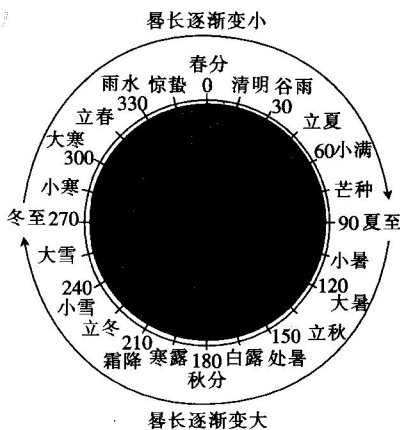




7. P 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上一点, F_1, F_2 分别为其左、右焦点, O 为坐标原点. 若 $|OP| = b$, 且 $\sin \angle PF_2F_1 = 3 \sin \angle PF_1F_2$, 则 C 的离心率为

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{6}$

8. 在一次“概率”相关的研究性活动中, 老师在每个箱子中装了 10 个小球, 其中 9 个是白球, 1 个是黑球, 用两种方法让同学们来摸球. 方法一: 在 20 箱中各任意摸出一个小球; 方法二: 在 10 箱中各任意摸出两个小球. 将方法一、二至少能摸出一个黑球的概率分别记为 p_1 和 p_2 , 则

A. $p_1 < p_2$ B. $p_1 = p_2$
C. $p_1 > p_2$ D. 以上三种情况都有可能

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

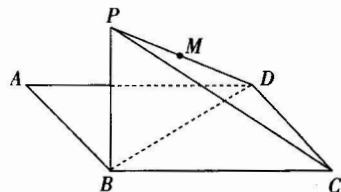
9. 在 $(3x - \frac{1}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式中, 各项系数和与二项式系数和之和为 128, 则

A. 二项式系数和为 64 B. 各项系数和为 64
C. 常数项为 -135 D. 常数项为 135

10. 已知函数 $f(x) = 2a \ln x + x^2 + b$.

A. 当 $a = -1$ 时, $f(x)$ 的极小值点为 $(1, 1+b)$
B. 若 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 则 $a \in [-1, +\infty)$
C. 若 $f(x)$ 在定义域内不单调, 则 $a \in (-\infty, 0)$
D. 若 $a = -\frac{3}{2}$ 且曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与曲线 $y = -e^x$ 相切, 则 $b = -2$

11. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = 1, AD = 2, \angle A = 60^\circ$, 沿对角线 BD 将 $\triangle ABD$ 折起到 $\triangle PBD$ 的位置, 使得平面 $PBD \perp$ 平面 BCD , 下列说法正确的有



A. 平面 $PCD \perp$ 平面 PBD
B. 三棱锥 $P-BCD$ 四个面都是直角三角形

C. PD 与 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

D. 过 BC 的平面与 PD 交于 M , 则 $\triangle MBC$ 面积的最小值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$

12. 已知函数 $f(x) = 2a \sin \omega x \cos \omega x - 2 \cos^2 \omega x + 1 (\omega > 0, a > 0)$, 若 $f(x)$ 的最小正周期为 π , 且对任意的 $x \in \mathbf{R}, f(x) \geq f(x_0)$ 恒成立, 下列说法正确的有

A. $\omega = 2$

B. 若 $x_0 = -\frac{\pi}{6}$, 则 $a = \sqrt{3}$

C. 若 $f(x_0 - \frac{\pi}{2}) = 2$, 则 $a = \sqrt{3}$

D. 若 $g(x) = f(x) - 2|f(x)|$ 在 $(x_0 - \frac{3\pi}{4}, x_0 - \theta)$ 上单调递减, 则 $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{3\pi}{4}$

第 II 卷

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知单位向量 a, b 满足 $|a - 2b| = \sqrt{3}$, 则 a 与 b 的夹角为 $\underline{\hspace{1cm}}$.

14. 函数概念最早出现在格雷戈里的文章《论圆和双曲线的求积》(1667 年) 中. 他定义函数是这样一量: 它是从一些其他量出发, 经过一系列代数运算而得到的, 或者经过任何其他可以

想象到的运算得到的. 若一个量 $c=a+b$, 而 c 所对应的函数值 $f(c)$ 可以通过 $f(c)=f(a) \cdot f(b)$ 得到, 并且对另一个量 d , 若 $d>c$, 则都可以得到 $f(d)>f(c)$. 根据自己所学的知识写出一个能够反映 $f(c)$ 与 c 的函数关系式: ▲.

15. 直线 $l: (2a-1)x + (a-3)y + 4-3a=0$ 与圆 $(x-2)^2 + y^2 = 9$ 相交于 A, B 两点, 则 $|AB|$ 的最小值为 ▲; 此时 $a =$ ▲. (本题第一空 3 分, 第二空 2 分)

16. 数学中有许多形状优美、寓意独特的几何体, “等腰四面体”就是其中之一, 所谓等腰四面体, 就是指三组对棱分别相等的四面体. 关于“等腰四面体”, 以下结论正确的序号是 ▲.

①“等腰四面体”每个顶点出发的三条棱一定可以构成三角形;

②“等腰四面体”的四个面均为全等的锐角三角形;

③三组对棱长度分别为 5, 6, 7 的“等腰四面体”的体积为 $2\sqrt{95}$;

④三组对棱长度分别为 a, b, c 的“等腰四面体”的外接球直径为 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边. 已知 $a=3b\sin A, a=3, c=3\sqrt{2}$.

(1) 若 $b<c$, 求 b ;

(2) 求 $\cos 2C$.

18. (12 分)

为了解华人社区对于新冠疫苗的想法与态度, 美中亚裔健康协会日前通过社交媒体, 进行了小规模的社区调查, 结果显示, 多达 73.4% 的华人受访者, 最担心接种疫苗后会有“副作用”. 其实任何疫苗都有一定的副作用, 新冠疫苗接种后也是有一定副作用的, 这跟个人的体质有关系, 有的人会出现副作用, 而有的人不会出现副作用. 在新冠疫苗的副作用中, 有发热、疲乏、头痛、注射部位的疼痛等表现. 为了了解某种疫苗是否会出现疲乏症状的副作用, 某组织随机抽取了某地 200 人进行调查, 得到统计数据如下:

	无疲乏症状	有疲乏症状	总计
未注射疫苗	100	20	120
注射疫苗	x	y	n
总计	160	m	200

(1) 求 2×2 列联表中的数据 x, y, m, n 的值, 并确定能否有 85% 的把握认为有疲乏症状与注射此种疫苗有关;

(2) 从注射疫苗的 n 人中按是否有疲乏症状, 采用分层抽样的方法抽出 8 人, 再从 8 人中随机抽取 3 人做进一步调查. 若初始总分为 10 分, 抽到的 3 人中, 每有一人有疲乏症状减 1 分, 每有一人没有疲乏症状加 2 分, 设得分结果总和为 X , 求 X 的分布列和数学期望.

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(c+d)(b+d)}, n=a+b+c+d$.

$P(K^2 \geq k_0)$	0.150	0.100	0.050	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

19. (12 分)

已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_{n+1} - 3a_n + 2a_{n-1} = 1, a_1 = 1, a_2 = 4$.

(1) 证明: 数列 $\{a_{n+1} - a_n + 1\}$ 是等比数列.

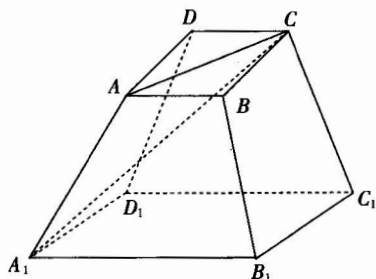
(2) 求 S_n .

20. (12 分)

如图, 在四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面为矩形, 平面 $AA_1D_1D \perp$ 平面 CC_1D_1D , 且 $CC_1 = CD = DD_1 = \frac{1}{2}C_1D_1 = 1$.

(1) 证明: $AD \perp$ 平面 CC_1D_1D .

(2) 若 A_1C 与平面 CC_1D_1D 所成角为 $\frac{\pi}{3}$, 求二面角 $C-AA_1-D$ 的余弦值.



21. (12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} + a \ln x (a \in \mathbf{R})$, $g(x) = x^2 - x - \frac{1}{x}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若函数 $F(x) = f(x) + g(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 且曲线 $y = F(x)$ 在 $x = \sqrt{x_1 x_2}$ 处的切线方程为 $y = G(x)$, 求使不等式 $F(x) < G(x)$ 成立的 x 的取值范围.

22. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(c, 0)$, 离心率 $e = \frac{1}{2}$.

(1) 若 P 为椭圆 C 上一动点, 证明 P 到 F 的距离与 P 到直线 $x = \frac{a^2}{c}$ 的距离之比为定值, 并求出该定值.

(2) 设 $c = 1$, 过定点 $(0, c)$ 且斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 在 y 轴上是否存在一点 Q , 使得 y 轴始终平分 $\angle MQN$? 若存在, 求出 Q 点的坐标; 若不存在, 请说明理由.

湖南省 2021 届高三模拟第三次考试

数学参考答案

1. D 因为 $M = \{x | x > 1\}$, $N = \{x | -\sqrt{10} < x < \sqrt{10}\}$, 所以 $M \cap N = \{x | 1 < x < \sqrt{10}\}$.
2. B 由题意知 $z = 2 - i$, 所以 $\frac{2z}{z-1} = \frac{2(2-i)}{1-i} = \frac{2(2-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 3 + i$.
3. A 粮食加工品店需要被抽检 $\frac{100}{20+100+15} \times 27 = 20$ 家.
4. C 因为点 $A(a, 2)$ 到 C 的准线的距离为 4, 所以 $\frac{1}{4m} + 2 = 4$, 得 $m = \frac{1}{8}$.
5. D 设从夏至到冬至, 每个节气暑长为 a_n , 即夏至时暑长为 $a_1 = 15$, 冬至时暑长为 $a_{13} = 135$, 由每个节气暑长损益相同可知, $a_{n+1} - a_n = \text{常数}$, 所以 $\{a_n\}$ 为等差数列. 设公差为 d , 由题意知, $a_{13} = a_1 + 12d = 15 + 12d = 135$, 解得 $d = 10$, 则 $a_4 = a_1 + 3d = 15 + 30 = 45$, 四十五寸即四尺五寸.
6. C $v = v_0 \ln \frac{M}{m} = 1000 \times \ln 500 = 1000 \times \frac{\lg 500}{\lg e} = 1000 \times \frac{3 - \lg 2}{\lg e} \approx 6219 \text{ m/s}$.
7. B 由 $\sin \angle PF_2 F_1 = 3 \sin \angle PF_1 F_2$ 及正弦定理可得 $|PF_1| = 3|PF_2|$.
 因为 $|PF_1| - |PF_2| = 2a$, 所以 $|PF_2| = a$, $|PF_1| = 3a$.
 因为 $|OF_2| = c$, $|OP| = b$, 所以 $\angle OPF_2 = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\cos \angle OF_2 P = \frac{a}{c}$.
 在 $\triangle F_1 F_2 P$ 中, $\cos \angle F_1 F_2 P = \frac{a^2 + (2c)^2 - (3a)^2}{2a \cdot 2c} = \cos \angle OF_2 P = \frac{a}{c}$,
 化简得 $c = \sqrt{3}a$, 所以 C 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{3}$.
8. A 方法一: 每箱中的黑球被选中的概率为 $\frac{1}{10}$, 所以至少摸出一个黑球的概率 $p_1 = 1 - (\frac{9}{10})^{20}$.
 方法二: 每箱中的黑球被选中的概率为 $\frac{1}{5}$, 所以至少摸出一个黑球的概率 $p_2 = 1 - (\frac{4}{5})^{10}$.
 $p_1 - p_2 = (\frac{4}{5})^{10} - (\frac{9}{10})^{20} = (\frac{4}{5})^{10} - (\frac{81}{100})^{10} < 0$, 则 $p_1 < p_2$.
9. ABD 在 $(3x - \frac{1}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式中, 各项系数和与二项式系数和之和为 128,
 令 $x = 1$, 得各项系数和为 2^n , 二项式系数和为 2^n , 则 $2 \times 2^n = 128$, 得 $n = 6$, 即二项式系数和为 64, 各项系数和也为 64. $(3x - \frac{1}{\sqrt{x}})^6$ 展开式的通项为 $T_{k+1} = C_6^k \cdot (3x)^{6-k} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{x}})^k = C_6^k \cdot (-1)^k 3^{6-k} \cdot x^{6-\frac{3}{2}k}$,
 令 $6 - \frac{3}{2}k = 0$, 得 $k = 4$, 因此, 展开式中的常数项为 $T_5 = C_6^4 \cdot (-1)^4 \cdot 3^2 = 135$.
10. BC 极小值点为一个实数, 故 A 不正确.
 由 $f'(x) = \frac{2a}{x} + 2x \geq 0$, 可得 $a \geq -x^2$. 因为 $x \geq 1$, 所以 $a \geq -1$, 故 B 正确.
 $f'(x) = \frac{2a+2x^2}{x}$, 当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立; 当 $a < 0$ 时, $f'(x)$ 不恒为正数. 所以 $f(x)$ 不单调, 故 C 正确.
 因为 $a = -\frac{3}{2}$, 所以 $f(x) = -3 \ln x + x^2 + b$. 因为 $f'(x) = -\frac{3}{x} + 2x^2$, 所以 $f'(1) = -1$. 因为 $f(1) = b + 1$, 所以切线方程为 $y = -x + b + 2$. 设直线 $y = -x + b + 2$ 与曲线 $y = -e^x$ 相切的切点的横坐标为 x_0 , 则 $-e^{x_0} = -1$, 所以 $x_0 = 0$, 即切点坐标为 $(0, -1)$, 代入 $y = -x + b + 2$, 可得 $b = -3$. 故 D 错误.
11. ABD 在 $\triangle BCD$ 中, 因为 $CD = 1$, $BC = 2$, $\angle C = 60^\circ$, 所以 $BD = \sqrt{3}$, 所以 $BD^2 + CD^2 = BC^2$, 所以 $CD \perp BD$.
 因为平面 $PBD \perp$ 平面 BCD 且交于 BD , 所以 $CD \perp$ 平面 PBD , 所以 $CD \perp PD$.
 同理 $PB \perp$ 平面 BCD . 因为 $CD \subseteq$ 平面 PCD , 所以平面 $PCD \perp$ 平面 PBD , 所以 A, B 正确.
 以 D 为坐标原点, 建立如图所示空间直角坐标系 $D-xyz$, 则 $B(\sqrt{3}, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $P(\sqrt{3}, 0, 1)$. 因为 $\overrightarrow{DP} =$

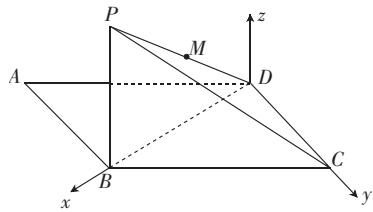
$$(\sqrt{3}, 0, 1), \overrightarrow{BC} = (-\sqrt{3}, 1, 0), \text{ 所以 } \cos \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DP} \rangle = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DP}}{|\overrightarrow{BC}| |\overrightarrow{DP}|} = -\frac{3}{4},$$

所以 PD 与 BC 所成角的余弦值为 $\frac{3}{4}$, 故 C 错误.

因为 M 在线段 PD 上, 设 $M(\sqrt{3}a, 0, a)$, 则 $\overrightarrow{MB} = (\sqrt{3} - \sqrt{3}a, 0, -a)$,

$$\text{所以 } M \text{ 到 } BC \text{ 的距离 } d = \sqrt{|\overrightarrow{MB}|^2 - \left(\frac{\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} \right)^2} = \sqrt{\frac{7}{4}a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{3}{4}} \\ = \sqrt{\frac{7}{4}\left(a - \frac{3}{7}\right)^2 + \frac{3}{7}},$$

当 $a = \frac{3}{7}$ 时, $d_{\min} = \frac{\sqrt{21}}{7}$, 所以 $\triangle MBC$ 面积的最小值为 $\frac{1}{2}BC \cdot d = \frac{\sqrt{21}}{7}$, 故 D 正确.



12. BCD 因为 $f(x) = 2a \sin \omega x \cos \omega x - 2 \cos^2 \omega x + 1 = a \sin 2\omega x - \cos 2\omega x = \sqrt{a^2 + 1} \sin(2\omega x - \varphi)$,

其中 $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$, $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$. 因为 $f(x)$ 的最小正周期为 π , 所以 $\omega = 1$, 故 A 错误.

因为对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geq f(x_0)$ 恒成立, 所以 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的最小值.

若 $x_0 = -\frac{\pi}{6}$, 则 $2 \times (-\frac{\pi}{6}) - \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, $\varphi = \frac{\pi}{6} - 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$.

所以 $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a = \sqrt{3}$, 故 B 正确.

因为 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的最小值, 所以 $f(x_0 - \frac{\pi}{2})$ 为最大值, 所以 $\sqrt{a^2 + 1} = 2$, 所以 $a = \sqrt{3}$, 故 C 正确.

因为当 $x \in (x_0 - \frac{3\pi}{4}, x_0 - \frac{\pi}{2})$ 时, $f(x) > 0$, 所以 $g(x) = -f(x)$.

因为 $f(x)$ 在 $(x_0 - \frac{3\pi}{4}, x_0 - \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 所以 $g(x)$ 在 $(x_0 - \frac{3\pi}{4}, x_0 - \frac{\pi}{2})$ 上单调递减.

当 $x \in (x_0 - \frac{\pi}{2}, x_0 - \frac{\pi}{4})$ 时, $f(x) > 0$, 所以 $g(x) = -f(x)$.

因为 $f(x)$ 在 $(x_0 - \frac{\pi}{2}, x_0 - \frac{\pi}{4})$ 上单调递减, 所以 $g(x)$ 在 $(x_0 - \frac{\pi}{2}, x_0 - \frac{\pi}{4})$ 上单调递增,

所以 $x_0 - \frac{3\pi}{4} < x_0 - \theta \leq x_0 - \frac{\pi}{2}$, 所以 $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{3\pi}{4}$, 故 D 正确.

13. $\frac{\pi}{3}$ (或写成 60°) 因为 $|a - 2b|^2 = a^2 - 4a \cdot b + 4b^2 = 3$, 所以 $\cos \langle a, b \rangle = \frac{1}{2}$, 即 $\langle a, b \rangle = \frac{\pi}{3}$.

14. $f(c) = e^c$ (单调递增的指数函数都可以)

15. $2\sqrt{7}; \frac{4}{3}$ 因为直线 $(a-1)x + (a-2)y + 3 - 2a = 0$ 恒过点 $(1, 1)$, 所以当圆心与点 $(1, 1)$ 的连线与直线 AB

垂直时, 弦长 $|AB|$ 最小. 因为圆心 $(2, 0)$ 与点 $(1, 1)$ 间的距离为 $\sqrt{(2-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$, 半径为 3, 所以弦长 $|AB|$ 的最小值为 $2\sqrt{9-2} = 2\sqrt{7}$. 因为圆心 $(2, 0)$ 与点 $(1, 1)$ 连线的斜率为 $\frac{1-0}{1-2} = -1$, 所以此时直线 l 的

斜率为 1, 由 $-\frac{2a-1}{a-3} = 1$, 得 $a = \frac{4}{3}$.

16. ①②③ 如图, 将“等腰四面体”补成一个长方体.

设此“等腰四面体”的对棱棱长分别为 a, b, c ,

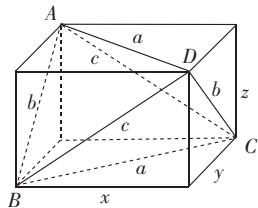
与之对应的长方体的长宽高分别为 x, y, z ,

$$\text{则 } \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ y^2 + z^2 = b^2, \\ x^2 + z^2 = c^2, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x^2 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}, \\ y^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}, \\ z^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}. \end{cases}$$

结合图形, 容易判断出①②都是正确的;

对于③, 由 $a=5, b=6, c=7$, 得 $x = \sqrt{19}, y = \sqrt{6}, z = \sqrt{30}$,

因为“等腰四面体”的体积是对应长方体的体积减去四个小三棱锥的体积,



所以“等腰四面体”的体积为 $xyz - 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}xyz = \frac{1}{3}xyz = 2\sqrt{95}$, 故③正确;

对于④, 三组对棱长度分别为 a, b, c 的“等腰四面体”的外接球直径为 $2R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \neq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, 故④不正确.

17. 解: (1) 因为 $a = 3b \sin A$, 所以 $\sin A = 3 \sin B \sin A$, 1 分

因为 $\sin A > 0$, 所以 $\sin B = \frac{1}{3}$ 2 分

因为 $b < c$, 所以 $B < C$, 所以 B 为锐角, 3 分

则 $\cos B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 4 分

由余弦定理得 $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos B} = \sqrt{3}$ 5 分

(2) 由(1)知, $\cos B = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 6 分

当 $\cos B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 时, $b = \sqrt{3}$, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 7 分

$\cos 2C = 2\cos^2 C - 1 = -\frac{1}{3}$; 8 分

当 $\cos B = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 时, $b = \sqrt{51}$,

$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{7}{\sqrt{51}}$, 9 分

$\cos 2C = 2\cos^2 C - 1 = \frac{47}{51}$ 10 分

18. 解: (1) 由题意得 $m = 40$, $y = m - 20 = 40 - 20 = 20$,

$x = 160 - 100 = 60$, $n = x + y = 60 + 20 = 80$ 2 分

因为 $K^2 = \frac{200 \times (100 \times 20 - 20 \times 60)^2}{160 \times 40 \times 120 \times 80} = \frac{25}{12} \approx 2.083 > 2.072$, 4 分

所以有 85% 的把握认为有疲乏症状与注射此种疫苗有关. 5 分

(2) 从注射疫苗的 n 人中按是否有疲乏症状, 采用分层抽样的方法抽出 8 人, 可知 8 人中无疲乏症状的有 6 人, 有疲乏症状的有 2 人, 再从 8 人中随机抽取 3 人, 当这 3 人中恰有 2 人有疲乏症状时, $X = 10$, 当这 3 人中恰有 1 人有疲乏症状时, $X = 13$, 当这 3 人中没有人有疲乏症状时, $X = 16$ 8 分

因为 $P(X = 10) = \frac{C_2^2 \cdot C_6^1}{C_8^3} = \frac{3}{28}$, $P(X = 13) = \frac{C_1^1 \cdot C_6^2}{C_8^3} = \frac{15}{28}$,

$P(X = 16) = \frac{C_6^3 \cdot C_2^0}{C_8^3} = \frac{5}{14}$, 11 分

所以 X 的分布列如下:

X	10	13	16
P	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{14}$

$E(X) = 10 \times \frac{3}{28} + 13 \times \frac{15}{28} + 16 \times \frac{5}{14} = \frac{55}{4}$ (或 13.75). 12 分

19. (1) 证明: 因为 $a_{n+1} - 3a_n + 2a_{n-1} = 1$,

所以 $a_{n+1} - a_n = 2(a_n - a_{n-1}) + 1$, 3 分

即 $\frac{a_{n+1} - a_n + 1}{a_n - a_{n-1} + 1} = 2$ 4 分

因为 $a_1 = 1, a_2 = 4$, 所以 $a_2 - a_1 + 1 = 4$, 5 分

故数列 $\{a_{n+1} - a_n + 1\}$ 是首项为 4, 公比为 2 的等比数列. 6 分

(2) 解: 由(1)知 $a_{n+1} - a_n + 1 = 2^{n+1}$ 7 分

因为 $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1$
 $= (2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) - (n-1) + 1$, 8 分
 所以 $a_n = 2^{n+1} - n - 2$ 10 分
 所以 $S_n = (2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n+1}) - (1 + 2 + \cdots + n) - 2n = \frac{4(1-2^n)}{1-2} - \frac{n(n+1)}{2} - 2n$, 11 分
 故 $S_n = 2^{n+2} - \frac{n^2 + 5n}{2} - 4$ 12 分

20. (1) 证明: 在梯形 CC_1D_1D 中, 因为 $CC_1 = CD = DD_1 = \frac{1}{2}C_1D_1 = 1$,

所以 $\angle DD_1C_1 = \frac{\pi}{3}$, 连接 DC_1 , 由余弦定理可得 $DC_1 = \sqrt{3}$ 1 分
 因为 $DC_1^2 + DD_1^2 = D_1C_1^2$, 所以 $DC_1 \perp DD_1$ 2 分
 因为平面 $AA_1D_1D \perp$ 平面 CC_1D_1D 且交于 DD_1 ,
 所以 $DC_1 \perp$ 平面 AA_1D_1D .
 因为 $AD \subset$ 平面 AA_1D_1D , 所以 $AD \perp DC_1$ 3 分
 因为 $AD \perp DC$, $DC \cap DC_1 = D$,
 所以 $AD \perp$ 平面 CC_1D_1D 4 分

(2) 解: 连接 A_1C_1 . 由 (1) 可知 $A_1D_1 \perp$ 平面 CC_1D_1D .

以 D_1 为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系 $D_1 - xyz$.

..... 5 分

因为 $A_1D_1 \perp$ 平面 CC_1D_1D ,

所以 A_1C 在平面 CC_1D_1D 内的投影为 D_1C , 所以 A_1C 与平面

CC_1D_1D 所成的角为 $\angle A_1CD_1$, 即 $\angle A_1CD_1 = \frac{\pi}{3}$ 6 分

在 $Rt\triangle A_1CD_1$ 中, 因为 $CD_1 = \sqrt{3}$, 所以 $A_1D_1 = 3$ 7 分

因为 $D_1(0, 0, 0)$, $A_1(3, 0, 0)$, $D(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $C(0, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $C_1(0,$

$2, 0)$, 8 分

所以 $\overrightarrow{D_1D} = (0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\overrightarrow{D_1A_1} = (3, 0, 0)$, $\overrightarrow{A_1C_1} = (-3, 2, 0)$, $\overrightarrow{A_1C} = (-3, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

取平面 AA_1D_1D 的法向量为 $\overrightarrow{DC_1} = (0, \frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 9 分

设平面 AA_1C_1C 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = -3x + 2y = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1C} = -3x + \frac{3}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0, \end{cases}$ 令 $x = 2$, 得 $\mathbf{n} = (2, 3, \sqrt{3})$, 10 分

所以 $\cos \langle \overrightarrow{DC_1}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{DC_1} \cdot \mathbf{n}}{|\overrightarrow{DC_1}| |\mathbf{n}|} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ 11 分

由图可知二面角 $C-AA_1-D$ 为锐角,

所以二面角 $C-AA_1-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 12 分

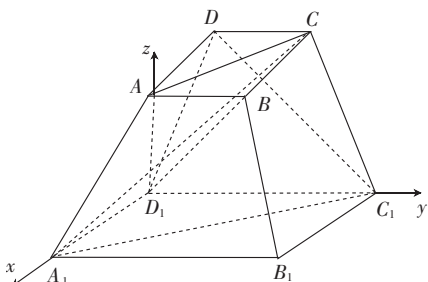
21. 解: (1) 由 $f(x) = \frac{1}{x} + a \ln x$, 可得 $f'(x) = \frac{ax-1}{x^2}$ 1 分

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减. 3 分

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $x > \frac{1}{a}$; 令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < \frac{1}{a}$.

$f(x)$ 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递减. 5 分

(2) 因为 $F(x) = f(x) + g(x) = a \ln x + x^2 - x$,



所以 $F'(x) = \frac{a}{x} + 2x - 1 = \frac{2x^2 - x + a}{x} (x > 0)$ 6 分

因为 $F(x)$ 有两个极值点, 所以 $F'(x) = 0$ 有两个大于零且不相等的解, 即 $2x^2 - x + a = 0$ 有两个不等正根,

所以 $\begin{cases} \Delta = 1 - 8a > 0, \\ \frac{a}{2} > 0, \end{cases}$ 解得 $0 < a < \frac{1}{8}$.

因为 $x_1 x_2 = \frac{a}{2}$, 所以 $\sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{\frac{a}{2}}$ 8 分

因为 $F'(\sqrt{\frac{a}{2}}) = 2\sqrt{2a} - 1$, $F(\sqrt{\frac{a}{2}}) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \ln \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a}{2}}$,

所以曲线 $y = F(x)$ 在 $x = \sqrt{x_1 x_2}$ 处的切线方程为 $y - (\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \ln \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a}{2}}) = (2\sqrt{2a} - 1)(x - \sqrt{\frac{a}{2}})$,

即 $G(x) = (2\sqrt{2a} - 1)x + \frac{a}{2} \ln \frac{a}{2} - \frac{3}{2}a$ 10 分

令 $h(x) = F(x) - G(x) = x^2 + a \ln x - 2\sqrt{2a}x + \frac{3}{2}a - \frac{a}{2} \ln \frac{a}{2}$,

则 $h'(x) = 2x + \frac{a}{x} - 2\sqrt{2a} = \frac{2x^2 - 2\sqrt{2a}x + a}{x} = \frac{(\sqrt{2}x - \sqrt{a})^2}{x} > 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 11 分

因为 $h(\sqrt{\frac{a}{2}}) = 0$, 所以当 $0 < x < \sqrt{\frac{a}{2}}$ 时, $h(x) < 0$, 即 $F(x) < G(x)$.

故使不等式 $F(x) < G(x)$ 成立的 x 的取值范围是 $(0, \sqrt{\frac{a}{2}})$ 12 分

22. 解: (1) 设点 $P(x_0, y_0)$, 则 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ 1 分

因为 $|PF| = \sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2} = \sqrt{(x_0 - c)^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x_0^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x_0^2 - 2cx_0 + a^2} = a - \frac{c}{a}x_0$,

点 P 到直线 $x = \frac{a^2}{c}$ 的距离 $d = \frac{a^2}{c} - x_0$, 4 分

所以 $\frac{|PF|}{d} = \frac{a - \frac{c}{a}x_0}{\frac{a^2}{c} - x_0} = \frac{c}{a} = e = \frac{1}{2}$,

即 P 到 F 的距离与 P 到直线 $x = \frac{a^2}{c}$ 的距离之比为定值 $\frac{1}{2}$ 5 分

(2) 因为 $c = 1, e = \frac{1}{2}$, 所以 $a = 2, b = \sqrt{3}$, 即椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 6 分

假设存在这样的一点 Q , 设 $Q(0, t)$, 直线 $l: y = kx + 1$,

联立方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = kx + 1, \end{cases}$ 消去 y 得 $(3 + 4k^2)x^2 + 8kx - 8 = 0, \Delta = 96(2k^2 + 1) > 0$ 7 分

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{-8k}{3 + 4k^2}, x_1 x_2 = \frac{-8}{3 + 4k^2}$ 8 分

因为 y 轴平分 $\angle MQN$, 所以直线 QM 与 QN 的斜率互为相反数,

即 $k_{QM} + k_{QN} = \frac{kx_1 + 1 - t}{x_1} + \frac{kx_2 + 1 - t}{x_2} = \frac{2kx_1 x_2 + (1 - t)(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} = 0$, 9 分

所以 $2k \cdot \frac{-8}{3 + 4k^2} + (1 - t) \cdot \frac{-8k}{3 + 4k^2} = \frac{-16k - 8k(1 - t)}{3 + 4k^2} = \frac{8k(t - 3)}{3 + 4k^2} = 0$, 11 分

因为 $-8k(3 - t) = 0$ 与 k 无关, 所以 $t = 3$.

故在 y 轴上存在一点 $Q(0, 3)$, 使得 y 轴始终平分 $\angle MQN$ 12 分