+1}{k-1}=\frac{7k-1}{7+k}$，解得 k=3 或 k=－ $\frac{1}{3}$，

因为原点在等腰三角形的底边上，所以 k=3.

k=$-\frac{1}{3}$，原点不在等腰三角形的底边上（舍去），

故选：A.



【点评】两直线成角的概念及公式；本题是由教材的一个例题改编而成．（人教版 P49 例 7）解题过程值得学习．

12．（5 分）已知球的半径为 2，相互垂直的两个平面分别截球面得两个圆，若两圆的公共弦长为 2，则两圆的圆心距等于（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

【考点】LG：球的体积和表面积．

【专题】11：计算题；5F：空间位置关系与距离．

【分析】求解本题，可以从三个圆心上找关系，构建矩形利用对角线相等即可求解出答案．

【解答】解：设两圆的圆心分别为 O_1、O_2，球心为 O，公共弦为 AB，其中点为 E，则 OO_1EO_2 为矩形，

于是对角线 $O_1O_2=OE$，而 $OE=\sqrt{OA^2-AE^2}=\sqrt{3}$，

$\therefore O_1O_2=\sqrt{3}$

故选：C．

【点评】本题考查球的有关概念，两平面垂直的性质，是基础题．

二、填空题（共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分）

13．（5 分）设向量$\vec{a}=(1，2)$，$\vec{b}=(2，3)$，若向量 $\lambda\vec{a}+\vec{b}$与向量$\vec{c}=(-4，-7)$共线，则 λ=__2__．

【考点】96：平行向量（共线）．

【分析】用向量共线的充要条件：它们的坐标交叉相乘相等列方程解.

【解答】解：∵a=（1，2），b=（2，3），

∴λa+b=（λ，2λ）+（2，3）=（λ+2，2λ+3）.

∵向量 λa+b 与向量 c=（﹣4，﹣7）共线，

∴﹣7（λ+2）+4（2λ+3）=0，

∴λ=2.

故答案为 2

【点评】考查两向量共线的充要条件.

14．（5 分）设曲线 $y=e^{ax}$ 在点（0，1）处的切线与直线 x+2y+1=0 垂直，则 a=__2__.

【考点】6H：利用导数研究曲线上某点切线方程.

【专题】11：计算题.

【分析】根据导数的几何意义求出函数 f（x）在 x=0 处的导数，从而求出切线的斜率，再根据两直线垂直建立等式关系，解之即可.

【解答】解：∵$y=e^{ax}$∴$y'=ae^{ax}$

∴曲线 $y=e^{ax}$ 在点（0，1）处的切线方程是 y﹣1=a（x﹣0），即 ax﹣y+1=0

∵直线 ax﹣y+1=0 与直线 x+2y+1=0 垂直

∴$-\frac{1}{2}a=-1$，即 a=2.

故答案为：2

【点评】本题主要考查了利用导数研究曲线上某点切线方程，以及两直线垂直的应用等有关问题，属于基础题.

15．（5 分）已知 F 是抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点，过 F 且斜率为 1 的直线交 C 于 A，B 两点．设|FA|>|FB|，则|FA|与|FB|的比值等于__$3+2\sqrt{2}$__.

【考点】K8：抛物线的性质.

【专题】11：计算题；16：压轴题．

【分析】先设点 A，B 的坐标，求出直线方程后与抛物线方程联立消去 y 得到关于 x 的一元二次方程，求出两根，再由抛物线的定义得到答案．

【解答】解：设 A（x_1，y_1）B（x_2，y_2）

由$\begin{cases} y=x-1 \\ y^2=4x \end{cases} \Rightarrow x^2-6x+1=0 \Rightarrow x_1=3+2\sqrt{2}$，$x_2=3-2\sqrt{2}$，（$x_1>x_2$）

∴由抛物线的定义知$\frac{|FA|}{|FB|}=\frac{x_1+1}{x_2+1}=\frac{4+2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$

故答案为：$3+2\sqrt{2}$

【点评】本题主要考查直线与抛物线的位置关系，抛物线定义的应用

16．（5 分）平面内的一个四边形为平行四边形的充要条件有多个，如两组对边分别平行，类似地，写出空间中的一个四棱柱为平行六面体的两个充要条件：

充要条件①<u>　三组对面分别平行的四棱柱为平行六面体　</u>；

充要条件②<u>　平行六面体的对角线交于一点，并且在交点处互相平分；　</u>．

（写出你认为正确的两个充要条件）

【考点】29：充分条件、必要条件、充要条件；L2：棱柱的结构特征．

【专题】16：压轴题；21：阅读型．

【分析】本题考查的知识点是充要条件的定义及棱柱的结构特征及类比推理，由平行六面体与平行四边形的定义相似，故我们可以类比平行四边形的性质，类比推断平行六面体的性质．

【解答】解：类比平行四边形的性质：两组对边分别平行的四边形为平行四边形，

则我们类比得到：三组对面分别平行的四棱柱为平行六面体．

类比平行四边形的性质：两条对角线互相平分，

则我们类比得到：平行六面体的对角线交于一点，并且在交点处互相平分；

故答案为：三组对面分别平行的四棱柱为平行六面体；平行六面体的对角线交于一点，并且在交点处互相平分；

【点评】类比推理的一般步骤是：（1）找出两类事物之间的相似性或一致性；（2）用一类事物的性质去推测另一类事物的性质，得出一个明确的命题（猜想）．

三、解答题（共 6 小题，满分 70 分）

17．（10 分）在△ABC 中，$\cos B=-\frac{5}{13}$，$\cos C=\frac{4}{5}$．

（1）求 sinA 的值

（2）设△ABC 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{33}{2}$，求 BC 的长．

【考点】HT：三角形中的几何计算．

【专题】11：计算题．

【分析】（Ⅰ）由 cosB，cosC 分别求得 sinB 和 sinC，再通过 sinA=sin（B+C），利用两角和公式，进而求得 sinA．

（Ⅱ）由三角形的面积公式及（1）中的 sinA，求得 AB•AC 的值，再利用正弦定理求得 AB，再利用正弦定理进而求得 BC．

【解答】解：（Ⅰ）由$\cos B=-\frac{5}{13}$，得$\sin B=\frac{12}{13}$，

由$\cos C=\frac{4}{5}$，得$\sin C=\frac{3}{5}$．

所以$\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\frac{33}{65}$．

（Ⅱ）由$S_{\triangle ABC}=\frac{33}{2}$得$\frac{1}{2}\times AB\times AC\times \sin A=\frac{33}{2}$，

由（Ⅰ）知$\sin A=\frac{33}{65}$，

故 AB×AC=65，

又$AC=\frac{AB\times \sin B}{\sin C}=\frac{20}{13}AB$，

故$\frac{20}{13}AB^2=65$，$AB=\frac{13}{2}$．

所以$BC=\frac{AB\times \sin A}{\sin C}=\frac{11}{2}$．

【点评】本题主要考查了正弦定理及三角形的面积公式在解三角形中的应用．属基础题．

18．（12 分）购买某种保险，每个投保人每年度向保险公司交纳保费 a 元，若投保人在购买保险的一年度内出险，则可以获得 10 000 元的赔偿金．假定在一年度内有 10 000 人购买了这种保险，且各投保人是否出险相互独立．已知保险公司在一年度内至少支付赔偿金 10 000 元的概率为 $1-0.999^{10^4}$.

（Ⅰ）求一投保人在一年度内出险的概率 p；

（Ⅱ）设保险公司开办该项险种业务除赔偿金外的成本为 50 000 元，为保证盈利的期望不小于 0，求每位投保人应交纳的最低保费（单位：元）．

【考点】C8：相互独立事件和相互独立事件的概率乘法公式；CH：离散型随机变量的期望与方差．

【专题】11：计算题．

【分析】（1）由题意知各投保人是否出险互相独立，且出险的概率都是 p，记投保的 10000 人中出险的人数为 ξ，由题意知 ξ 服从二项分布一投保人在一年度内出险的对立事件是没有一个人出险．

（2）写出本险种的收入和支出，表示出它的盈利期望，根据为保证盈利的期望不小于 0，列出不等式，解出每位投保人应交纳的最低保费．

【解答】解：由题意知

各投保人是否出险互相独立，且出险的概率都是 p，

记投保的 10000 人中出险的人数为 ξ，

由题意知 $\xi \sim B(10^4, p)$．

（Ⅰ）记 A 表示事件：保险公司为该险种至少支付 10000 元赔偿金，

则 $\overline{A}$ 发生当且仅当 ξ=0，

$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\xi=0)=1-(1-p)^{104}$，

又 $P(A)=1-0.999^{104}$，

故 p=0.001．

（Ⅱ）该险种总收入为 10000a 元，支出是赔偿金总额与成本的和．

支出 10000ξ+50000，

盈利 $\eta=10000a-(10000\xi+50000)$，

盈利的期望为 $E\eta=10000a-10000E\xi-50000$，

由 $\xi \sim B(10^4, 10^{-3})$ 知，

$E\xi=10000\times 10^{-3}$，

$E\eta=10^4a-10^4E\xi-5\times 10^4=10^4a-10^4\times 10^4\times 10^{-3}-5\times 10^4$.

$E\eta\geqslant 0\Leftrightarrow 10^4a-10^4\times 10-5\times 10^4\geqslant 0\Leftrightarrow a-10-5\geqslant 0\Leftrightarrow a\geqslant 15$（元）.

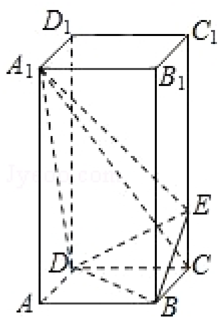
∴每位投保人应交纳的最低保费为 15 元.

【点评】解决离散型随机变量分布列问题时，主要依据概率的有关概念和运算，同时还要注意题目中离散型随机变量服从什么分布，若服从特殊的分布则运算要简单的多.

19．（12 分）如图，正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2AB=4$，点 E 在 CC_1 上且 $C_1E=3EC$.

（Ⅰ）证明：$A_1C\perp$平面 BED；

（Ⅱ）求二面角 A_1-DE-B 的大小.



【考点】LW：直线与平面垂直；MJ：二面角的平面角及求法.

【专题】14：证明题；15：综合题；35：转化思想.

【分析】法一：（Ⅰ）要证 $A_1C\perp$平面 BED，只需证明 A_1C 与平面 BED 内两条相交直线 BD，EF 都垂直；

（Ⅱ）作 $GH\perp DE$，垂足为 H，连接 A_1H，说明$\angle A_1HG$ 是二面角 A_1-DE-B 的平

面角，然后解三角形，求二面角 A_1-DE-B 的大小．

法二：建立空间直角坐标系，（Ⅰ）求出 $\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{DB}=0$，$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{DE}=0$，证明 $A_1C\perp$ 平面 DBE．

（Ⅱ）求出 平面 DA_1E 和平面 DEB 的法向量，求二者的数量积可求二面角 A_1-DE-B 的大小．

【解答】解：解法一：

依题设知 AB=2，CE=1．

（Ⅰ）连接 AC 交 BD 于点 F，则 BD⊥AC．

由三垂线定理知，$BD\perp A_1C$．（3 分）

在平面 A_1CA 内，连接 EF 交 A_1C 于点 G，

由于$\frac{AA_1}{FC}=\frac{AC}{CE}=2\sqrt{2}$，

故 $Rt\triangle A_1AC\backsim Rt\triangle FCE$，$\angle AA_1C=\angle CFE$，$\angle CFE$ 与 $\angle FCA_1$ 互余．

于是 $A_1C\perp EF$．A_1C 与平面 BED 内两条相交直线 BD，EF 都垂直，

所以 $A_1C\perp$ 平面 BED．（6 分）

（Ⅱ）作 GH⊥DE，垂足为 H，连接 A_1H．由三垂线定理知 $A_1H\perp DE$，

故$\angle A_1HG$ 是二面角 A_1-DE-B 的平面角．（8 分）

$EF=\sqrt{CF^2+CE^2}=\sqrt{3}$，　$CG=\frac{CE\times CF}{EF}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，　$EG=\sqrt{CE^2-CG^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$．　$\frac{EG}{EF}=\frac{1}{3}$，

$GH=\frac{1}{3}\times\frac{EF\times FD}{DE}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$．

又 $A_1C=\sqrt{AA_1^2+AC^2}=2\sqrt{6}$，$A_1G=A_1C-CG=\frac{5\sqrt{6}}{3}$．$\tan\angle A_1HG=\frac{A_1G}{HG}=5\sqrt{5}$．

所以二面角 A_1-DE-B 的大小为$\arctan 5\sqrt{5}$．（（12 分））

解法二：

以 D 为坐标原点，射线 DA 为 x 轴的正半轴，

建立如图所示直角坐标系 D﹣xyz．

依题设，B（2，2，0），C（0，2，0），E（0，2，1），A_1（2，0，4）．

$\overrightarrow{DE}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{A_1C}=(-2,2,-4)$，$\overrightarrow{DA_1}=(2,0,4)$．（3 分）

（Ⅰ）因为$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{DB}=0$，$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{DE}=0$，

故 $A_1C\perp BD$，$A_1C\perp DE$.

又 $DB\cap DE=D$，

所以 $A_1C\perp$平面 DBE．（6 分）

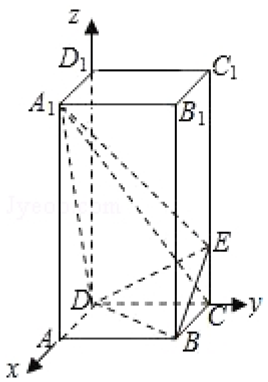
（Ⅱ）设向量$\overrightarrow{n}=$（x，y，z）是平面 DA_1E 的法向量，则$n\perp\overrightarrow{DE}$，$n\perp\overrightarrow{DA_1}$．

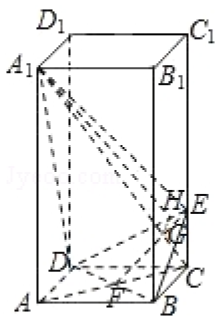
故 $2y+z=0$，$2x+4z=0$.

令 y=1，则 z=﹣ 2，x=4，$\overrightarrow{n}=$（4，1，﹣ 2）．（9 分）$<\overrightarrow{n}，\overrightarrow{A_1C}>$等于二面角

A_1﹣ DE﹣ B 的平面角，$\cos<\overrightarrow{n}，\overrightarrow{A_1C}>=\dfrac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}}{|\overrightarrow{n}||\overrightarrow{A_1C}|}=\dfrac{\sqrt{14}}{42}$

所以二面角 A_1﹣ DE﹣ B 的大小为$\arccos\dfrac{\sqrt{14}}{42}$．（12 分）





【点评】本题考查直线与平面垂直的判定，二面角的求法，考查空间想象能力，逻辑思维能力，是中档题．

20．（12 分）设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n．已知 $a_1=a$，$a_{n+1}=S_n+3^n$，$n\in N^*$．

（Ⅰ）设 $b_n=S_n-3^n$，求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）若 $a_{n+1}\geqslant a_n$，$n\in N^*$，求 a 的取值范围．

【考点】81：数列的概念及简单表示法；8H：数列递推式．

【专题】11：计算题；16：压轴题．

【分析】（Ⅰ）依题意得 $S_{n+1}=2S_n+3^n$，由此可知 $S_{n+1}-3^{n+1}=2(S_n-3^n)$．所以 $b_n=S_n-3^n=(a-3)2^{n-1}$，$n\in N^*$．

（Ⅱ）由题设条件知 $S_n=3^n+(a-3)2^{n-1}$，$n\in N^*$，于是，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n-2}[12\cdot(\frac{3}{2})^{n-2}+a-3]$，由此可以求得 a 的取值范围是 $[-9,+\infty)$．

【解答】解：（Ⅰ）依题意，$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}=S_n+3^n$，即 $S_{n+1}=2S_n+3^n$，

由此得 $S_{n+1}-3^{n+1}=2S_n+3^n-3^{n+1}=2(S_n-3^n)$．（4 分）

因此，所求通项公式为 $b_n=S_n-3^n=(a-3)2^{n-1}$，$n\in N^*$．①（6 分）

（Ⅱ）由①知 $S_n=3^n+(a-3)2^{n-1}$，$n\in N^*$，

于是，当 $n\geqslant 2$ 时，

$a_n=S_n-S_{n-1}=3^n+(a-3)\times 2^{n-1}-3^{n-1}-(a-3)\times 2^{n-2}=2\times 3^{n-1}+(a-3)2^{n-2}$，

$a_{n+1}-a_n=4\times 3^{n-1}+(a-3)2^{n-2}=2^{n-2}[12\cdot(\frac{3}{2})^{n-2}+a-3]$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_{n+1}\geqslant a_n\Leftrightarrow 12\cdot(\frac{3}{2})^{n-2}+a-3\geqslant 0\Leftrightarrow a\geqslant -9$．

又 $a_2=a_1+3>a_1$．

综上，所求的 a 的取值范围是 $[-9,+\infty)$．（12 分）

【点评】本题考查数列的综合运用，解题时要仔细审题，注意挖掘题设中的隐含条件．

21．（12 分）设椭圆中心在坐标原点，A（2，0），B（0，1）是它的两个顶点，直线 $y=kx$（$k>0$）与 AB 相交于点 D，与椭圆相交于 E、F 两点．

（Ⅰ）若 $\overrightarrow{ED}=6\overrightarrow{DF}$，求 k 的值；

（Ⅱ）求四边形 AEBF 面积的最大值．

【考点】96：平行向量（共线）；KH：直线与圆锥曲线的综合．

【专题】11：计算题；16：压轴题．

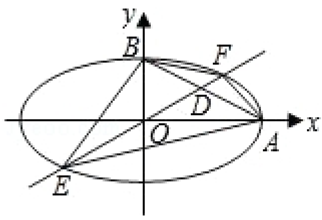
【分析】（1）依题可得椭圆的方程，设直线 AB，EF 的方程分别为 $x+2y=2$，$y=kx$，$D(x_0,kx_0)$，$E(x_1,kx_1)$，$F(x_2,kx_2)$，且 x_1，x_2 满足方程 $(1+4k^2)x^2=4$，进而求得 x_2 的表达式，进而根据 $\overrightarrow{ED}=6\overrightarrow{DF}$ 求得 x_0 的表达式，由 D 在 AB 上知 $x_0+2kx_0=2$，进而求得 x_0 的另一个表达式，两个表达式相等求得 k．

（Ⅱ）由题设可知 $|BO|$ 和 $|AO|$ 的值，设 $y_1=kx_1$，$y_2=kx_2$，进而可表示出四边形 AEBF 的面积进而根据基本不等式的性质求得最大值．

【解答】解：（Ⅰ）依题设得椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，

直线 AB，EF 的方程分别为 $x+2y=2$，$y=kx\ (k>0)$．

如图，设 $D(x_0,kx_0)$，$E(x_1,kx_1)$，$F(x_2,kx_2)$，其中 $x_1<x_2$，



且 x_1，x_2 满足方程 $(1+4k^2)x^2=4$，

故 $x_2=-x_1=\frac{2}{\sqrt{1+4k^2}}$．①

由 $\overrightarrow{ED}=6\overrightarrow{DF}$ 知 $x_0-x_1=6(x_2-x_0)$，得 $x_0=\frac{1}{7}(6x_2+x_1)=\frac{5}{7}x_2=\frac{10}{7\sqrt{1+4k^2}}$；

由 D 在 AB 上知 $x_0+2kx_0=2$，得 $x_0=\frac{2}{1+2k}$．

所以 $\frac{2}{1+2k}=\frac{10}{7\sqrt{1+4k^2}}$，

化简得 $24k^2-25k+6=0$，

解得 $k=\frac{2}{3}$ 或 $k=\frac{3}{8}$．

（Ⅱ）由题设，$|BO|=1$，$|AO|=2$．由（Ⅰ）知，$E(x_1,kx_1)$，$F(x_2,kx_2)$，不妨设 $y_1=kx_1$，$y_2=kx_2$，由①得 $x_2>0$，根据 E 与 F 关于原点对称可知 $y_2=-y_1>0$

，

故四边形 AEBF 的面积为 $S=S_{\triangle OBE}+S_{\triangle OBF}+S_{\triangle OAE}+S_{\triangle OAF}$

$=\frac{1}{2}|OB|\cdot(-x_1)+\frac{1}{2}|OB|\cdot x_2+\frac{1}{2}|OA|\cdot y_2+\frac{1}{2}|OA|\cdot(-y_1)$

$=\frac{1}{2}|OB|(x_2-x_1)+\frac{1}{2}|OA|(y_2-y_1)$

$=x_2+2y_2$

$=\sqrt{(x_2+2y_2)^2}=\sqrt{x_2^2+4y_2^2+4x_2y_2}\leqslant\sqrt{2(x_2^2+4y_2^2)}=2\sqrt{2}$，

当 $x_2=2y_2$ 时，上式取等号．所以 S 的最大值为 $2\sqrt{2}$.

【点评】本题主要考查了直线与圆锥曲线的综合问题．直线与圆锥曲线的综合问题是支撑圆锥曲线知识体系的重点内容，问题的解决具有入口宽、方法灵活多样等，而不同的解题途径其运算量繁简差别很大．

22．（12 分）设函数 $f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}$.

（Ⅰ）求 f（x）的单调区间；

（Ⅱ）如果对任何 x≥0，都有 f（x）≤ax，求 a 的取值范围．

【考点】3R：函数恒成立问题；6B：利用导数研究函数的单调性．

【专题】11：计算题；16：压轴题．

【分析】（1）先确定函数的定义域然后求导数 f′（x），在函数的定义域内解不等式 f′（x）＞0 和 f′（x）＜0，求出单调区间．

（2）令 g（x）=ax- f（x），根据导数研究单调性的方法，即转化成研究对任何 x≥0，都有 g（x）≥0 恒成立，再利用分类讨论的方法求出 a 的范围．

【解答】解：（Ⅰ）$f'(x)=\frac{(2+\cos x)\cos x-\sin x(-\sin x)}{(2+\cos x)^2}=\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$．（2 分）

当 $2k\pi-\frac{2\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{2\pi}{3}$（k∈Z）时，$\cos x>-\frac{1}{2}$，即 f'（x）＞0；

当 $2k\pi+\frac{2\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{4\pi}{3}$（k∈Z）时，$\cos x<-\frac{1}{2}$，即 f'（x）＜0．

因此 f（x）在每一个区间 $(2k\pi-\frac{2\pi}{3},\ 2k\pi+\frac{2\pi}{3})$（k∈Z）是增函数，f（x）在每一个区间 $(2k\pi+\frac{2\pi}{3},\ 2k\pi+\frac{4\pi}{3})$（k∈Z）是减函数．（6 分）

（Ⅱ）令 g（x）=ax﹣ f（x），则$g'(x)=a-\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}=a-\frac{2}{2+\cos x}+\frac{3}{(2+\cos x)^2}=$

$3(\frac{1}{2+\cos x}-\frac{1}{3})^2+a-\frac{1}{3}$.

故当$a\geqslant\frac{1}{3}$时，g'（x）≥0.

又 g（0）=0，所以当 x≥0 时，g（x）≥g（0）=0，即 f（x）≤ax．（9 分）

当$0<a<\frac{1}{3}$时，令 h（x）=sinx﹣ 3ax，则 h'（x）=cosx﹣ 3a．

故当 x∈[0，arccos3a）时，h'（x）>0．

因此 h（x）在[0，arccos3a）上单调增加．

故当 x∈（0，arccos3a）时，h（x）>h（0）=0，

即 sinx>3ax．

于是，当 x∈（0，arccos3a）时，$f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}>\frac{\sin x}{3}>ax$.

当 a≤0 时，有$f(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}>0\geqslant a\cdot\frac{\pi}{2}$.

因此，a 的取值范围是$[\frac{1}{3},+\infty)$．（12 分）

【点评】本小题主要考查函数的导数、单调性、不等式等基础知识，考查综合利用数学知识分析问题、解决问题的能力．