

巴蜀中学 2021 届高三适应性月考卷 (九)

数 学

注意事项:

1. 答题前, 考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚.
2. 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号. 在试题卷上作答无效.
3. 考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并交回. 满分 150 分, 考试用时 120 分钟.

一、单项选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $N = \{x \mid x^2 = 4\}$, 则 $\complement_M N =$
 - A. $\{-1, 1\}$
 - B. $\{-1, 0, 1\}$
 - C. $\{-2, -1, 0, 1\}$
 - D. $\{-1, 0, 1, 2\}$
2. 已知复数 z 的共轭复数是 $\bar{z}$, 若 $z - 3\bar{z} = 1 + 2i$, 则 $|z| =$
 - A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 - B. $\frac{1}{2}$
 - C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$
 - D. $\frac{5}{2}$
3. 已知二面角 $\alpha - l - \beta$, 若直线 $m \subset \alpha$, 直线 $n \perp \beta$, 则 m, n 的位置关系是
 - A. 平行
 - B. 相交
 - C. 异面
 - D. 以上情况都有可能
4. 甲、乙、丙三人被系统随机地预约到 A, B, C 三家医院接种新冠疫苗, 每家医院恰有 1 人预约. 已知 A 医院接种的是只需要打一针的腺病毒载体新冠疫苗, B 医院接种的是需要打两针的灭活新冠疫苗, C 医院接种的是需要打三针的重组蛋白新冠疫苗, 问甲不接种只打一针的腺病毒载体新冠疫苗且丙不接种需要打三针的重组蛋白新冠疫苗的概率等于
 - A. $\frac{1}{3}$
 - B. $\frac{2}{3}$
 - C. $\frac{1}{2}$
 - D. $\frac{1}{9}$
5. 过坐标原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线, 则切点的纵坐标为
 - A. e
 - B. 1
 - C. $\frac{1}{\sqrt{e}}$
 - D. $\frac{1}{e}$
6. 已知 $\tan 2\alpha = -2\sqrt{2}$, 其中 α 是第三象限角, 则 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ 的值为
 - A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$
 - B. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$
 - C. $\frac{2}{3}$
 - D. $-\frac{2}{3}$

7. 城市道路由于通勤造成道路交通的早晚高峰. 一般地, 工作日早高峰时段通常在 7:00-9:00, 晚高峰时段通常在 17:00-19:00. 为了衡量某路段在某一段时间内的拥堵程度, 通常采用的指标之一是路段的汽车平均行程速度, 即在该时段通过该路段的汽车的平均速度. 路段通常可分为快速路、主干路、次干路、支路, 根据不同路段与汽车平均行程速度, 可将拥堵程度分为 1 到 5 级. 等级划分如下表 (单位: km/h):

	等级				
	1	2	3	4	5
快速路	>65	$(50, 65]$	$(35, 50]$	$(20, 35]$	≤ 20
主干路	>45	$(35, 45]$	$(25, 35]$	$(15, 25]$	≤ 15
次干路	>35	$(25, 35]$	$(15, 25]$	$(10, 15]$	≤ 10
支路	>35	$(25, 35]$	$(15, 25]$	$(10, 15]$	≤ 10

重庆市的黄花园大桥横跨嘉陵江之上, 是连接渝中区和江北区的主干路. 今在某高峰时段监测黄花园大桥的汽车平均行程速度, 将得到的数据绘制成频率分布直方图如图 1, 根据统计学知识估计该时段黄花园大桥拥堵程度的等级为

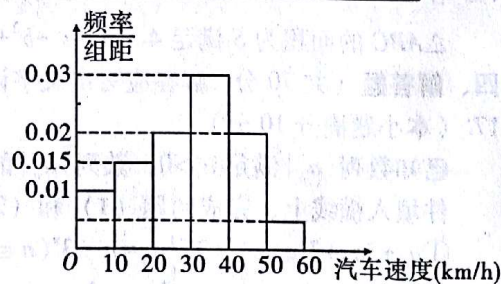


图 1

- A. 2 级
B. 3 级
C. 4 级
D. 5 级
8. 已知圆 $C: (x - \cos\theta)^2 + (y - \sin\theta)^2 = 3$ 交直线 $y = \sqrt{3}x - 1$ 于 A, B 两点, 则对于 $\theta \in \mathbf{R}$, 线段 AB 长度的最小值为

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

二、多项选择题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项是符合题目要求的. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 3 分)

9. 已知正实数 a, b 满足 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 1$, 则下列不等式成立的有

- A. $2^a + 2^b \geq 2\sqrt{2}$ B. $a^2 + b^2 < 1$ C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 4$ D. $a + \frac{1}{a} \geq 2$

10. 函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & (x \leq 0) \\ \log_2 x & (x > 0) \end{cases}$, 则下列说法正确的有

- A. 函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调递增函数
B. 对于任意实数 a , 不等式 $f(a^2 + 1) \geq f(-a)$ 恒成立
C. 若 $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $x_1 + x_2 < 0$
D. 方程 $f(x) - f(-x) = 0$ 有 3 个不相等实数解

11. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 + a_2 = 2, a_{n+1} = S_n + 1$, 则

- A. 数列 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列 B. $S_6 = 47$
C. $\frac{a_n}{S_n}$ 既无最大值也无最小值 D. $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < \frac{10}{3}$

12. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过右焦点 F_2 且斜率为 k 的直线交右支于 P, Q 两点, 以 F_1Q 为直径的圆过点 P , 则

- A. 若 $\triangle PF_1Q$ 的内切圆与 PF_1 相切于 M , 则 $F_1M = a$
B. 若双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$, 则 $\triangle PF_1Q$ 的面积为 24
C. 存在离心率为 $\sqrt{5}$ 的双曲线满足条件
D. 若 $3PF_2 = QF_2$, 则双曲线 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填写在答题卡相应位置上)

13. 已知平面内的 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 两个向量同时满足: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3} |\vec{a} + \vec{b}|$, 则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角等于 _____.

14. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ 的右焦点为 F , 若过 F 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 则 $\frac{|AF|}{|BF|}$ 的取值范围是 _____.

15. 端午节是中国的传统节日, “咸蛋黄” 口味的粽子也越来越受人们的喜爱, 高三年级各班进行了包粽子大赛, 我们把粽子的形状近似为一个正四面体, 蛋黄近似为一个球体, 当这个球体与正四面体的六条棱都相切时小组获得奖励, 若某小组获得了奖励, 他们包的粽子棱长为 3, 则放入粽子的蛋黄的表面积等于 _____.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $2b\cos C + 2c\cos B = a^2$, 则 $a =$ _____; 若又知 $\triangle ABC$ 的面积为 S 满足 $4\sqrt{3}S = a^2 + b^2 + c^2$, 则 $S =$ _____. (第一空 2 分, 第二空 3 分)

四、解答题 (共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n > 0$, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 _____, 在以下三个条件中任选一个条件填入横线上, 完成问题 (1) 和 (2):

① $a_1 + 3a_2 + 3^2a_3 + \dots + 3^{n-1}a_n = n \cdot 3^n (n \in \mathbb{N}_+)$;

② 数列 $\{c_n\}$ 满足: $c_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$, $a_1 = 3$, 且 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 $\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{3}$;

③ $S_n = \frac{(a_n + 1)^2}{4} - 1 (n \in \mathbb{N}_+)$.

问题: (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 数列 $\{b_n\}$ 是首项和公比均为 2 的等比数列, 求数列 $\{a_{b_n}\}$ 中有多少个小于 2021 的项.

18. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2\cos^2 \frac{x}{2} + a$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 的最小值为 0.

(1) 求常数 a 的值;

(2) 若把 $y = f(x)$ 图象上的点纵坐标不变, 横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍 (其中 $\omega > 0$), 得到 $y = g(x)$ 的图象. 若 $y = g(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上有且仅有 2 个零点, 求 ω 的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

如图 2, 在直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$, 点 $M(x_0, 2) (x_0 > 0)$ 是抛物线 C 上的一点, 点 M 到焦点的距离为 $\frac{5}{2}$.

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 过 C 上异于点 M 的两点 A, B 分别作 x 轴的垂线交直线 BM, AM 于点 P, Q , 求直线 PQ 的斜率.

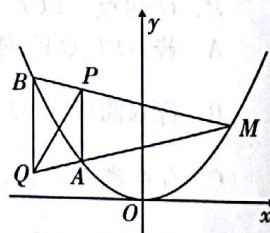


图 2

20. (本小题满分 12 分)

随着校运会的临近,某班甲、乙两名同学开始记录自己 100 米短跑的成绩,他们二人的某 10 次的成绩(单位:秒)如下:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
甲	11.6	12.2	13.2	13.9	14.0	11.5	13.1	14.5	11.7	14.3
乙	12.3	13.3	14.3	11.7	12.0	12.8	13.2	13.8	14.1	12.5

(1) 请完成如图 3 的样本数据的茎叶图(在答题卡中),并分析甲、乙二人的成绩情况;

(2) 从甲、乙两人的 10 次成绩中各随机抽取一次分别记为 x, y , 定义随机变量 $\xi = \begin{cases} 1(x > y), \\ 0(x = y), \\ -1(x < y), \end{cases}$ 求 ξ 的分布列和期望.



图 3

21. (本小题满分 12 分)

如图 4,在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,底面 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形,侧面 ACC_1A_1 为等腰梯形,且 $A_1C_1 = AA_1 = 1$, D 为 A_1C_1 的中点.

(1) 证明: $AC \perp BD$;

(2) 记二面角 A_1-AC-B 的大小为 θ , $\theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 时,求直线 AA_1 与平面 BB_1C_1C 所成角的正弦值的取值范围.

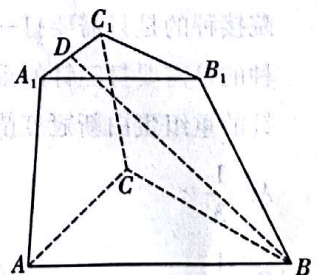


图 4

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^{-x} - \frac{1}{x+1}$, $g(x) = \ln(x+1) - ax^2 - 2ax$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 证明: 当 $x > 0$ 时, $f(x) < 0$;

(2) 若 $g(x) < f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围.