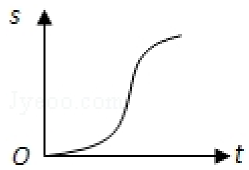
2008 年全国统一高考数学试卷（理科）（全国卷 I ）

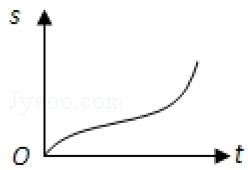
一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分）

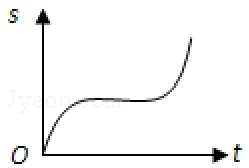
1．（5 分）函数 $y=\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x}$的定义域为（　　）

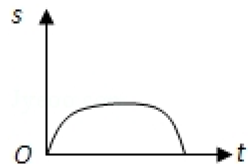
A．$\{x|x\geqslant 0\}$　　B．$\{x|x\geqslant 1\}$　　C．$\{x|x\geqslant 1\}\cup\{0\}$　D．$\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$

2．（5 分）汽车经过启动、加速行驶、匀速行驶、减速行驶之后停车，若把这一过程中汽车的行驶路程 s 看作时间 t 的函数，其图象可能是（　　）

A．

B．

C．

D．

3．（5 分）在△ABC 中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{c}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{b}$．若点 D 满足$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，则$\overrightarrow{AD}=$（　　）

A．$\frac{2}{3}\overrightarrow{b}+\frac{1}{3}\overrightarrow{c}$　　B．$\frac{5}{3}\overrightarrow{c}-\frac{2}{3}\overrightarrow{b}$　　C．$\frac{2}{3}\overrightarrow{b}-\frac{1}{3}\overrightarrow{c}$　　D．$\frac{1}{3}\overrightarrow{b}+\frac{2}{3}\overrightarrow{c}$

4．（5 分）设 a∈R，且（a+i）^{2}i 为正实数，则 a=（　　）

A．2　　B．1　　C．0　　D．﹣1

5．（5 分）已知等差数列$\{a_n\}$满足 $a_2+a_4=4$，$a_3+a_5=10$，则它的前 10 项的和 $S_{10}=$（　　）

A．138　　B．135　　C．95　　D．23

6．（5 分）若函数 y=f（x）的图象与函数 $y=\ln\sqrt{x}+1$的图象关于直线 y=x 对称，则 f（x）=（　　）

A．e^{2x-2}　　B．e^{2x}　　C．e^{2x+1}　　D．e^{2x+2}

7．（5 分）已知曲线 $y=\frac{x+1}{x-1}$在点（3，2）处的切线与直线 ax+y+1=0 垂直，则 a 的值为（　　）

A．2　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．﹣2

8．（5 分）为得到函数$y=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$的图象，只需将函数 y=sin2x 的图象（　　）

A．向左平移$\frac{5\pi}{12}$个长度单位　　　　B．向右平移$\frac{5\pi}{12}$个长度单位

C．向左平移$\frac{5\pi}{6}$个长度单位　　　　D．向右平移$\frac{5\pi}{6}$个长度单位

9．（5 分）设奇函数 f（x）在（0，+∞）上为增函数，且 f（1）=0，则不等式$\frac{f(x)-f(-x)}{x}<0$的解集为（　　）

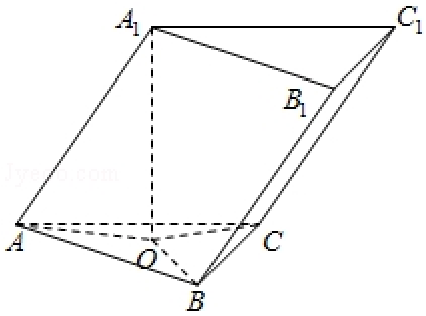
A．（﹣1，0）∪（1，+∞）　　B．（﹣∞，﹣1）∪（0，1）

C．（﹣∞，﹣1）∪（1，+∞）　　D．（﹣1，0）∪（0，1）

10．（5 分）若直线$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$与圆 $x^2+y^2=1$ 有公共点，则（　　）

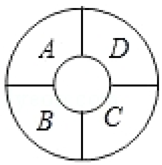
A．$a^2+b^2\leqslant 1$　　B．$a^2+b^2\geqslant 1$　　C．$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\leqslant 1$　　D．$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant 1$

11．（5 分）已知三棱柱 ABC﹣$A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面边长都相等，A_1 在底面 ABC 内的射影为△ABC 的中心，则 AB_1 与底面 ABC 所成角的正弦值等于（　　）



A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{2}{3}$

12．（5 分）如图，一环形花坛分成 A，B，C，D 四块，现有 4 种不同的花供选种，要求在每块里种 1 种花，且相邻的 2 块种不同的花，则不同的种法总数为（　　）



A．96　　B．84　　C．60　　D．48

二、填空题（共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分）

13．（5 分）若 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x+y\geqslant 0\\x-y+3\geqslant 0\\0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$，则 z=2x﹣ y 的最大值为________.

14．（5 分）已知抛物线 $y=ax^2-1$ 的焦点是坐标原点，则以抛物线与两坐标轴的三个交点为顶点的三角形面积为________.

15．（5 分）在△ABC 中，AB=BC，$\cos B=-\frac{7}{18}$．若以 A，B 为焦点的椭圆经过点 C，则该椭圆的离心率 e=________.

16．（5 分）等边三角形 ABC 与正方形 ABDE 有一公共边 AB，二面角 C﹣ AB﹣ D 的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，M，N 分别是 AC，BC 的中点，则 EM，AN 所成角的余弦值等于________.

三、解答题（共 6 小题，满分 70 分）

17．（10 分）设△ABC 的内角 A，B，C 所对的边长分别为 a，b，c，且 $a\cos B-b\cos A=\frac{3}{5}c$.

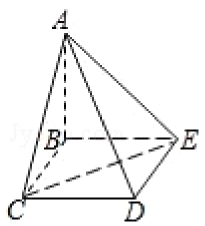
（Ⅰ）求$\frac{\tan A}{\tan B}$的值；

（Ⅱ）求 tan（A﹣ B）的最大值.

18．（12 分）四棱锥 A﹣ BCDE 中，底面 BCDE 为矩形，侧面 ABC⊥底面 BCDE，BC=2，$CD=\sqrt{2}$，AB=AC.

（Ⅰ）证明：AD⊥CE；

（Ⅱ）设 CE 与平面 ABE 所成的角为 45°，求二面角 C﹣ AD﹣ E 的大小.



19．（12 分）已知函数 f（x）=﹣ x^2+ax+1﹣ lnx．

（Ⅰ）当 a=3 时，求函数 f（x）的单调递增区间；

（Ⅱ）若 f（x）在区间（0，$\frac{1}{2}$）上是减函数，求实数 a 的取值范围．

20．（12 分）已知 5 只动物中有 1 只患有某种疾病，需要通过化验血液来确定患病的动物．血液化验结果呈阳性的即为患病动物，呈阴性即没患病．下面是两种化验方法：

方案甲：逐个化验，直到能确定患病动物为止．

方案乙：先任取 3 只，将它们的血液混在一起化验．若结果呈阳性则表明患病动物为这 3 只中的 1 只，然后再逐个化验，直到能确定患病动物为止；若结果呈阴性则在另外 2 只中任取 1 只化验．

（Ⅰ）求依方案甲所需化验次数不少于依方案乙所需化验次数的概率；

（Ⅱ）ξ 表示依方案乙所需化验次数，求 ξ 的期望．

21．（12 分）双曲线的中心为原点 O，焦点在 x 轴上，两条渐近线分别为 l_1，l_2，经过右焦点 F 垂直于 l_1 的直线分别交 l_1，l_2 于 A，B 两点．已知$|\overrightarrow{OA}|$、$|\overrightarrow{AB}|$、$|\overrightarrow{OB}|$成等差数列，且$\overrightarrow{BF}$与$\overrightarrow{FA}$同向．

（Ⅰ）求双曲线的离心率；

（Ⅱ）设 AB 被双曲线所截得的线段的长为 4，求双曲线的方程．

22．（12 分）设函数 f（x）=x﹣ xlnx．数列$\{a_n\}$满足 $0<a_1<1$，$a_{n+1}=f(a_n)$．

（Ⅰ）证明：函数 f（x）在区间（0，1）是增函数；

（Ⅱ）证明：$a_n<a_{n+1}<1$；

（Ⅲ）设 b∈（a_1，1），整数$k\geqslant\frac{a_1-b}{a_1\ln b}$．证明：$a_{k+1}>b$．

2008年全国统一高考数学试卷（理科）（全国卷Ⅰ）

参考答案与试题解析

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1．（5分）函数$y=\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x}$的定义域为（　　）

A．{x|x≥0}　　B．{x|x≥1}　　C．{x|x≥1}∪{0}　D．{x|0≤x≤1}

【考点】33：函数的定义域及其求法．

【分析】偶次开方的被开方数一定非负．x（x﹣1）≥0，x≥0，解关于x的不等式组，即为函数的定义域．

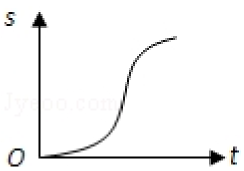
【解答】解：由x（x﹣1）≥0，得x≥1，或x≤0．

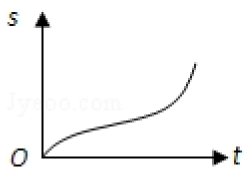
又因为x≥0，所以x≥1，或x=0；所以函数的定义域为{x|x≥1}∪{0}

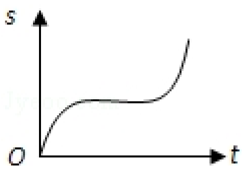
故选：C．

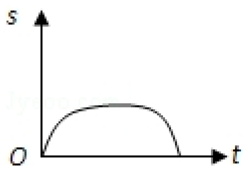
【点评】定义域是高考必考题通常以选择填空的形式出现，通常注意偶次开方一定非负，分式中分母不能为0，对数函数的真数一定要大于0，指数和对数的底数大于0且不等于1．另外还要注意正切函数的定义域．

2．（5分）汽车经过启动、加速行驶、匀速行驶、减速行驶之后停车，若把这一过程中汽车的行驶路程s看作时间t的函数，其图象可能是（　　）

A．


B．


C．


D．


【考点】3A：函数的图象与图象的变换．

【专题】16：压轴题；31：数形结合．

【分析】由已知中汽车经过启动、加速行驶、匀速行驶、减速行驶之后停车，汽车的行驶路程 s 看作时间 t 的函数，我们可以根据实际分析函数值 S（路程）与自变量 t（时间）之间变化趋势，分析四个答案即可得到结论．

【解答】解：由汽车经过启动后的加速行驶阶段，

路程随时间上升的速度越来越快，

故图象的前边部分为凹升的形状；

在汽车的匀速行驶阶段，

路程随时间上升的速度保持不变

故图象的中间部分为平升的形状；

在汽车减速行驶之后停车阶段，

路程随时间上升的速度越来越慢，

故图象的前边部分为凸升的形状；

分析四个答案中的图象，

只有 A 答案满足要求，

故选：A．

【点评】从左向右看图象，如果图象是凸起上升的，表明相应的量增长速度越来越慢；如果图象是凹陷上升的，表明相应的量增长速度越来越快；如果图象是直线上升的，表明相应的量增长速度保持不变；如果图象是水平直线，表明相应的量保持不变，即不增长也不降低；如果图象是凸起下降的，表明相应的量降低速度越来越快；如果图象是凹陷下降的，表明相应的量降低速度越来越慢；如果图象是直线下降的，表明相应的量降低速度保持不变．

3．（5 分）在△ABC 中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{c}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{b}$．若点 D 满足 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，则 $\overrightarrow{AD}=$（　　）

A．$\frac{2}{3}\overrightarrow{b}+\frac{1}{3}\overrightarrow{c}$　　B．$\frac{5}{3}\overrightarrow{c}-\frac{2}{3}\overrightarrow{b}$　　C．$\frac{2}{3}\overrightarrow{b}-\frac{1}{3}\overrightarrow{c}$　　D．$\frac{1}{3}\overrightarrow{b}+\frac{2}{3}\overrightarrow{c}$

【考点】9B：向量加减混合运算．

【分析】把向量用一组向量来表示，做法是从要求向量的起点出发，尽量沿着已知向量，走到要求向量的终点，把整个过程写下来，即为所求．本题也可以

根据 D 点把 BC 分成一比二的两部分入手.

【解答】解：∵由 $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})$，

∴ $3\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{c}+2\overrightarrow{b}$，

∴ $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{c}+\frac{2}{3}\overrightarrow{b}$.

故选：A.

【点评】用一组向量来表示一个向量，是以后解题过程中常见到的，向量的加减运算是用向量解决问题的基础，要学好运算，才能用向量解决立体几何问题，三角函数问题，好多问题都是以向量为载体的

4．（5 分）设 a∈R，且 $(a+i)^2i$ 为正实数，则 a=（　　）

A．2　　B．1　　C．0　　D．﹣1

【考点】A4：复数的代数表示法及其几何意义.

【分析】注意到 a+bi（a，b∈R）为正实数的充要条件是 a＞0，b=0

【解答】解：$(a+i)^2i=(a^2+2ai-1)i=-2a+(a^2-1)i>0$，$a=-1$．故选 D.

【点评】本题的计算中，要注意到相应变量的范围.

5．（5 分）已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2+a_4=4$，$a_3+a_5=10$，则它的前 10 项的和 $S_{10}=$（　　）

A．138　　B．135　　C．95　　D．23

【考点】83：等差数列的性质；85：等差数列的前 n 项和.

【专题】11：计算题.

【分析】本题考查的知识点是等差数列的性质，及等差数列前 n 项和，根据 $a_2+a_4=4$，$a_3+a_5=10$ 我们构造关于基本量（首项及公差）的方程组，解方程组求出基本量（首项及公差），进而代入前 n 项和公式，即可求解.

【解答】解：∵$(a_3+a_5)-(a_2+a_4)=2d=6$，

∴$d=3$，$a_1=-4$，

∴$S_{10}=10a_1+\frac{10\times(10-1)d}{2}=95$.

故选：C.

【点评】在求一个数列的通项公式或前 n 项和时，如果可以证明这个数列为等差数列，或等比数列，则可以求出其基本项（首项与公差或公比）进而根据等差或等比数列的通项公式，写出该数列的通项公式，如果未知这个数列的类型，则可以判断它是否与某个等差或等比数列有关，间接求其通项公式．

6．（5 分）若函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=\ln\sqrt{x}+1$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，则 $f(x)=$（　　）

A．e^{2x-2}　　B．e^{2x}　　C．e^{2x+1}　　D．e^{2x+2}

【考点】4R：反函数．

【专题】11：计算题．

【分析】由函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=\ln\sqrt{x}+1$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称知这两个函数互为反函数，故只要求出函数 $y=f(x)$ 的反函数即可，欲求原函数的反函数，即从原函数 $y=\ln\sqrt{x}+1$ 中反解出 x，后再进行 x，y 互换，即得反函数的解析式．

【解答】解：∵$y-1=\ln\sqrt{x}$，∴$\sqrt{x}=e^{y-1}$，∴$x=(e^{y-1})^2=e^{2y-2}$，改写为：$y=e^{2x-2}$

∴答案为 A．

【点评】本题主要考查了互为反函数图象间的关系及反函数的求法．

7．（5 分）已知曲线 $y=\frac{x+1}{x-1}$ 在点（3，2）处的切线与直线 $ax+y+1=0$ 垂直，则 a 的值为（　　）

A．2　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．-2

【考点】6H：利用导数研究曲线上某点切线方程．

【专题】53：导数的综合应用．

【分析】求出函数的导数，切线的斜率，由两直线垂直的条件，即可得到 a 的值．

【解答】解：∵$y=\frac{x+1}{x-1}$，

∴$y'=\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$，

∴曲线 $y=\frac{x+1}{x-1}$在点（3，2）处的切线的斜率 $k=-\frac{1}{2}$，

∵曲线 $y=\frac{x+1}{x-1}$在点（3，2）处的切线与直线 ax+y+1=0 垂直，

∴直线 ax+y+1=0 的斜率 $k'=-a\times(-\frac{1}{2})=-1$，即 a=﹣2．

故选：D．

【点评】本题考查导数的几何意义的求法，考查导数的运算，解题时要认真审题，仔细解答，注意直线与直线垂直的性质的灵活运用．

8．（5 分）为得到函数$y=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$的图象，只需将函数 y=sin2x 的图象（　　）

A．向左平移$\frac{5\pi}{12}$个长度单位　　B．向右平移$\frac{5\pi}{12}$个长度单位

C．向左平移$\frac{5\pi}{6}$个长度单位　　D．向右平移$\frac{5\pi}{6}$个长度单位

【考点】HJ：函数 y=Asin（ωx+φ）的图象变换．

【专题】11：计算题．

【分析】先根据诱导公式将函数$y=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$化为正弦的形式，再根据左加右减的原则进行平移即可得到答案．

【解答】解：∵$y=\cos(2x+\frac{\pi}{3})=\sin(2x+\frac{5\pi}{6})=\sin2(x+\frac{5\pi}{12})$，

只需将函数 y=sin2x 的图象向左平移$\frac{5\pi}{12}$个单位得到函数$y=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$的图象．

故选：A．

【点评】本题主要考查诱导公式和三角函数的平移．属基础题．

9．（5 分）设奇函数 f（x）在（0，+∞）上为增函数，且 f（1）=0，则不等式

$\frac{f(x)-f(-x)}{x}<0$ 的解集为（　　）

A. （﹣1，0）∪（1，+∞）　　B. （﹣∞，﹣1）∪（0，1）

C. （﹣∞，﹣1）∪（1，+∞）　　D. （﹣1，0）∪（0，1）

【考点】3N：奇偶性与单调性的综合．

【专题】16：压轴题．

【分析】首先利用奇函数定义与$\frac{f(x)-f(-x)}{x}<0$得出 x 与 f（x）异号，

然后由奇函数定义求出 f（﹣1）=﹣f（1）=0，

最后结合 f（x）的单调性解出答案．

【解答】解：由奇函数 f（x）可知$\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\frac{2f(x)}{x}<0$，即 x 与 f（x）异号，

而 f（1）=0，则 f（﹣1）=﹣f（1）=0，

又 f（x）在（0，+∞）上为增函数，则奇函数 f（x）在（﹣∞，0）上也为增函数，

当 0＜x＜1 时，f（x）＜f（1）=0，得$\frac{f(x)}{x}<0$，满足；

当 x＞1 时，f（x）＞f（1）=0，得$\frac{f(x)}{x}>0$，不满足，舍去；

当﹣1＜x＜0 时，f（x）＞f（﹣1）=0，得$\frac{f(x)}{x}<0$，满足；

当 x＜﹣1 时，f（x）＜f（﹣1）=0，得$\frac{f(x)}{x}>0$，不满足，舍去；

所以 x 的取值范围是﹣1＜x＜0 或 0＜x＜1．

故选：D．

【点评】本题综合考查奇函数定义与它的单调性．

10. （5 分）若直线$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$与圆 $x^2+y^2=1$ 有公共点，则（　　）

A. $a^2+b^2\leqslant 1$　　B. $a^2+b^2\geqslant 1$　　C. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\leqslant 1$　　D. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant 1$

【考点】J9：直线与圆的位置关系．

【分析】用圆心到直线的距离小于或等于半径，可以得到结果．

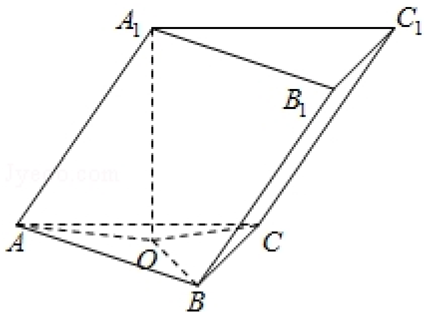
【解答】解：直线与圆有公共点，即直线与圆相切或相交得：d≤r

$d=\frac{|-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}\leqslant 1$，$\therefore \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant 1$，

故选：D．

【点评】本题考查点到直线的距离公式，直线和圆的位置关系，是基础题．

11．（5分）已知三棱柱 ABC－ $A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面边长都相等，A_1 在底面 ABC 内的射影为△ABC 的中心，则 AB_1 与底面 ABC 所成角的正弦值等于（　　）



A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{2}{3}$

【考点】LP：空间中直线与平面之间的位置关系．

【专题】11：计算题；31：数形结合；4R：转化法；5G：空间角．

【分析】法一：由题意可知三棱锥 A_1－ ABC 为正四面体，设棱长为 2，求出 AB_1 及三棱锥的高，由线面角的定义可求出答案；

法二：先求出点 A_1 到底面的距离 A_1D 的长度，即知点 B_1 到底面的距离 B_1E 的长度，再求出 AE 的长度，在直角三角形 AEB_1 中求 AB_1 与底面 ABC 所成角的正切，再由同角三角函数的关系求出其正弦．

【解答】解：（法一）因为三棱柱 ABC－ $A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面边长都相等，A_1 在底面 ABC 内的射影为△ABC 的中心，设为 D，

所以三棱锥 A_1－ ABC 为正四面体，设棱长为 2，

则△AA_1B_1是顶角为120°等腰三角形，

所以 $AB_1=2\times2\times\sin60°=2\sqrt{3}$，$A_1D=\sqrt{2^2-(\frac{2}{3}\times\sqrt{3})^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，

所以 AB_1 与底面 ABC 所成角的正弦值为$\frac{A_1D}{AB_1}=\frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$；

（法二）由题意不妨令棱长为 2，点 B_1 到底面的距离是 B_1E，

如图，A_1 在底面 ABC 内的射影为△ABC 的中心，设为 D，

故 $DA=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

由勾股定理得 $A_1D=\sqrt{4-\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$故 $B_1E=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，

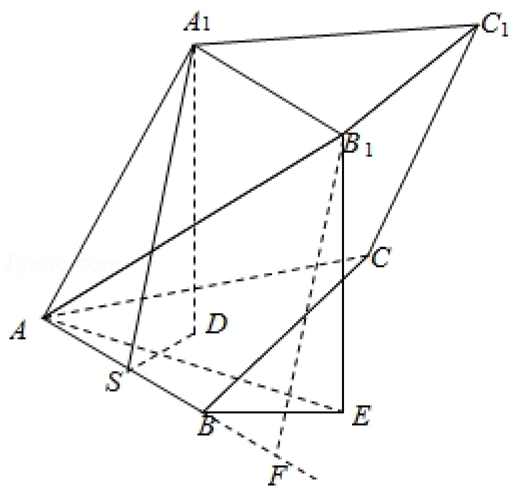
如图作 $A_1S\perp AB$ 于中点 S，过 B1 作 AB 的垂线段，垂足为 F，

$BF=1$，$B_1F=A_1S=\sqrt{3}$，$AF=3$，

在直角三角形 B_1AF 中用勾股定理得：$AB_1=2\sqrt{3}$，

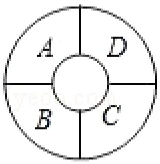
所以 AB_1 与底面 ABC 所成角的正弦值 $\sin\angle B_1AE=\frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

故选：B.



【点评】本题考查了几何体的结构特征及线面角的定义，还有点面距与线面距的转化，考查了转化思想和空间想象能力.

12．（5 分）如图，一环形花坛分成 A，B，C，D 四块，现有 4 种不同的花供选种，要求在每块里种 1 种花，且相邻的 2 块种不同的花，则不同的种法总数为（　　）



A．96　　　　　B．84　　　　　C．60　　　　　D．48

【考点】C6：等可能事件和等可能事件的概率．

【专题】16：压轴题．

【分析】这道题比起前几年出的高考题要简单些，只要分类清楚没有问题，分为三类：分别种两种花、三种花、四种花，分这三类来列出结果．

【解答】解：分三类：种两种花有 A_4^2 种种法；

种三种花有 $2A_4^3$ 种种法；

种四种花有 A_4^4 种种法．

共有 $A_4^2+2A_4^3+A_4^4=84$．

故选：B．

【点评】本题也可以这样解：按 A﹣ B﹣ C﹣ D 顺序种花，可分 A、C 同色与不同色有 $4\times3\times(1\times3+2\times2)=84$．

二、填空题（共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分）

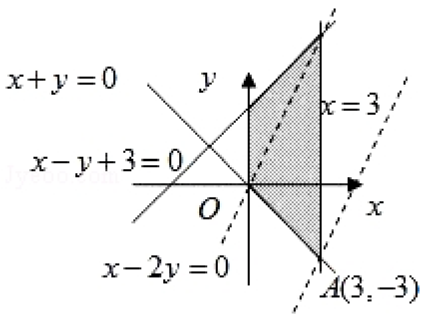
13．（5 分）若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant0\\x-y+3\geqslant0\\0\leqslant x\leqslant3\end{cases}$，则 z=2x﹣ y 的最大值为__9__．

【考点】7C：简单线性规划．

【专题】11：计算题；13：作图题．

【分析】首先作出可行域，再作出直线 l_0：y=2x，将 l_0 平移与可行域有公共点，直线 y=2x﹣ z 在 y 轴上的截距最小时，z 有最大值，求出此时直线 y=2x﹣ z 经过的可行域内的点的坐标，代入 z=2x﹣ y 中即可．

【解答】解：如图，作出可行域，作出直线 l_0：y=2x，将 l_0 平移至过点 A 处时，函数 z=2x﹣ y 有最大值 9．



【点评】本题考查线性规划问题，考查数形结合思想.

14．（5 分）已知抛物线 $y=ax^2-1$ 的焦点是坐标原点，则以抛物线与两坐标轴的三个交点为顶点的三角形面积为__2__.

【考点】K8：抛物线的性质.

【专题】11：计算题.

【分析】先根据抛物线 $y=ax^2-1$ 的焦点坐标为坐标原点，求得 a，得到抛物线方程，进而可知与坐标轴的交点的坐标，进而可得答案.

【解答】解：由抛物线 $y=ax^2-1$ 的焦点坐标为 $(0,\frac{1}{4a}-1)$ 坐标原点得，

$a=\frac{1}{4}$，则 $y=\frac{1}{4}x^2-1$

与坐标轴的交点为（0，﹣1），（﹣2，0），（2，0）

，则以这三点围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times4\times1=2$

故答案为 2

【点评】本题主要考查抛物线的应用．考查了学生综合运用所学知识，解决实际问题的能力.

15．（5 分）在△ABC 中，AB=BC，$\cos B=-\frac{7}{18}$．若以 A，B 为焦点的椭圆经过点 C，则该椭圆的离心率 e=__$\frac{3}{8}$__.

【考点】K4：椭圆的性质.

【专题】11：计算题；16：压轴题．

【分析】设 AB=BC=1，$\cos B=-\frac{7}{18}$，则 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B=\frac{25}{9}$，由此可知 $2a=\frac{8}{3}$，$2c=1$，从而求出该椭圆的离心率．

【解答】解：设 AB=BC=1，$\cos B=-\frac{7}{18}$，则 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B=\frac{25}{9}$，

$\therefore AC=\frac{5}{3}$，$2a=1+\frac{5}{3}=\frac{8}{3}$，$2c=1$，$e=\frac{2c}{2a}=\frac{3}{8}$．

答案：$\frac{3}{8}$．

【点评】本题考查椭圆的性质及应用，解题时要注意的正确计算．

16．（5 分）等边三角形 ABC 与正方形 ABDE 有一公共边 AB，二面角 C﹣AB﹣D 的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，M，N 分别是 AC，BC 的中点，则 EM，AN 所成角的余弦值等于__$\frac{1}{6}$__．

【考点】LM：异面直线及其所成的角；MJ：二面角的平面角及求法．

【专题】11：计算题；16：压轴题．

【分析】先找出二面角的平面角，建立边之间的等量关系，再利用向量法将所求异面直线用基底表示，然后利用向量的所成角公式求出所成角即可．

【解答】解：设 AB=2，作 CO⊥面 ABDE，

OH⊥AB，则 CH⊥AB，∠CHO 为二面角 C﹣AB﹣D 的平面角

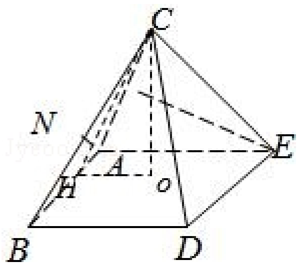
$CH=\sqrt{3}$，$OH=CH\cdot\cos\angle CHO=1$，

结合等边三角形 ABC 与正方形 ABDE 可知此四棱锥为正四棱锥，

则 $AN=EM=CH=\sqrt{3}$ $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})$，$\overrightarrow{EM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}$，

$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{EM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE})=\frac{1}{2}$

故 EM，AN 所成角的余弦值$\frac{\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{EM}}{|\overrightarrow{AN}||\overrightarrow{EM}|}=\frac{1}{6}$故答案为：$\frac{1}{6}$



【点评】本小题主要考查异面直线所成的角，考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力，属于基础题.

三、解答题（共 6 小题，满分 70 分）

17．（10 分）设△ABC 的内角 A，B，C 所对的边长分别为 a，b，c，且 acosB－ bcosA= $\frac{3}{5}$c.

（Ⅰ）求$\frac{\tan A}{\tan B}$的值；

（Ⅱ）求 tan（A－ B）的最大值.

【考点】GP：两角和与差的三角函数；HP：正弦定理.

【分析】本题考查的知识点是正弦定理及两角和与差的正切函数，

（Ⅰ）由正弦定理的边角互化，我们可将已知中$a\cos B-b\cos A=\frac{3}{5}c$，进行转化得到 sinAcosB=4cosAsinB，再利用弦化切的方法即可求$\frac{\tan A}{\tan B}$的值.

（Ⅱ）由（Ⅰ）的结论，结合角 A，B，C 为△ABC 的内角，我们易得 tanA=4tanB ＞0，则 tan（A－ B）可化为$\frac{3}{\cot B+4\tan B}$，再结合基本不等式即可得到 tan（A－ B）的最大值.

【解答】解：（Ⅰ）在△ABC 中，$a\cos B-b\cos A=\frac{3}{5}c$，

由正弦定理得

$\sin A\cos B-\sin B\cos A=\frac{3}{5}\sin C=\frac{3}{5}\sin(A+B)=\frac{3}{5}\sin A\cos B+\frac{3}{5}\cos A\sin B$

即 sinAcosB=4cosAsinB，

则$\frac{\tan A}{\tan B}=4$；

（Ⅱ）由$\frac{\tan A}{\tan B}=4$得

$\tan A=4\tan B>0$

$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}=\frac{3\tan B}{1+4\tan^2 B}=\frac{3}{\cot B+4\tan B}\leqslant\frac{3}{2\sqrt{\cot B\cdot 4\tan B}}=\frac{3}{4}$

当且仅当$4\tan B=\cot B$，$\tan B=\frac{1}{2}$，$\tan A=2$时，等号成立，

故当$\tan A=2$，$\tan B=\frac{1}{2}$时，

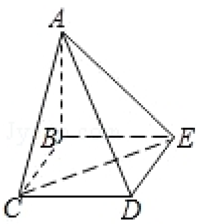
tan（A﹣B）的最大值为$\frac{3}{4}$.

【点评】在解三角形时，正弦定理和余弦定理是最常用的方法，正弦定理多用于边角互化，使用时要注意一般是等式两边是关于三边的齐次式.

18．（12 分）四棱锥 A﹣BCDE 中，底面 BCDE 为矩形，侧面 ABC⊥底面 BCDE，BC=2，$CD=\sqrt{2}$，AB=AC.

（Ⅰ）证明：AD⊥CE；

（Ⅱ）设 CE 与平面 ABE 所成的角为 45°，求二面角 C﹣AD﹣E 的大小.



【考点】LY：平面与平面垂直；MJ：二面角的平面角及求法.

【专题】5F：空间位置关系与距离.

【分析】（1）取 BC 中点 F，证明 CE⊥面 ADF，通过证明线面垂直来达到证明线线垂直的目的.

（2）在面 AED 内过点 E 作 AD 的垂线，垂足为 G，由（1）知，CE⊥AD，则∠CGE 即为所求二面角的平面角，△CGE 中，使用余弦定理求出此角的大小.

【解答】解：（1）取 BC 中点 F，连接 DF 交 CE 于点 O，

∵AB=AC，∴AF⊥BC.

又面 ABC⊥面 BCDE，∴AF⊥面 BCDE，∴AF⊥CE.

再根据 $\tan\angle CED=\tan\angle FDC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，可得∠CED=∠FDC.

又∠CDE=90°，∴∠OED+∠ODE=90°，

∴∠DOE=90°，即 CE⊥DF，∴CE⊥面 ADF，∴CE⊥AD.

（2）在面 ACD 内过 C 点作 AD 的垂线，垂足为 G.

∵CG⊥AD，CE⊥AD，∴AD⊥面 CEG，∴EG⊥AD，

则∠CGE 即为所求二面角的平面角.

作 CH⊥AB，H 为垂足.

∵平面 ABC⊥平面 BCDE，矩形 BCDE 中，BE⊥BC，故 BE⊥平面 ABC，CH⊂平面 ABC，

故 BE⊥CH，而 AB∩BE=B，故 CH⊥平面 ABE，

∴∠CEH=45°为 CE 与平面 ABE 所成的角.

∵CE=$\sqrt{6}$，∴CH=EH=$\sqrt{3}$.

直角三角形 CBH 中，利用勾股定理求得 BH=$\sqrt{CB^2-CH^2}=\sqrt{4-3}=1$，∴AH=AB﹣BH=AC﹣1；

直角三角形 ACH 中，由勾股定理求得 $AC^2=CH^2+AH^2=3+(AC-1)^2$，∴AB=AC=2.

由面 ABC⊥面 BCDE，矩形 BCDE 中 CD⊥CB，可得 CD⊥面 ABC，

故△ACD 为直角三角形，AD=$\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{4+2}=\sqrt{6}$，

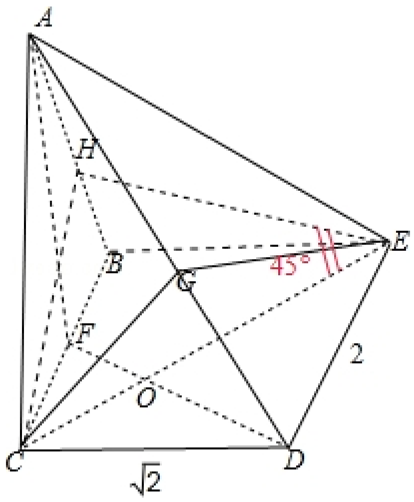
故 CG=$\frac{AC\cdot CD}{AD}=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，DG=$\sqrt{CD^2-CG^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

$EG=\sqrt{DE^2-DG^2}=\frac{\sqrt{30}}{3}$，又 $CE=\sqrt{6}$，

则 $\cos\angle CGE=\frac{CG^2+GE^2-CE^2}{2CG\cdot GE}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，

∴$\angle CGE=\pi-\arccos(\frac{\sqrt{10}}{10})$，

即二面角 C﹣AD﹣E 的大小 $\pi-\arccos(\frac{\sqrt{10}}{10})$.



【点评】本题主要考查通过证明线面垂直来证明线线垂直的方法，以及求二面角的大小的方法，属于中档题.

19．（12 分）已知函数 f（x）=− x^2+ax+1− lnx.

（Ⅰ）当 a=3 时，求函数 f（x）的单调递增区间；

（Ⅱ）若 f（x）在区间（0，$\frac{1}{2}$）上是减函数，求实数 a 的取值范围.

【考点】3D：函数的单调性及单调区间；3E：函数单调性的性质与判断.

【专题】16：压轴题.

【分析】（1）求单调区间，先求导，令导函数大于等于 0 即可.

（2）已知 f（x）在区间（0，$\frac{1}{2}$）上是减函数，即 f′（x）≤0 在区间（0，$\frac{1}{2}$）上恒成立，然后用分离参数求最值即可.

【解答】解：（Ⅰ）当 a=3 时，f（x）=− x^2+3x+1− lnx

$\therefore f'(x)=-2x+3-\frac{1}{x}=\frac{-(2x^2-3x+1)}{x}$

解 f′（x）＞0，

即：$2x^2-3x+1<0$

函数 f（x）的单调递增区间是 $(\frac{1}{2},\ 1)$.

（Ⅱ）f′（x）=− 2x+a− $\frac{1}{x}$，

∵f（x）在 $(0,\frac{1}{2})$上为减函数，

∴x∈ $(0,\frac{1}{2})$时－ 2x+a－ $\frac{1}{x}$≤0 恒成立．

即 a≤2x+$\frac{1}{x}$恒成立．

设$g(x)=2x+\frac{1}{x}$，则$g'(x)=2-\frac{1}{x^2}$

∵x∈ $(0,\frac{1}{2})$时，$\frac{1}{x^2}$＞4，

∴g′（x）＜0，

∴g（x）在 $(0,\frac{1}{2})$上递减，

∴g（x）＞g（$\frac{1}{2}$）=3，

∴a≤3．

【点评】本题考查函数单调性的判断和已知函数单调性求参数的范围，此类问题一般用导数解决，综合性较强．

20．（12 分）已知 5 只动物中有 1 只患有某种疾病，需要通过化验血液来确定患病的动物．血液化验结果呈阳性的即为患病动物，呈阴性即没患病．下面是两种化验方法：

方案甲：逐个化验，直到能确定患病动物为止．

方案乙：先任取 3 只，将它们的血液混在一起化验．若结果呈阳性则表明患病动物为这 3 只中的 1 只，然后再逐个化验，直到能确定患病动物为止；若结果呈阴性则在另外 2 只中任取 1 只化验．

（Ⅰ）求依方案甲所需化验次数不少于依方案乙所需化验次数的概率；

（Ⅱ）ξ 表示依方案乙所需化验次数，求 ξ 的期望．

【考点】C6：等可能事件和等可能事件的概率；CH：离散型随机变量的期望与方差．

【分析】（1）由题意得到这两种方案的化验次数，算出在各个次数下的概率，写出化验次数的分布列，求出方案甲所需化验次数不少于依方案乙所需化验次数的概率．

（2）根据上一问乙的化验次数的分布列，利用期望计算公式得到结果．

【解答】解：（Ⅰ）若乙验两次时，有两种可能：

①先验三只结果为阳性，再从中逐个验时，恰好一次验中概率为：

$$\frac{C_4^2A_3^3}{A_5^3}\times\frac{1}{A_3^1}=\frac{6\times6}{3\times4\times5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$$

②先验三只结果为阴性，再从其它两只中验出阳性（无论第二次试验中有没有，均可以在第二次结束）

$$\frac{A_4^3A_2^1}{A_5^3A_2^2}=\frac{24}{5\times3\times4}=\frac{2}{5},$$

∴乙只用两次的概率为$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$.

若乙验三次时，只有一种可能：

先验三只结果为阳性，再从中逐个验时，恰好二次验中概率为在三次验出时概率为$\frac{2}{5}$

∴甲种方案的次数不少于乙种次数的概率为：

$$\frac{3}{5}\times(1-\frac{1}{5})+\frac{2}{5}(1-\frac{1}{5}-\frac{1}{5})=\frac{12}{25}+\frac{6}{25}=\frac{18}{25}$$

（Ⅱ）ξ表示依方案乙所需化验次数，

∴ξ的期望为 $E\xi=2\times0.6+3\times0.4=2.4$.

【点评】期望是概率论和数理统计的重要概念之一，是反映随机变量取值分布的特征数，学习期望将为今后学习概率统计知识做铺垫．同时，它在市场预测，经济统计，风险与决策等领域有着广泛的应用，为今后学习数学及相关学科产生深远的影响．

21．（12 分）双曲线的中心为原点 O，焦点在 x 轴上，两条渐近线分别为 l_1，l_2，经过右焦点 F 垂直于 l_1 的直线分别交 l_1，l_2 于 A，B 两点．已知$|\overrightarrow{OA}|$、$|\overrightarrow{AB}|$、$|\overrightarrow{OB}|$成等差数列，且$\overrightarrow{BF}$与$\overrightarrow{FA}$同向．

（Ⅰ）求双曲线的离心率；

（Ⅱ）设 AB 被双曲线所截得的线段的长为 4，求双曲线的方程．

【考点】KB：双曲线的标准方程；KC：双曲线的性质．

【专题】11：计算题；16：压轴题．

【分析】（1）由 2 个向量同向，得到渐近线的夹角范围，求出离心率的范围，再用勾股定理得出直角三角形的 2 个直角边的长度比，联想到渐近线的夹角，求出渐近线的斜率，进而求出离心率．

（2）利用第（1）的结论，设出双曲线的方程，将 AB 方程代入，运用根与系数的关系及弦长公式，求出待定系数，即可求出双曲线方程．

【解答】解：（1）设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$c^2=a^2+b^2$，由$\overrightarrow{BF}$，$\overrightarrow{FA}$同向，

∴渐近线的倾斜角范围为（0，$\frac{\pi}{4}$），

∴渐近线斜率为：$k_1=\frac{b}{a}<1$∴$\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2}=e^2-1<1$，∴$1<e^2<2$.

∵$|\overrightarrow{OA}|$、$|\overrightarrow{AB}|$、$|\overrightarrow{OB}|$成等差数列，∴|OB|+|OA|=2|AB|，

∴$|AB|^2=(|OB|-|OA|)(|OB|+|OA|)=(|OB|-|OA|)\bullet 2|AB|$，

∴$|AB|=2(|OB|-|OA|)$∴$\begin{cases}|OB|-|OA|=\frac{1}{2}|AB|\\|OA|+|OB|=2|AB|\end{cases}$，

∴$|OA|=\frac{3}{4}|AB|$∴$|OA|^2=\frac{9}{16}|AB|^2$，

可得：$\frac{|AB|}{|OA|}=\frac{4}{3}$，而在直角三角形 OAB 中，

注意到三角形 OAF 也为直角三角形，即 $\tan\angle AOB=\frac{4}{3}$，

而由对称性可知：OA 的斜率为 $k=\tan\frac{1}{2}\angle AOB$，

∴$\frac{2k}{1-k^2}=\frac{4}{3}$，∴$2k^2+3k-2=0$，∴$k=\frac{1}{2}$（k=−2舍去）；

∴$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$∴$\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，∴$e^2=\frac{5}{4}$，∴$e=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

（2）由第（1）知，a=2b，可设双曲线方程为$\frac{x^2}{4b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，∴$c=\sqrt{5}b$.

由于 AB 的倾斜角为$\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\angle AOB$，故 AB 的斜率为 $\tan(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\angle AOB)=-\cot($

$\frac{1}{2}\angle AOB$）=－ 2，

∴AB 的直线方程为 $y=-2(x-\sqrt{5}b)$，代入双曲线方程得：$15x^2-32\sqrt{5}bx+84b^2=0$

，

∴$x_1+x_2=\frac{32\sqrt{5}b}{15}$，$x_1\bullet x_2=\frac{84b^2}{15}$，

∴ $4=\sqrt{1+4}\bullet\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1\bullet x_2}=\sqrt{5}\bullet\sqrt{(\frac{32\sqrt{5}b}{15})^2-4\bullet\frac{84b^2}{15}}$，即

$16=\frac{32^2\bullet b^2}{9}-112b^2$，

∴$b^2=9$，所求双曲线方程为：$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$．

【点评】做到边做边看，从而发现题中的巧妙，如据$\frac{|AB|}{|OA|}=\frac{4}{3}$，联想到对应的是 2 渐近线的夹角的正切值，属于中档题．

22．（12 分）设函数 $f(x)=x-x\ln x$．数列$\{a_n\}$满足 $0<a_1<1$，$a_{n+1}=f(a_n)$．

（Ⅰ）证明：函数 $f(x)$ 在区间（0，1）是增函数；

（Ⅱ）证明：$a_n<a_{n+1}<1$；

（Ⅲ）设 $b\in(a_1，1)$，整数 $k\geq\frac{a_1-b}{a_1\ln b}$．证明：$a_{k+1}>b$．

【考点】6B：利用导数研究函数的单调性；RG：数学归纳法．

【专题】16：压轴题．

【分析】（1）首先求出函数的导数，然后令 $f'(x)=0$，解出函数的极值点，最后根据导数判断函数在区间（0，1）上的单调性，从而

进行证明．

（2）由题意数列$\{a_n\}$满足 $0<a_1<1$，$a_{n+1}=f(a_n)$，求出 $a_{n+1}=a_n-a_n\ln a_n$，然后利用归纳法进行证明；

（3）由题意 $f(x)=x-x\ln x$，$a_{n+1}=f(a_n)$ 可得 $a_{k+1}=a_k-b-a_k$，然后进行讨论求解．

【解答】解：（Ⅰ）证明：∵f（x）=x－ xlnx，

∴f′（x）=－ lnx，

当 $x\in$（0，1）时，f′（x）=－ lnx＞0

故函数 f（x）在区间（0，1）上是增函数；

（Ⅱ）证明：（用数学归纳法）

（i）当 n=1 时，$0<a_1<1$，$a_1\ln a_1<0$，

$a_2=f(a_1)=a_1-a_1\ln a_1>a_1$，

∵函数 f（x）在区间（0，1）是增函数且函数 f（x）在 x=1 处连续，

∴f（x）在区间（0，1]是增函数，

$a_2=f(a_1)=a_1-a_1\ln a_1<1$，即 $a_1<a_2<1$ 成立，

（ii）假设当 x=k（$k\in N^+$）时，$a_k<a_{k+1}<1$ 成立，

即 $0<a_1\leqslant a_k<a_{k+1}<1$，

那么当 n=k+1 时，由 f（x）在区间（0，1]是增函数，$0<a_1\leqslant a_k<a_{k+1}<1$，

得 $f(a_k)<f(a_{k+1})<f(1)$，

而 $a_{n+1}=f(a_n)$，

则 $a_{k+1}=f(a_k)$，$a_{k+2}=f(a_{k+1})$，$a_{k+1}<a_{k+2}<1$，

也就是说当 n=k+1 时，$a_n<a_{n+1}<1$ 也成立，

根据（i）、（ii）可得对任意的正整数 n，$a_n<a_{n+1}<1$ 恒成立.

（Ⅲ）证明：由 f（x）=x－ xlnx，$a_{n+1}=f(a_n)$ 可得

$a_{k+1}=a_k-a_k\ln a_k=a_1-b-\sum\limits_{i=1}^{k}a_i\ln a_i$，

1）若存在某 $i\leqslant k$，满足 $a_i\leqslant b$，则由（Ⅱ）知：$a_{k+1}-b>a_i-b\geqslant 0$，

2）若对任意 $i\leqslant k$，都有 $a_i>b$，则 $a_{k+1}=a_k-a_k\ln a_k=a_1-b-\sum\limits_{i=1}^{k}a_i\ln a_i=$

$a_1-b-\sum\limits_{i=1}^{k}a_i\ln b\geqslant a_1-b_1-ka_1\ln b=0$，

即 $a_{k+1}>b$ 成立.

【点评】此题主要考查多项式函数的导数，函数单调性的判定，函数最值，函数、方程与不等式等基础知识及数学归纳法的应用，一般出题者喜欢考查学生的运算求解能力、推理论证能力及分析与解决问题的能力，要出学生会用数形结合的思想、分类与整合思想，化归与转化思想、有限与无限的思想来解决问题．