

石家庄市 2021 届高中毕业班教学质量检测(二)

数 学

(时间 120 分钟, 满分 150 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题的答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上的对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。
3. 在答题卡上与题号相对应的答题区域内答题, 写在试卷、草稿纸上或答题卡非题号对应的答题区域的答案一律无效。不得用规定以外的笔和纸答题, 不得在答题卡上做任何标记。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 i 为虚数单位, 复数 $z = \frac{1-i^{2021}}{1-i^{2018}}$, 则 z 的虚部为()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}i$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}i$

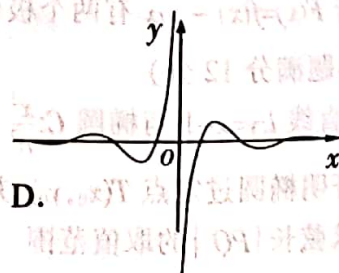
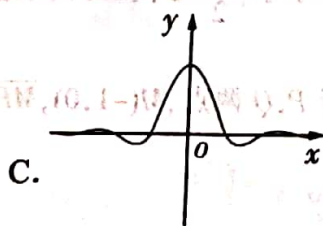
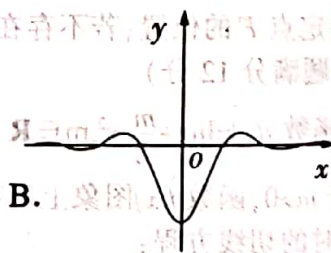
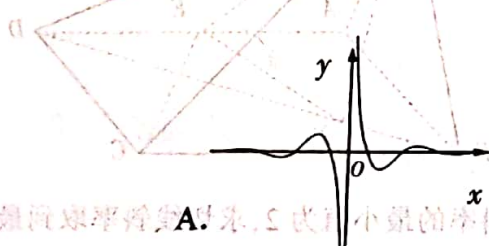
2. 抛物线 $y = ax^2$ 经过点 $M(2, 1)$, 则 M 到焦点 F 的距离为

- A. $\frac{17}{16}$ B. 2 C. 3 D. $\frac{33}{16}$

3. 已知集合 $A = \{0, a+b, \frac{a}{b}\}$, $B = \{0, 1-b, 1\}$, $(a, b \in \mathbb{R})$, 若 $A=B$, 则 $a+2b=$

- A. -2 B. 2 C. -1 D. 1

4. 函数 $f(x) = \frac{\cos(\pi \cdot x)}{e^x - e^{-x}}$ 的图象大致为



5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x \leq 0 \\ -\log_{\frac{1}{2}}(x+1), & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(a)=1$, 则 $f(a-2)=$

A. -1

B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 1

6. 在边长为 1 的等边 $\triangle ABC$ 所在平面内, 有一点 P 满足 $2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} =$

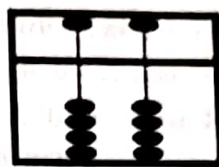
A. $-\frac{1}{6}$

B. $\frac{3}{16}$

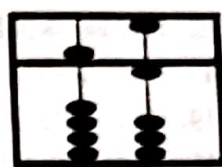
C. $\frac{1}{6}$

D. $-\frac{3}{16}$

7. 算盘是一种手动操作计算辅助工具, 它起源于中国, 迄今已有 2600 多年的历史, 是中国古代的一项重要发明, 算盘有很多种类, 现有一种算盘(如图一), 共两档, 自右向左分别表示个位和十位, 档中横以梁, 梁上一珠拨下, 记作数字 5, 梁下四珠, 上拨每珠记作数字 1 (例如图二中算盘表示整数 51). 如果拨动图一算盘中的三枚算珠, 可以表示不同整数的个数为



图一



图二

A. 16

B. 15

C. 12

D. 10

8. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 底面 ABC , $BC \perp PC$, $PA=AC=\sqrt{2}$, $BC=a$, 动点 Q 从 B 点出发, 沿外表面经过棱 PC 上一点到点 A 的最短距离为 $\sqrt{10}$, 则该棱锥的外接球的表面积为

A. 5π

B. 8π

C. 10π

D. 20π

二、选择题: 本小题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 某校举行学习党史知识比赛, 甲、乙两个班各有 10 名同学参加, 根据成绩绘制茎叶图如下, 则

甲班	乙班
6	6 8 8 8
7 4 3	7 4 6 7
8 8 5 4 2	8 6 8 9
5 4	9

A. $\bar{x}_{\text{甲}} > \bar{x}_{\text{乙}}$

B. $\bar{x}_{\text{甲}} < \bar{x}_{\text{乙}}$

C. $S^2_{\text{甲}} < S^2_{\text{乙}}$

D. $S^2_{\text{甲}} > S^2_{\text{乙}}$

10. 若实数 a, b 满足 $a^4 < a^3b$, 则下列选项中一定成立的有

A. $a^2 < b^2$

B. $a^3 < b^3$

C. $e^{a-b} < 1$

D. $\ln(\frac{a}{b}) < 0$

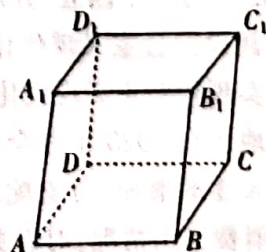
11. 平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 各棱长均为 2, 设 $\angle A_1AB = \angle A_1AD = \angle DAB = \theta$, 则

A. 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $AC_1 = 2\sqrt{3}$.

B. θ 的取值范围为 $(0, \frac{2\pi}{3})$.

C. θ 变大时, 平行六面体的体积也越来越大.

D. θ 变化时, AC_1 和 BD 总垂直.



12. 已知双曲线 $C: \frac{y^2}{a^2} - x^2 = 1 (a > 0)$, 其上、下焦点分别为 F_1, F_2 , O 为坐标原点. 过双曲线上一点 $M(x_0, y_0)$ 作直线 l , 分别与双曲线的渐近线交于 P, Q 两点, 且点 M 为 PQ 中点, 则下列说法正确的是
- A. 若 $l \perp y$ 轴, 则 $|PQ| = 2$.
- B. 若点 M 的坐标为 $(1, 2)$, 则直线 l 的斜率为 $\frac{1}{4}$.
- C. 直线 PQ 的方程为 $\frac{y_0 y}{a^2} - x_0 x = 1$.
- D. 若双曲线的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 则三角形 OPQ 的面积为 2.

三、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 a_9 - 2a_7 = 0$, 则 $a_7 =$ _____.
14. 若命题 " $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - 2x_0 + m < 0$ " 为真命题, 则实数 m 的取值范围为 _____.
15. 某科考队有甲、乙、丙三个勘探小组, 每组三名队员. 该队执行考察任务时, 每人佩戴一部对讲机与总部联系, 若每部对讲机在某时段能接通的概率均为 $\frac{1}{2}$, 且对讲机能否接通相互独立. 甲组在该时段能联系上总部的概率为 _____, 在该时段至少有两个勘探小组可以与总部取得联系的概率为 _____. (第一个空 2 分, 第二个空 3 分)
16. 已知函数 $f(x) = ax + b \cos 2x + c \sin 2x$, 其中 $a, b, c \in \mathbf{R}, b^2 + c^2 = \frac{1}{4}$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数. 若存在 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ 使得 $f'(x_1) \cdot f'(x_2) = -1$ 成立, 则 $a + b + c$ 的最大值为 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

在① $a_5 = 6, a_1 + S_3 = 50$; ② $S_{12} > S_9, a_2 + a_{21} < 0$; ③ $S_9 > 0, S_{10} < 0$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中并解决问题.

问题: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 _____, 判断 S_n 是否存在最大值, 若存在, 求出 S_n 取最大值时 n 的值; 若不存在, 说明理由.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答记分.

18. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $\cos(2\pi - B) + \sin(\pi + B) = \frac{1}{5}$.

(1) 求 $\sin B$;

(2) 若 $\cos A = -\frac{5}{13}, a = 5$ 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. (本小题满分 12 分)

2021 年是“十四五”开局之年, 是在全面建成小康社会、实现第一个百年奋斗目标之后, 全面建设社会主义现代化国家新征程开启之年, 新征程的第一阶段是 2020 年到 2035 年, 基本实现社会主义现代化, 其中保障农村农民的生活达到富裕是一个关键指标.

某地区在 2020 年底全面建成小康社会, 随着实施乡村振兴战略规划, 该地区农村居民的收入逐渐增加, 可支配消费支出也逐年增加. 该地区统计了 2016 年—2020 年农村居民人均消费支出情况, 对有关数据处理后, 制作如图 1 的折线图(其中变量 y (万元)表示该地区农村居民人均年消费支出, 年份用变量 t 表示, 其取值依次为 1, 2, 3, …).



- (1)由图1可知,变量 y 与 t 具有很强的线性相关关系,求 y 关于 t 的回归方程,并预测2021年该地区农村居民人均消费支出;
- (2)在国际上,常用恩格尔系数(其含义是指食品类支出总额占个人消费支出总额的比重)来衡量一个国家和地区人民生活水平的状况.根据联合国粮农组织的标准:恩格尔系数在40%~50%为小康,30%~40%为富裕.已知2020年该地区农村居民平均消费支出构成如图2所示,预测2021年该地区农村居民食品类支出比2020年增长3%,从恩格尔系数判断2021年底该地区农村居民生活水平能否达到富裕生活标准.

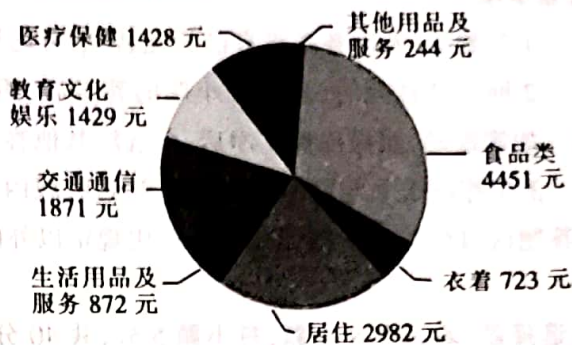
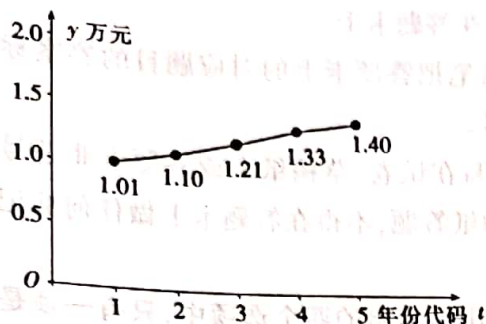


图1 2016~2020年该地区农村居民人均消费支出 图2 2020年该地区农村居民人均消费支出构成

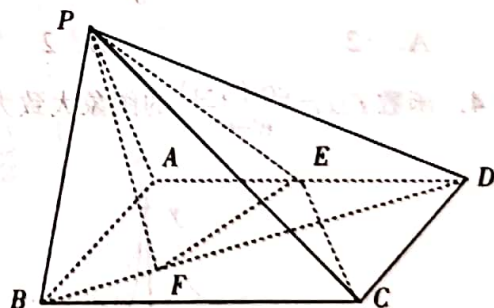
参考公式:回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

20. (本小题满分12分)

如图,四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为正方形, $\triangle PAB$ 为等边三角形,平面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$, E 为 AD 的中点.

- (1)求证: $CE \perp PD$;
- (2)在线段 BD (不包括端点)上是否存在点 F ,使直线 AP 与平面 PEF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$,若存在,确定点 F 的位置;若不存在,请说明理由.



21. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{m}{2}x^2, m \in \mathbb{R}$

- (1)若 $m > 0$,函数 $f(x)$ 图象上所有点处的切线中,切线斜率的最小值为2,求切线斜率取到最小值时的切线方程;
- (2)若 $F(x) = f(x) - mx$ 有两个极值点,且所有极值的和不少于 $-\frac{e^2}{2} - 3$,求 m 的取值范围;

22. (本小题满分12分)

已知直线 $l: y = x - 1$ 与椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 1, b > 0)$ 相交于 P, Q 两点, $M(-1, 0), \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0$

- (1)证明椭圆过定点 $T(x_0, y_0)$,并求出 $x_0^2 + y_0^2$ 的值;
- (2)求弦长 $|PQ|$ 的取值范围.

