

21 届河北省高三年级 11 月份联合考试

数学参考答案

1. C 【解析】本题考查集合的运算,考查运算求解能力.

因为 $A = \{x | x \geq 3\}$, $B = \{x | -\frac{1}{2} < x < 5\}$, 所以 $A \cap B = \{x | 3 \leq x < 5\}$.

2. A 【解析】本题考查等比数列的性质,考查运算求解能力.

因为 $a_1 a_3 = a_2^2 = 9$, 所以 $a_2 = 3$. 又 $a_3 + 2q = 10$, 所以 $3q + 2q = 10$, 解得 $q = 2$.

3. B 【解析】本题考查导数的几何意义,考查运算求解能力.

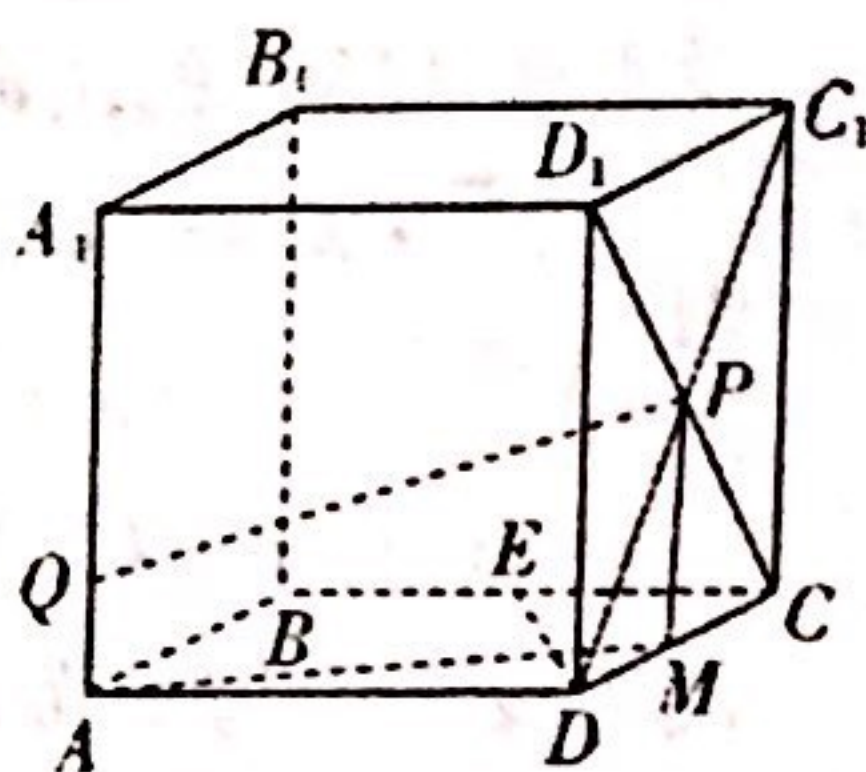
因为 $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, 所以 $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'(\frac{1}{2}) = -4$.

4. A 【解析】本题考查常用逻辑用语的知识,考查推理论证能力.

因为 $x \geq 1$ 且 $y \geq 1$, 所以 $x^2 \geq 1$ 且 $y^2 \geq 1$, 所以 $x^2 + y^2 \geq 2 > 1$; 若 $x^2 + y^2 \geq 1$, 可取 $x = 0, y = -1$, 不满足 $x \geq 1$ 且 $y \geq 1$, 所以前者是后者的充分不必要条件, 选 A.

5. D 【解析】本题考查异面直线所成角的大小,考查空间想象能力.

如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, PQ 在底面 $ABCD$ 的射影为 AM , 可证 $DE \perp$ 平面 $AMPQ$, 而 $PQ \subset$ 平面 $AMPQ$, 那么 $DE \perp PQ$, 则异面直线 PQ, DE 所成角的大小为 90° .



6. C 【解析】本题考查三角恒等变换,考查运算求解能力.

因为 $\frac{\sin 2\alpha + 2\sin^2 \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)}{\cos \alpha + \sin \alpha} = 2\sin \alpha \cos \alpha$, 所以 $2\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{3}$,

且 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 又 $(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = 1 - 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{4}{3}$, 所以 $\cos \alpha - \sin \alpha = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

7. D 【解析】本题考查数学文化与空间几何体的表面积与体积,考查空间想象能力.

设内口宽为 a 寸, 则长为 $1.8a$ 寸, 由 $2(a + 1.8a) + 1.8a^2 = 33$, 整理得 $9a^2 + 28a - 165 = 0$, 解得 $a = 3$ ($a = -\frac{55}{9}$ 舍去), 故所求的容积为 $3 \times (1.8 \times 3) \times 1 = 16.2$ 立方寸.

8. A 【解析】本题考查平面向量的线性表示,考查运算求解能力.

由 $\overrightarrow{AP} = 5\overrightarrow{PO} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}$ 化简得 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, 故 $\frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle PBC}} = 2$.

9. ACD 【解析】本题考查三角函数的性质,考查运算求解能力.

因为 $f(x)$ 图象相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{4}$, 即 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{4} \times 2 = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\omega = 4$, 即 $f(x) = \cos(4x + \varphi)$, A 正确; 又直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 是其中一条对称轴, 所以 $\frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 即 $\varphi = k\pi - \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. 由 $|\varphi| <$

$\frac{\pi}{2}$, 得 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$, 所以 $f(x) = \cos(4x - \frac{\pi}{3})$, 从而 $f(\frac{3\pi}{8}) = \cos(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 B 错误; 由 $2k\pi - \pi \leq 4x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 解得单调递增区间为 $[\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}]$, $k \in \mathbb{Z}$. 取 $k = 0$ 可知 C 正确; 由 $4x - \frac{\pi}{3} = k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 解得 $x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{24}, k \in \mathbb{Z}$. 取 $k = -1$ 可知 D 正确.

10. BD 【解析】本题考查函数的零点,考查数形结合的数学思想.

对于选项 A, 函数 $y = e^x$ 与 $y = x + 1$ 的图象相切于点 $(0, 1)$, 因此 $f(x) = e^x - x - 1$ 只有一个零点; 对于选项

B, 画出 $y=|x+1|$ 和 $y=\frac{1}{2}x+1$ 的图象(图略), 可知它们有两个交点; 对于选项 C, $f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2 \geq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上最多只有一个零点; 对于选项 D, 因为 $f'(x)=\frac{1-x}{x}$, 易知 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f(x)_{\max}=f(1)=1$, 所以 $f(x)$ 有两个零点. 故答案为 BD.

11. AB 【解析】本题考查弧长的计算, 考查运算求解能力.

不妨设 $AB=\sqrt{5}-1$, 则 $BC=2$, 所以 $l=\frac{1}{4} \times 2\pi \times (\sqrt{5}-1)=\frac{(\sqrt{5}-1)\pi}{2}$. 因为 $ED=3-\sqrt{5}$, 所以 $m=\frac{1}{4} \times 2\pi \times (3-\sqrt{5})=\frac{(3-\sqrt{5})\pi}{2}$. 同理可得 $n=\frac{1}{4} \times 2\pi \times (2\sqrt{5}-4)=\frac{(2\sqrt{5}-4)\pi}{2}$. 所以 $l=m+n$, $m^2=l \cdot n$, $2m \neq l+n$, $\frac{1}{m} \neq \frac{1}{l} + \frac{1}{n}$, 所以 A, B 正确, C, D 错误.

12. ABD 【解析】本题考查指数、对数的运算及比较大小, 考查推理论证能力.

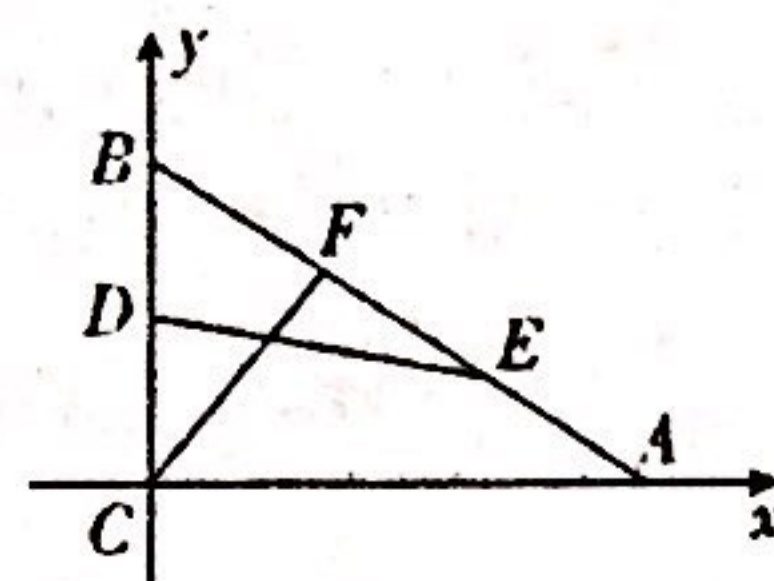
易知 $a>0, b<0$, 所以 A 正确; 因为 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \log_{0.5} 0.3 + \log_{0.5} 4 = \log_{0.5} 1.2 < 0$, 即 $\frac{a+b}{ab} < 0$. 又 $ab < 0$, 所以 $a+b > 0$. B 正确; 又 $\frac{1}{a} = \log_{0.5} 0.3 > 1, b = \log_4 0.5 = -\frac{1}{2}$, 所以 $\frac{1}{a} + b = \frac{1}{a} - \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$, 从而 $2(ab+1) > a$, C 错误; 又 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = (\log_{0.5} 0.3)^2 + (\log_{0.5} 4)^2 > 4 \log_2 \frac{10}{3} > \log_2 2^6 = 6$, 可知 D 正确. 综上, A, B, D 正确, C 错误.

13. 12 【解析】本题考查均值不等式的知识, 考查运算求解能力.

$$4a+9b \geq 2\sqrt{4a \cdot 9b} = 2\sqrt{36} = 12.$$

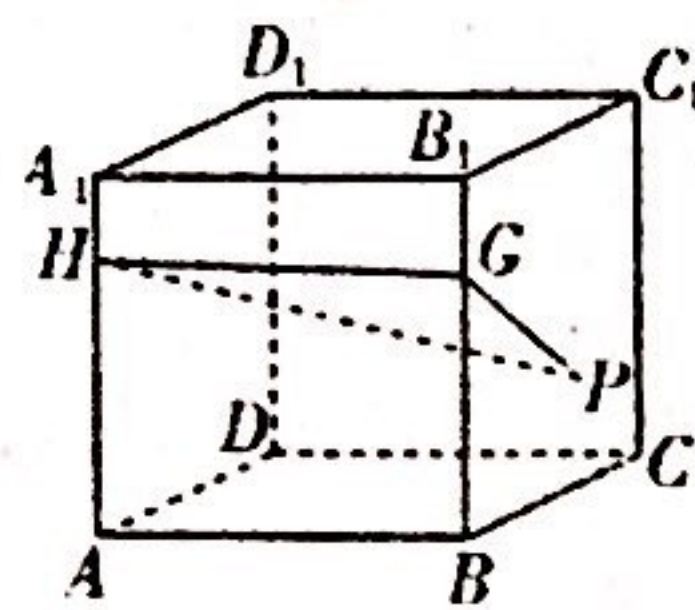
14. $\frac{14}{9}$ 【解析】本题考查平面向量的数量积, 考查运算求解能力.

如图, 建立直角坐标系 xOy , 则 $D(0, 1), E(2, \frac{2}{3}), F(1, \frac{4}{3}), \overrightarrow{DE} = (2, -\frac{1}{3}), \overrightarrow{CF} = (1, \frac{4}{3})$; 所以 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CF} = 2 - \frac{4}{9} = \frac{14}{9}$.



15. $\sqrt{13}-2$ 【解析】本题考查立体几何的有关知识, 考查空间想象能力.

如图, 作 $HG \perp BB_1$ 交 BB_1 于点 G , 则 $B_1G=1$. 因为 $HP=\sqrt{13}$, 所以 $GP=2$. 所以点 P 的轨迹是以 G 为圆心, 2 为半径的圆弧, 所以 CP 的最小值为 $CG-2=\sqrt{13}-2$.



16. 962 【解析】本题考查数列的有关知识, 考查逻辑推理能力.

由题知, 当 n 为奇数时, $a_n + a_{n+1} = n$, 于是 $a_1 + a_2 = 1, a_3 + a_4 = 3, a_5 + a_6 = 5, \dots$,

所以 $S_{60} = 1+3+5+\dots+59 = \frac{60 \times 30}{2} = 900$. 又因为当 n 为偶数时, $a_{n+1} - a_n = n$, 且 $a_n + a_{n-1} = n-1$, 所以两式相加可得 $a_{n+1} + a_{n-1} = 2n-1$, 于是 $a_{n+3} + a_{n+1} = 2n+3$, 两式相减得 $a_{n+3} - a_{n-1} = 4$. 所以 $a_{61} = 2 + 15 \times 4 = 62$, 故 $S_{61} = 900 + 62 = 962$.

17. 解: 选①

由 $a_{n+2} - a_n = 4$, 可知数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2, 2 分

又 $S_2 = 6$, 可得 $a_1 + a_1 + 2 = 6$, 得 $a_1 = 2$, 4 分

所以 $a_n = 2n, S_n = n^2 + n$ 6 分

可知 $\frac{1}{S_n} = \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, 8 分

数列 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 的前 n 项和为 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ 10 分

选②

设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,则由 $a_3+a_5=16, S_3+S_5=42$,得 $\begin{cases} 2a_1+6d=16, \\ 8a_1+13d=42, \end{cases}$ 2分

解得 $\begin{cases} a_1=2, \\ d=2, \end{cases}$ 4分,

所以 $a_n=2n, S_n=n^2+n$, 6分

可知 $\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, 8分

数列 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 的前 n 项和为 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$ 10分

选③

当 $n=1$ 时, $a_1=2$, 2分

当 $n=2$ 时, $2S_2=a_2+8$,解得 $d=2$ 4分

所以 $a_n=2n, S_n=n^2+n$, 6分

可知 $\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, 8分

数列 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 的前 n 项和为 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$ 10分

评分细则:

(1)不管补充的条件是哪个,只要算出 $a_n=2n, S_n=n^2+n$ 这一步都得6分;写出 $\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ 累计得8分,直到算出最后的答案得10分.

(2)其他解法根据评分标准依步骤给分.

18. 解:(1)由图可知, $A=3, \frac{T}{4}=3$,所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{6}$, 2分

所以 $f(x)=3\sin(\frac{\pi}{6}x+\varphi)$.

因为 $f(\frac{3}{2})=3$,所以 $\frac{\pi}{6}\times\frac{3}{2}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$,则 $\varphi=\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ 4分

因为 $0<\varphi<\pi$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 5分

故 $f(x)=3\sin(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{4})$ 6分

(2)函数 $y=f(x)+\sqrt{3}f(x+3)=3\sin(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{4})+3\sqrt{3}\sin[\frac{\pi}{6}(x+3)+\frac{\pi}{4}]$

$=3\sin(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{4})+3\sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{4})=6\sin(\frac{\pi}{6}x+\frac{7}{12}\pi)$ 9分

因为 $x\in[-\frac{9}{2}, \frac{1}{2}]$,所以 $\frac{\pi}{6}x+\frac{7}{12}\pi\in[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$ 10分

所以当 $\frac{\pi}{6}x+\frac{7}{12}\pi=\frac{\pi}{2}$,即 $x=-\frac{1}{2}$ 时, y 取最大值6;

当 $\frac{\pi}{6}x+\frac{7}{12}\pi=-\frac{\pi}{6}$,即 $x=-\frac{9}{2}$ 时, y 取最小值-3. 12分

评分细则:

(1)第一问中,写出 $\omega=\frac{\pi}{6}$ 得2分,写出 $\varphi=\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$,累计得4分,求出 $\varphi=\frac{\pi}{4}$,累计得5分,正确写出函数的解析式累计得6分;

(2)第二问中,写出 $y=6\sin(\frac{\pi}{6}x+\frac{7\pi}{12})$, 累计得 9 分, 写出 $\frac{\pi}{6}x+\frac{7\pi}{12}\in[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$, 累计得 10 分, 最后正确求出结果得满分;

(3)其他情况根据评分标准酌情给分.

19. (1)证明: 因为 M, N, P 分别是 AD, DD_1, CC_1 的中点,

所以 $MN \parallel AD_1, CN \parallel PD_1$ 1 分

又 $AD_1 \subset$ 平面 $MNC, MNC \subset$ 平面 MNC ,

所以 $AD_1 \parallel$ 平面 MNC 3 分

同理 $PD_1 \parallel$ 平面 MNC , 4 分

又 $AD_1 \cap PD_1 = D_1$,

所以平面 $MNC \parallel$ 平面 AD_1P 5 分

(2)解: 以 D 为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$, 则 $D(0,0,0)$,

$P(0,2,2), M(1,0,0), N(0,0,2), C(0,2,0)$,

$\overrightarrow{DP}=(0,2,2), \overrightarrow{MN}=(-1,0,2), \overrightarrow{MC}=(-1,2,0)$ 6 分

设平面 MNC 的法向量为 $n=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot n = -x+2z=0, \\ \overrightarrow{MC} \cdot n = -x+2y=0, \end{cases}$ 8 分

令 $z=1$, 得 $n=(2,1,1)$ 9 分

设直线 DP 与平面 MNC 所成角为 θ ,

则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{DP}, n \rangle| = \frac{|\overrightarrow{DP} \cdot n|}{|\overrightarrow{DP}| |n|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 11 分

所以直线 DP 与平面 MNC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 12 分

评分细则:

(1)第一问中, 也可以先建立空间直角坐标系, 用向量方法证明, 不管用哪种方法, 证出得 5 分;

(2)第二问中, 建立空间直角坐标系, 写出相关点的坐标和相关向量的坐标, 得 1 分, 计算出平面的法向量得 3 分, 整个题解答完全正确得满分;

(3)若用传统做法, 作出直线与平面所成的角得 1 分, 简单证明得 2 分, 整个题解答完全正确得满分.

20. (1)证明: 取 BD 的中点为 O , 连接 OA, OE .

因为 $BD \perp CD, BC=4, CD=2$,

所以 $BD=2\sqrt{3}, OB=\sqrt{3}$ 1 分

又 $AB=AD=2$, 所以 $BD \perp AO$, 且 $AO=1$ 2 分

在 $\triangle AOE$ 中, $EO=\frac{1}{2}CD=1, AE=\sqrt{2}$.

所以 $AO^2+OE^2=AE^2$, 即 $OE \perp AO$, 从而 $CD \perp AO$ 3 分

又 $CD \perp BD, BD \cap AO=O$, 所以 $CD \perp$ 平面 ABD 4 分

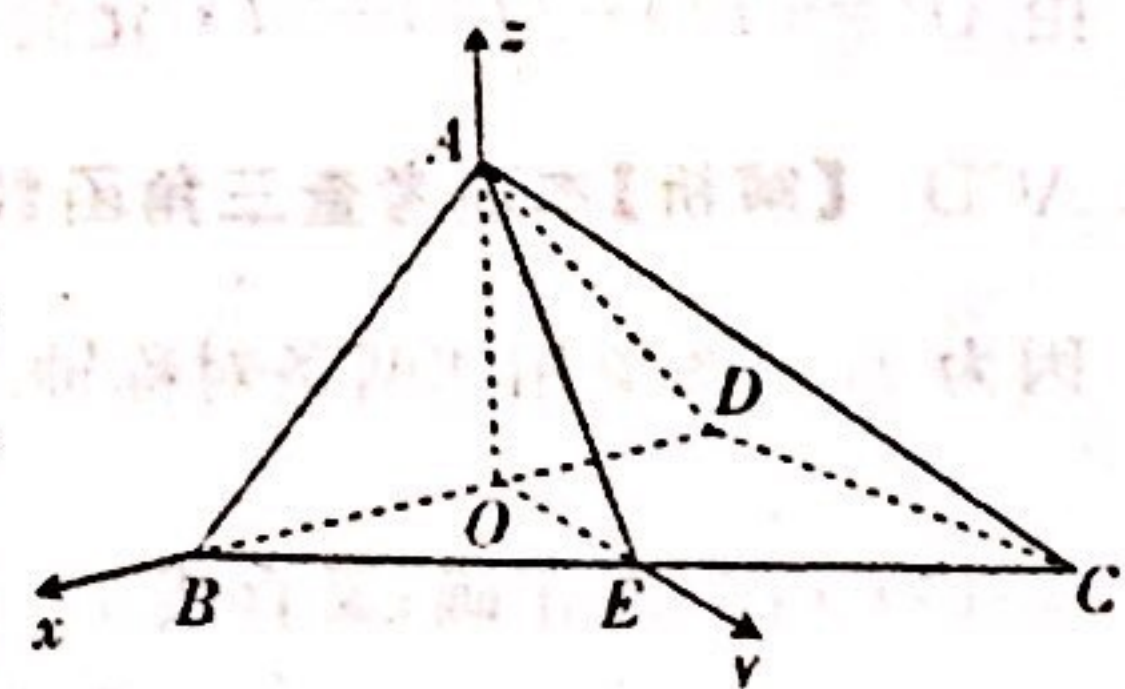
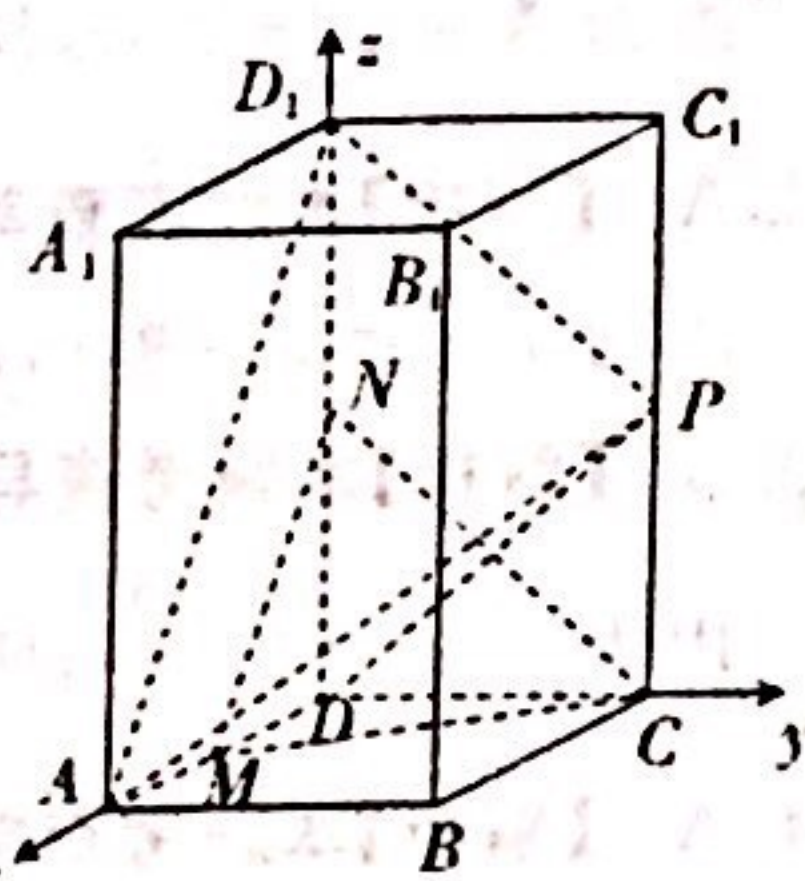
因为 $CD \subset$ 平面 ACD , 所以平面 $ACD \perp$ 平面 ABD 5 分

(2)解: 由(1)知 OB, OE, OA 两两垂直, 如图, 分别以 $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OA}$ 的方向为 x, y, z 轴正方向建立空间直角坐

标系 $O-xyz$, 则 $B(\sqrt{3}, 0, 0), C(-\sqrt{3}, 2, 0), D(-\sqrt{3}, 0, 0), A(0, 0, 1), \overrightarrow{AC}=(-\sqrt{3}, 2, -1), \overrightarrow{BC}=(-2\sqrt{3},$

$2, 0)$ 6 分

设 $m=(x, y, z)$ 是平面 ABC 的法向量, 可得 $\begin{cases} -\sqrt{3}x+2y-z=0, \\ -2\sqrt{3}x+2y=0, \end{cases}$ 令 $x=1$, 得 $m=(1, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ 8 分



设 $n=(x_1, y_1, z_1)$ 是平面 ACD 的法向量, 因为 $\overrightarrow{DC}=(0, 2, 0)$, $\overrightarrow{AC}=(-\sqrt{3}, 2, -1)$,

$$\text{则} \begin{cases} 2y_1=0, \\ -\sqrt{3}x_1+2y_1-z_1=0, \end{cases} \quad \text{令 } x_1=1, \text{ 得 } n=(1, 0, -\sqrt{3}). \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

设平面 ABC 与平面 ACD 所成的锐二面角为 θ , 则 $\cos \theta=|\cos \langle m, n \rangle|=\left|\frac{1-3}{\sqrt{7} \times 2}\right|=\frac{\sqrt{7}}{7}$, 即平面 ABC 与平面

ACD 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

评分细则:

(1)第一问中,也可以先建立空间直角坐标系,用向量方法证明,不管用哪种方法,证出得 5 分;

(2)第二问中,建立空间直角坐标系,写出相关点的坐标,得 1 分,计算出相关向量坐标,得 1 分,计算出平面的法向量各得 2 分,整个题完全正确得满分;

(3)若用传统做法,作出二面角的平面角得 1 分,简单证明得 2 分,整个题解答完全正确得满分.

21. 解:(1)因为 $a \geq -3, 3x \geq 3$,

所以 $3x+a \geq 0$, 从而 $f(x)=4x+a$. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

由于 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上是增函数, 所以 $f(1)+f(2)=10$,

即 $4+a+8+a=10$, 解得 $a=-1$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2)由题知 $f(x)_{\min}+g(x)_{\max} \geq 0$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

易知 $f(x)=|3x+a|+x$ 在 $(-\infty, -\frac{a}{3})$ 上单调递减, 在 $(-\frac{a}{3}, +\infty)$ 上单调递增. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

令 $2^x=t$, 则当 $x \in [1, 2]$ 时, $t \in [2, 4]$, 且 $y=4^x+a \cdot 2^{x+1}+1=t^2+2at+1$. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

若记 $h(t)=t^2+2at+1, t \in [2, 4]$, 则 $h(t)_{\max}=g(x)_{\max}$, 且知函数 $h(t)$ 的开口向上, 对称轴是 $t=-a$. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

①当 $-a \leq 3$, 即 $a \geq -3$ 时, $f(x)_{\min}=f(1)=|3+a|+1=4+a, g(x)_{\max}=g(2)=17+8a$,

所以 $4+a+17+8a=9a+21 \geq 0$, 解得 $a \geq -\frac{7}{3}$, 又因为 $a \geq -3$, 所以 $a \geq -\frac{7}{3}$; $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

②当 $-a \geq 6$, 即 $a \leq -6$ 时, $f(x)_{\min}=f(2)=|6+a|+2=-a-4, g(x)_{\max}=g(1)=5+4a$,

所以 $-a-4+5+4a=3a+1 \geq 0$, 解得 $a \geq -\frac{1}{3}$, 又因为 $a \leq -6$, 所以此时 a 无解; $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

③当 $3 < -a < 6$, 即 $-6 < a < -3$ 时, $f(x)_{\min}=f(-\frac{a}{3})=-\frac{a}{3}, g(x)_{\max}=g(1)=5+4a$,

所以 $-\frac{a}{3}+5+4a=\frac{11a}{3}+5 \geq 0$, 解得 $a \geq -\frac{15}{11}$, 又因为 $-6 < a < -3$, 所以此时 a 无解. $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $[-\frac{7}{3}, +\infty)$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

评分细则:

(1)第一问中,会去掉绝对值得到 $f(x)=4x+a$ 给 2 分,全部正确的得 4 分;

(2)第二问中,写到 $f(x)_{\min}+g(x)_{\max} \geq 0$ 这一步累计得 5 分,会判断 $f(x)$ 的单调性,累计得 6 分,通过换元法写出 $y=t^2+2at+1$, 累计得 7 分,第一次分类讨论正确写出 $a \geq -\frac{7}{3}$, 累计得 9 分,第二次分类讨论判断 a 无解,累计得 10 分,第三次分类讨论判断 a 无解,累计得 11 分,正确写出 a 的取值范围得满分;

(3)其他情况根据评分标准依步骤给分.

22. 解:(1)由已知得 $g(x)=f'(x)=e^x-2ax$, 所以 $g'(x)=e^x-2a$. $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

①当 $a \leq 0$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

②当 $a > 0$ 时, 令 $g'(x) > 0$, 则 $x > \ln 2a$; 令 $g'(x) < 0$, 则 $x < \ln 2a$.

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, \ln 2a)$ 上单调递减, 在 $(\ln 2a, +\infty)$ 上单调递增.

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

当 $a > 0$ 时, $g(x)$ 在 $(-\infty, \ln 2a)$ 上单调递减, 在 $(\ln 2a, +\infty)$ 上单调递增. 4 分

(2) $f'(x) = e^x - 2ax = 2x(\frac{e^x}{2x} - a), x \in (1, +\infty)$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $a = \frac{e^x}{2x}$ 5 分

设 $h(x) = \frac{e^x}{2x}$, 则 $h'(x) = \frac{(x-1)e^x}{2x^2}$ 6 分

当 $x > 1$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $h(x)$ 的值域是 $(\frac{e}{2}, +\infty)$ 7 分

当 $a \leq \frac{e}{2}$ 时, $f'(x) = 0$ 没有实根, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x) > f(1) = e - a \geq \frac{e}{2}$, 符合题意. 9 分

当 $a > \frac{e}{2}$ 时, $h(1) = \frac{e}{2} < a$,

所以 $h(x) = a$ 有唯一实根 $x_0 (x_0 > 1)$, 即 $f'(x) = 0$ 有唯一实根 x_0 , 10 分

当 $x \in (1, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递减,

所以 $f(x) < f(1) = e - a < \frac{e}{2}$, 不符合题意. 11 分

综上所述, $a \leq \frac{e}{2}$, 即 a 的取值范围是 $(-\infty, \frac{e}{2}]$ 12 分

评分细则:

(1) 第一问中, 求出 $g'(x) = e^x - 2a$ 得 1 分, 正确讨论 $a \leq 0$ 的情形得 1 分, 正确讨论 $a > 0$ 的情形累计得 4 分;

(2) 第二问中, 只要得到 $h'(x) = \frac{(x-1)e^x}{2x^2}$, 得 2 分, 求出 $h(x)$ 的值域是 $(\frac{e}{2}, +\infty)$, 得 1 分, 讨论 $a \leq \frac{e}{2}$ 的情

形, 累计得 9 分, 讨论 $a > \frac{e}{2}$ 的情形, 累计得 11 分, 正确解完本题得满分;

(3) 采用其他方法, 参照本评分标准依步骤给分.