

湖南省 2021 届高三六校联考试题

数 学

由 株洲市二中 长沙市一中 常德市一中 联合命题
师大附中 湘潭市一中 岳阳市一中

炎德文化审校、制作

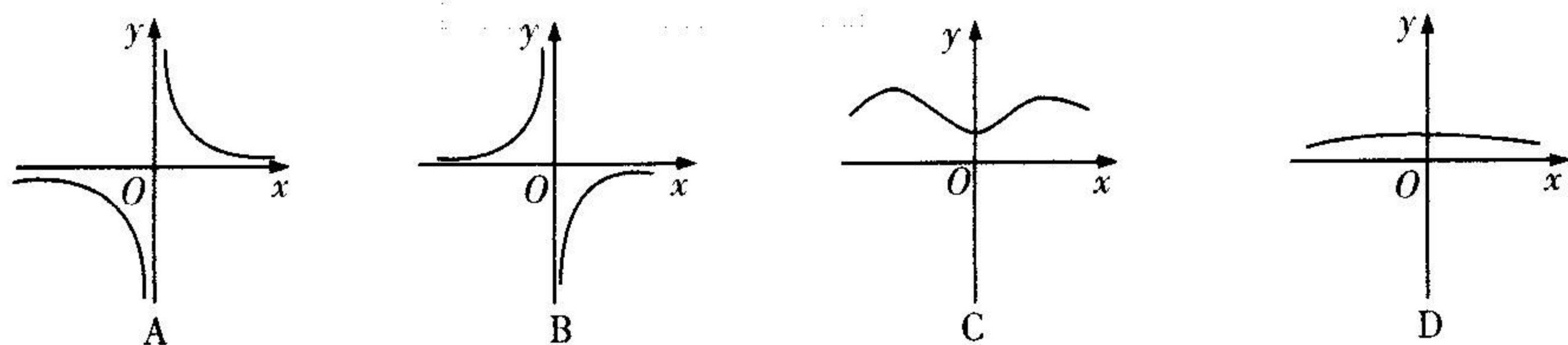
注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

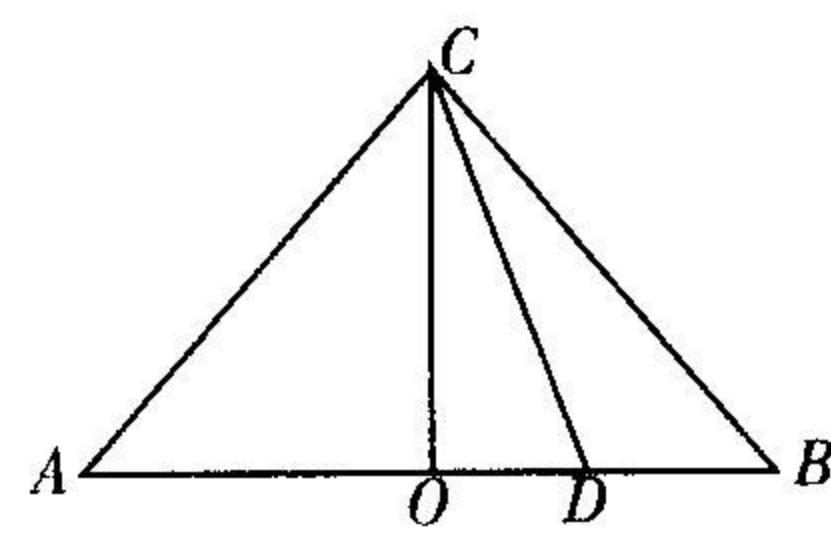
1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{x | x^2 - 3x > 0\}$, 则 $A \cap \complement_{\mathbb{R}} B$ 中的元素个数为
A. 4 B. 3 C. 2 D. 1
2. 已知复数 z_1, z_2 在复平面内对应的点分别为 $Z_1(3, a), Z_2(2, 1)$, 且 $z_1 \cdot z_2$ 为纯虚数, 则实数 $a =$
A. -6 B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{6}{5}$ D. 6

3. 函数 $f(x) = \frac{\cos x + x^2}{e^x - e^{-x}}$ 的图象大致是



4. 某地安排 4 名工作人员随机分到 3 个村参加“脱贫攻坚”帮扶活动, 且每个人只去一个村, 则每个村至少有一名工作人员的概率为
A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{9}{16}$ C. $\frac{5}{9}$ D. $\frac{8}{9}$
5. 已知 $|a| = \sqrt{6}$, $b = (m, 3)$, 且 $(b - a) \perp (2a + b)$, 则向量 a 在向量 b 方向上的投影的最大值为
A. 4 B. 2 C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D. 1

6. 数学里有一种证明方法叫做 Proofs without words, 也称之为无字证明, 一般是指仅用图象语言而无需文字解释就能不证自明的数学命题, 由于这种证明方法的特殊性, 无字证明被认为比严格的数学证明更为优雅. 现有如图所示图形, 在等腰直角三角形 $\triangle ABC$ 中, 点 O 为斜边 AB 的中点, 点 D 为斜边 AB 上异于顶点的一个动点, 设 $AD = a$,



$BD=b$, 则该图形可以完成的无字证明为

A. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} (a>0, b>0)$

B. $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} (a>0, b>0)$

C. $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} (a>0, b>0)$

D. $a^2+b^2 \geq 2\sqrt{ab} (a>0, b>0)$

7. 已知 F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的左、右焦点, 点 P 是该双曲线上一点且在

第一象限内, $2\sin \angle PF_1F_2 = \sin \angle PF_2F_1$, 则双曲线的离心率的取值范围为

A. $(1, 2)$

B. $(3, +\infty)$

C. $(1, 3)$

D. $(2, 3)$

8. 定义函数 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ -1, & x \text{ 为无理数,} \end{cases}$ 则下列命题中正确的是

A. $D(x)$ 不是周期函数

B. $y=D(x)$ 的图象存在对称轴

C. $D(x)$ 是奇函数

D. $D(x)$ 是周期函数, 且有最小正周期

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 下列“若 p , 则 q ”形式的命题中, p 是 q 的必要条件的是

A. 若两直线的斜率相等, 则两直线平行

B. 若 $x>5$, 则 $x>10$

C. 已知 a 是直线 a 的方向向量, n 是平面 α 的法向量, 若 $a \perp \alpha$, 则 $a \perp n$

D. 已知可导函数 $f(x)$, 若 $f'(x_0)=0$, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极值

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_2=3, a_{n+2}-a_n=2, n \in \mathbf{N}^*$, 则

A. $(a_1+a_2), (a_3+a_4), (a_5+a_6), \dots$ 为等差数列

B. $(a_2-a_1), (a_4-a_3), (a_6-a_5), \dots$ 为常数列

C. $a_{2n-1}=4n-3$

D. 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=(-1)^n \cdot a_n$, 则数列 $\{b_n\}$ 的前 100 项和为 100

11. 已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi) (\omega>0, |\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的图象上, 对称中心与对称轴 $x=\frac{\pi}{12}$ 的最小距离为 $\frac{\pi}{4}$, 则下列结论正确的是

A. 函数 $f(x)$ 的一个对称点为 $(\frac{5\pi}{12}, 0)$

B. 当 $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ 时, 函数 $f(x)$ 的最小值为 $-\sqrt{3}$

C. 若 $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = -\frac{4}{5} (\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}))$, 则 $f(\alpha + \frac{\pi}{4})$ 的值为 $\frac{4-3\sqrt{3}}{5}$

D. 要得到函数 $f(x)$ 的图象, 只需要将 $g(x)=2\cos 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位

12. 已知球 O 的半径为 2, 球心 O 在大小为 60° 的二面角 $\alpha-l-\beta$ 内, 二面角 $\alpha-l-\beta$ 的两个半平面分别截球面得两个圆 O_1, O_2 , 若两圆 O_1, O_2 的公共弦 AB 的长为 2, E 为 AB 的中点, 四面体 $OA O_1 O_2$ 的体积为 V , 则下列结论中正确的有

A. O, E, O_1, O_2 四点共面

B. $O_1 O_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $O_1 O_2 = \frac{3}{2}$

D. V 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{16}$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 已知某省 2020 年高考理科数学平均分 X 近似服从正态分布 $N(89, 100)$, 则 $P(79 < X \leq 109) =$ _____.

(附: $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$)

14. 请写出满足条件“ $f(x) \leq f(1)$ 对任意的 $x \in [0, 1]$ 恒成立, 且 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不是增函数”的一个函数: _____.

15. 已知 $\left(a + \frac{1}{x^2}\right)(x+1)^6$ ($a \neq 0$) 的展开式中各项的系数和为 192, 则其展开式中的常数项为 _____.

16. 电子计算机是二十世纪最伟大的发明之一, 当之无愧地被认为是迄今为止由科学和技术所创造的最具影响力的现代工具, 被广泛地应用于人们的工作与生活之中, 计算机在进行数的计算和处理加工时, 内部使用的是二进制计数制, 简称二进制. 一个十进制数 n ($n \in \mathbf{N}^*$) 可以表示成二进制数 $(a_0 a_1 a_2 \cdots a_k)_2$, 即 $n = a_0 \times 2^k + a_1 \times 2^{k-1} + a_2 \times 2^{k-2} + \cdots + a_{k-1} \times 2^1 + a_k \times 2^0$, 其中 $a_0 = 1, a_i \in \{0, 1\}, i = 0, 1, 2, \cdots, k, k \in \mathbf{N}$. 用 $f(n)$ 表示十进制数 n 的二进制表示中 1 的个数, 则 $f(7) =$ _____; 对任意 $r \in \mathbf{N}^*$, $\sum_{n=2^r}^{2^{r+1}-1} 2^{f(n)} =$ _____.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $2S_n = n^2 + 3n$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和是 T_n , 若存在 $n \in \mathbf{N}^*$, 使得 $T_n - \lambda a_{n+1} \geq 0$ 成立, 求实数 λ 的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x - \cos^2 x - \frac{1}{2}$ ($x \in \mathbf{R}$).

(I) 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]$ 时, 分别求函数 $f(x)$ 取得最大值和最小值时 x 的值;

(II) 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对应边分别是 a, b, c , 且 $a = 2\sqrt{3}, b = 6, f\left(\frac{A}{2}\right) = -1$, 求 c 的值.

19. (本小题满分 12 分)

甲、乙两选手比赛,假设每局比赛甲胜的概率为 0.6,乙胜的概率为 0.4. 甲、乙约定比赛当天上午进行 3 局热身训练,下午进行正式比赛.

(I) 上午的 3 局热身训练中,求甲恰好胜 2 局的概率;

(II) 下午的正式比赛中:

① 若采用“3 局 2 胜制”,求甲所胜局数 x 的分布列与数学期望;

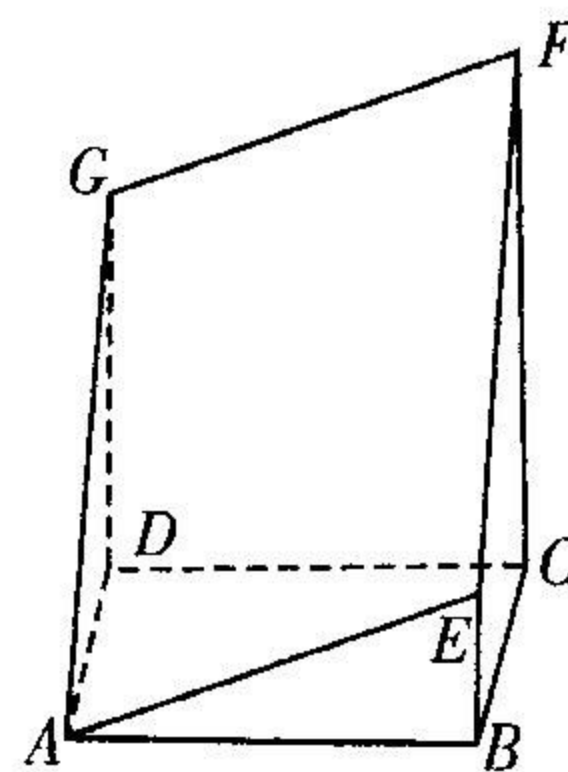
② 分别求采用“3 局 2 胜制”与“5 局 3 胜制”时,甲获胜的概率;对甲而言,哪种局制更有利? 你对局制长短的设置有何认识?

20. (本小题满分 12 分)

某建筑工地上有一个旗杆 CF (与地面垂直),其正南、正西方向各有一标杆 BE, DG (均与地面垂直, B, D 在地面上),长度分别为 1 m, 4 m, 在地面上有一基点 A (点 A 在 B 点的正西方向,也在 D 点的正南方向上),且 $BA = BC = 2$ m, 且 A, E, F, G 四点共面.

(I) 求基点 A 观测旗杆顶端 F 的距离及仰角 θ 的正切值;

(II) 若旗杆上有一点 M ,使得直线 BM 与地面 $ABCD$ 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$,试求平面 ABM 与平面 $AEFG$ 所成锐二面角的正弦值.



21. (本小题满分 12 分)

已知 A, B 分别为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > \sqrt{3})$ 的左、右顶点, Q 为椭圆 E 的上顶点, $\vec{AQ} \cdot \vec{QB} = 1$.

(I) 求椭圆 E 的方程;

(II) 已知动点 P 在椭圆 E 上,两定点 $M(-1, \frac{3}{2}), N(1, -\frac{3}{2})$.

① 求 $\triangle PMN$ 的面积的最大值;

② 若直线 MP 与 NP 分别与直线 $x=3$ 交于 C, D 两点,问:是否存在点 P ,使得 $\triangle PMN$ 与 $\triangle PCD$ 的面积相等? 若存在,求出点 P 的坐标;若不存在,说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

已知 $f(x) = \ln(1+x) + 2\cos x - (1+x)^{-\frac{1}{2}}, g(x) = \cos x - 1 + ax^2$.

(I) 若 $g(x) \geq 0$ 恒成立,求实数 a 的取值范围;

(II) 确定 $f(x)$ 在 $(-1, \pi)$ 内的零点个数.