

河北衡水中学 2021 届全国高三第二次联合考试

数 学

本试卷 4 页。总分 150 分。考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$, $B = \{0, 2, 4\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{0, 2, 4\}$ B. $\{0, 2\}$
C. $\{x | 0 \leq x \leq 4\}$ D. $\{x | -1 \leq x \leq 2 \text{ 或 } x = 4\}$

2. 已知复数 $z = \frac{3+2i}{3-2i}$, 则 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点位于

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 在平面直角坐标系中, O 为坐标原点, $A(4, 3)$, $B(-1, \sqrt{3})$, 则 $\angle AOB$ 的余弦值为

- A. $\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$ B. $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$ C. $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$ D. $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$

4. 已知 a, b 为两条不同的直线, α, β 为两个不同的平面, 则下列结论正确的是

- A. 若 $a // \beta, a \subset \alpha, b \subset \beta$, 则 $a // b$
B. 若 $a \subset \alpha, b \subset \beta, a // b$, 则 $\alpha // \beta$
C. 若 $\alpha \cap \beta = a, b \subset \beta, b \perp a$, 则 $\alpha \perp \beta$
D. 若 $\alpha \cap \beta = l, \alpha \perp \beta, a \subset \alpha, a \perp l, a // b$, 则 $b \perp \beta$

5. 在五边形 $ABCDE$ 中 $\overrightarrow{EB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$, M, N 分别为 AE, BD 的中点, 则 $\overrightarrow{MN} =$

- A. $\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ B. $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ C. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ D. $\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

6. 命题 p : 关于 x 的不等式 $ax^2 + ax - x - 1 < 0$ 的解集为 $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{a}, +\infty)$ 的一个充分不必要条件是

- A. $a \leq -1$ B. $a > 0$ C. $-2 < a < 0$ D. $a < -2$

7. 面对全球蔓延的疫情, 疫苗是控制传染的最有力技术手段. 科研攻关组第一时间把疫苗研发作为重中之重, 对灭活疫苗、重组蛋白疫苗、腺病毒载体疫苗、减毒流感病毒载体疫苗和核酸疫苗 5 个技术路线并行研发, 组织了 12 个优势团队进行联合攻关. 其中有 5 个团队已经依据各自的研究优势分别选择了灭活疫苗、重组蛋白疫苗、腺病毒载体疫苗、减毒流感病毒载体疫苗和核酸疫苗这 5 个技术路线, 其余团队作为辅助技术支持进驻这 5 个技术路线. 若保障每个技术路线至少有两个

研究团队,则不同的分配方案的种数为

- A. 14700 B. 16800 C. 27300 D. 50400

8. 若不等式 $m\cos x - \cos 3x - \frac{1}{8} \leq 0$ 对任意 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是

- A. $(-\infty, -\frac{9}{4}]$ B. $(-\infty, -2]$ C. $(-\infty, \frac{9}{4}]$ D. $(-\infty, \frac{9}{8}]$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分。

9. 已知 $0 < \log_{\frac{1}{2}} a < \log_{\frac{1}{2}} b < 1$, 则下列说法正确的是

- A. $1 > a^2 > b^2 > \frac{1}{4}$ B. $2 > \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 1$ C. $\frac{a}{b-1} > \frac{b}{a-1}$ D. $\frac{1}{\sqrt{e}} > e^{-b} > \frac{1}{e}$

10. 将函数 $f(x) = 2\cos x$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再将得到的图象向左平移 π 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 则下列说法正确的有

- A. $g(x)$ 为奇函数
B. $g(x)$ 的周期为 4π
C. $\forall x \in R$, 都有 $g(x + \pi) = g(\pi - x)$
D. $g(x)$ 在区间 $[-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ 上单调递增, 且最小值为 $-\sqrt{3}$

11. 提丢斯·波得定律是关于太阳系中行星轨道的一个简单的几何学规则, 它是在 1766 年由德国的一位中学老师戴维斯·提丢斯发现的, 后来被柏林天文台的台长波得归纳成一条定律, 即数列 $\{a_n\}$: $0.4, 0.7, 1.6, 2.8, 5.2, 10, 19.6 \dots$ 表示的是太阳系第 n 颗行星与太阳的平均距离 (以天文单位 A.U. 为单位). 现将数列 $\{a_n\}$ 的各项乘以 10 后再减 4, 得到数列 $\{b_n\}$, 可以发现数列 $\{b_n\}$ 从第 3 项起, 每项是前一项的 2 倍, 则下列说法正确的是

- A. 数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 3 \times 2^{n-2}$
B. 数列 $\{a_n\}$ 的第 2021 项为 $0.3 \times 2^{2020} + 0.4$
C. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 0.4n + 0.3 \times 2^{n-1} - 0.3$
D. 数列 $\{nb_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = 3(n-1) \cdot 2^{n-1}$

12. 在一张纸上有一圆 $C: (x+2)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 与点 $M(m, 0) (m \neq -2)$, 折叠纸片, 使圆 C 上某一点 M' 恰好与点 M 重合, 这样的每次折法都会留下一条直线折痕 PQ , 设折痕 PQ 与直线 $M'C$ 的交点为 T , 则下列说法正确的是

- A. 当 $-2-r < m < -2+r$ 时, 点 T 的轨迹为椭圆
B. 当 $r=1, m=2$ 时, 点 T 的轨迹方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$
C. 当 $m=2, 1 \leq r \leq 2$ 时, 点 T 的轨迹对应曲线的离心率取值范围为 $[2, 4]$
D. 当 $r=2\sqrt{2}, m=2$ 时, 在 T 的轨迹上任取一点 S , 过 S 作直线 $y=x$ 的垂线, 垂足为 N , 则 $\triangle SON$ (O 为坐标原点) 的面积为定值

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 正态分布在概率和统计中占有重要地位, 它广泛存在于自然现象、生产和生活实践中, 在现实生活中, 很多随机变量都服从或近似服从正态分布. 在某次大型联考中, 所有学生的数学成绩

$X \sim N(100, 225)$. 若成绩低于 $m + 10$ 的同学人数和高于 $2m - 20$ 的同学人数相同, 则整数 m 的值为 _____.

14. 已知抛物线 $x^2 = 4y$, 其准线与 y 轴交于点 P , 则过点 P 的抛物线的切线方程为 _____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是内角 A, B, C 的对边, 其中 $A = \frac{\pi}{3}, b + c = 4, M$ 为线段 BC 的中点, 则 $|AM|$ 的最小值为 _____.

16. 已知四棱锥 $P - ABCD$ 的底面为正方形, $PA = PB = PC = PD, AB = 2$, 若四棱锥 $P - ABCD$ 的体积为 $\frac{4}{3}$, 则以点 P 为球心, 以 $\sqrt{2}$ 为半径的球的表面与四棱锥侧面 PAB 交线的长度约为 _____, 该四棱锥 $P - ABCD$ 外接球的体积为 _____. (参考数据 $\tan 35^\circ \approx \frac{\sqrt{2}}{2}$) (本题第一空 3 分, 第二空 2 分)

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在① $\triangle ABC$ 的外接圆面积为 3π , ② $\triangle ADC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, ③ $\triangle BDC$ 的周长为 $5 + \sqrt{7}$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面的问题中, 并给出解答.

问题: 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, D 是 AB 边上一点. 已知 $AD = \frac{1}{3}AB, \sin A \sin C = \frac{3}{4}, \cos 2B + 3\cos B = 1$, 若 _____, 求 CD 的长.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

18. (12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_4 = S_5 = -20$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

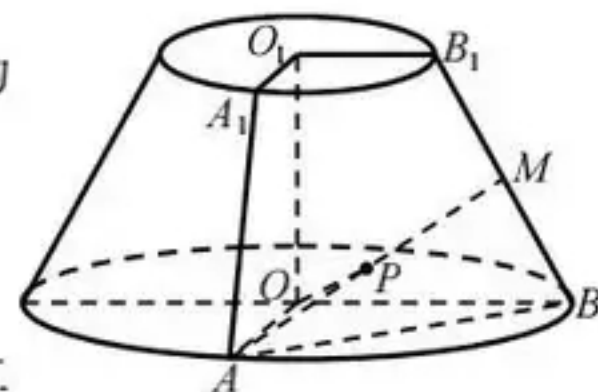
(2) 已知数列 $\{b_n\}$ 是以 4 为首项, 4 为公比的等比数列, 若数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的公共项为 a_m , 记 m 由小到大构成数列 $\{c_n\}$, 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12 分)

如图, 已知圆台 O_1O 的下底面半径为 2, 上底面半径为 1, 母线与底面所成的角为 $\frac{\pi}{3}, AA_1, BB_1$ 为母线, 平面 $AA_1O_1O \perp$ 平面 BB_1O_1O, M 为 BB_1 的中点, P 为 AM 上的任意一点.

(1) 证明: $BB_1 \perp OP$;

(2) 当点 P 为线段 AM 的中点时, 求平面 OPB 与平面 OAM 所成锐二面角的余弦值.



20. (12 分)

国务院办公厅印发了《关于防止耕地“非粮化”稳定粮食生产的意见》, 意见指出要切实稳定粮食生产, 牢牢守住国家粮食安全生命线. 为了切实落实好稻谷、小麦、玉米三大谷物种植情况, 某乡镇抽样调查了 A 村庄部分耕地 (包含永久农田和一般耕地) 的使用情况, 其中永久农田 100 亩, 三

大谷物的种植面积为 90 亩, 棉、油、蔬菜等的种植面积为 10 亩; 一般耕地 50 亩, 三大谷物的种植面积为 30 亩, 棉、油、蔬菜等的种植面积为 20 亩.

- (1) 以频率代替概率, 求 A 村庄每亩耕地 (包括永久农田和一般耕地) 种植三大谷物的概率;
- (2) 上级有关部门要督促落实整个乡镇三大谷物的种植情况, 现从本乡镇抽测 5 个村庄, 每个村庄的三大谷物的种植情况符合要求的概率均为 A 村庄每亩耕地 (永久农田和一般耕地) 种植三大谷物的概率. 若抽测的村庄三大谷物的种植情况符合要求, 则为本乡镇记 1 分, 若不符合要求, 记 -1 分. X 表示本乡镇的总积分, 求 X 的分布列及数学期望;
- (3) 目前在农村的劳动力大部分是中老年人, 调查中发现, 80 位中老年劳动力中有 65 人种植三大谷物, 其余种植棉、油、蔬菜等农作物; 20 位青壮年劳动力中有 15 人种植需要技术和体力, 短期收益大的棉、油、蔬菜等农作物, 其余种植三大谷物. 请完成下表, 并判断是否有 99.9% 的把握认为种植作物的种类与劳动力的年龄层次有关?

劳动力年龄层次	种植情况		合计
	种植三大谷物	种植棉、油、蔬菜等	
中老年劳动力			
青壮年劳动力			
合计			

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ 其中 $n = a + b + c + d$.

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

21. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1, F_2, P(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 满足 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$, 且以线段 F_1F_2 为直径的圆过点 P .

- (1) 求椭圆 C 的标准方程;
- (2) O 为坐标原点, 若直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 直线 OM 的斜率为 k_1 , 直线 ON 的斜率为 k_2 , 当 $\triangle OMN$ 的面积为定值 1 时, k_1k_2 是否为定值? 若是, 求出 k_1k_2 的值; 若不是, 请说明理由.

22. (12 分)

设函数 $f(x) = \ln x + x + \frac{2}{x}, g(x) = \frac{e^x}{x}$

- (1) 若 $h(x) = mf(x) - g(x), m \in R$, 试判断函数 $h(x)$ 的极值点个数;
- (2) 设 $\varphi(x) = x^2g(x) - f(x) - kx + 2x + \frac{2}{x}$ 若 $\varphi(x) \geq 1$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

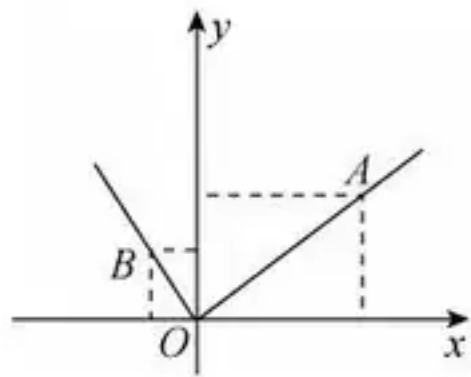
河北衡水中学 2021 届全国高三第二次联合考试 · 数学

一、选择题

1. B 【解析】集合 B 中的元素在区间 $[-1, 2]$ 内的只有 $0, 2$, 所以 $A \cap B = \{0, 2\}$.

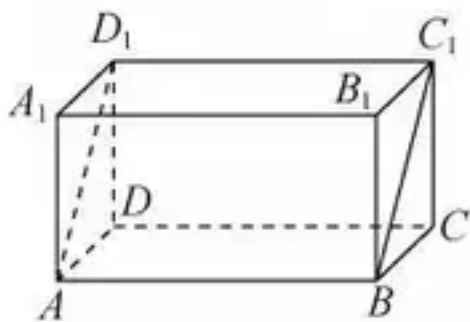
2. D 【解析】 $z = \frac{3+2i}{3-2i} = \frac{(3+2i)^2}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{5}{13} + \frac{12}{13}i$, 所以 $\bar{z} = \frac{5}{13} - \frac{12}{13}i$, 所以其在复平面内对应的点位于第四象限.

3. C 【解析】作出平面直角坐标系, 如图.



设 $\angle xOB = \alpha$, $\angle xOA = \beta$, 则 $\angle AOB = \alpha - \beta$. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, $\sin \beta = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = \frac{4}{5}$. 所以 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3\sqrt{3}-4}{10}$.

4. D 【解析】对于 A, 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 平面 $A_1B_1C_1D_1 \parallel$ 平面 $ABCD$, $A_1B_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, $AC \subset$ 平面 $ABCD$, 但 A_1B_1 与 AC 不平行, 故 A 错误; 对于 B, 如图, $A_1B_1 \subset$ 平面 A_1B_1BA , $DC \subset$ 平面 $ABCD$, $A_1B_1 \parallel DC$, 但平面 A_1B_1BA 与平面 $ABCD$ 不平行, 故 B 错误; 对于 C, 如图, 平面 $ABC_1D_1 \cap$ 平面 $ABCD = AB$, $BC \subset$ 平面 $ABCD$, 且 $BC \perp AB$, 但平面 $ABCD$ 与平面 ABC_1D_1 不互相垂直, 故 C 错误; 对于 D, 由平面与平面垂直的性质定理, 得 $a \perp \beta$, 又 $a \parallel b$, 所以 $b \perp \beta$, 故 D 正确.



5. C 【解析】 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{EB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$.

6. D 【解析】由题意知命题 p 即 $(ax-1)(x+1) < 0$ 的解集为 $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{a}, +\infty)$, 其充要条件为

$$\begin{cases} a < 0, \\ -1 \leq \frac{1}{a}, \end{cases} \text{ 得 } a \leq -1. \text{ 因为 } (-\infty, -2) \subsetneq (-\infty, -1],$$

所以 $a < -2$ 是 $a \leq -1$ 的一个充分不必要条件.

7. B 【解析】将其余的 7 个团队分成 5 个组, 然后再分配给各技术路线. 第一类方案: 按 $3, 1, 1, 1, 1$ 分组, 先从 7 个队中选择 3 个队, 然后全排, 有 $C_7^3 A_5^5$ 种. 第二类方案: 按 $2, 2, 1, 1, 1$ 分组, 先分组再分配, 共有 $\frac{C_7^2 C_5^2}{A_2^2} A_5^5$ 种. 综上, 由分类加法计数原理知, 共有 $C_7^3 A_5^5 + \frac{C_7^2 C_5^2}{A_2^2} A_5^5 = 16\,800$ 种分配方案.

8. A 【解析】因为 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\cos x \in (0, 1)$, 原

$$\text{不等式可变形为 } m \leq \frac{\cos 3x + \frac{1}{8}}{\cos x} = \frac{\cos(x+2x) + \frac{1}{8}}{\cos x} = \frac{\cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x + \frac{1}{8}}{\cos x} = 4\cos^2 x + \frac{1}{8\cos x} - 3.$$

令 $t = \cos x \in (0, 1)$, 则 $g(t) = 4t^2 + \frac{1}{8t} - 3$, $g'(t) =$

$$8t - \frac{1}{8t^2} = \frac{64t^3 - 1}{8t^2} = 8 \times \frac{t^3 - (\frac{1}{4})^3}{t^2} = 8 \times \frac{(t - \frac{1}{4})(t^2 + \frac{t}{4} + \frac{1}{16})}{t^2}.$$

当 $t \in (0, \frac{1}{4})$ 时, $g'(t) < 0$,

$g(t)$ 单调递减; 当 $t \in (\frac{1}{4}, 1)$ 时, $g'(t) > 0$, $g(t)$ 单调

递增, 所以 $g(t) \geq g(\frac{1}{4}) = -\frac{9}{4}$. 又 $m \leq g(t)_{\min}$, 所以

$$m \leq -\frac{9}{4}.$$

二、选择题

9. ACD 【解析】已知 $0 < \log_{\frac{1}{2}} a < \log_{\frac{1}{2}} b < 1$, 因为 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $\frac{1}{2} < b < a <$

1, 所以 $\frac{1}{4} < b^2 < a^2 < 1$, 故 A 正确; 因为函数 $y = \frac{1}{x}$ 在

区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 因为 $\frac{1}{2} < b < a < 1$, 所以 $2 >$

$\frac{1}{b} > \frac{1}{a} > 1$, 故 B 错误; 因为 $\frac{a}{b-1} - \frac{b}{a-1} = \frac{a(a-1)-b(b-1)}{(b-1)(a-1)} = \frac{(a^2-b^2)-(a-b)}{(b-1)(a-1)} = \frac{(a-b)(a+b-1)}{(b-1)(a-1)}$. 又 $\frac{1}{2} < b < a < 1$, 所以 $a+b > 1$, $\frac{(a-b)(a+b-1)}{(b-1)(a-1)} > 0$, 故 C 正确; 因为 $-\frac{1}{2} > -b > -a > -1$, 函数 $y = e^x$ 为单调递增函数, 所以 $\frac{1}{e} < e^{-a} < e^{-b} < \frac{1}{\sqrt{e}}$, 故 D 正确.

10. ABC 【解析】将函数 $f(x) = 2\cos x$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 得 $y = 2\cos \frac{x}{2}$, 再将得到的图象向左平移 π 个单位长度, 得 $g(x) = 2\cos\left(\frac{x+\pi}{2}\right) = -2\sin \frac{x}{2}$, $g(x)$ 为奇函数, 故 A 正确; 4π 为 $g(x)$ 的周期, 故 B 正确; 又 $g(x) = -2\sin \frac{x}{2}$ 的图象关于直线 $x = \pi$ 对称, 故 C 正确; 令 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \frac{x}{2} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, 解得 $\pi + 4k\pi \leq x \leq 3\pi + 4k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $g(x)$ 在区间 $[\pi + 4k\pi, 3\pi + 4k\pi] (k \in \mathbf{Z})$ 上单调递增, 取 $k=0$, 得 $[\pi, 3\pi]$, 所以 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ 上单调递减, 在区间 $\left[\pi, \frac{4\pi}{3}\right]$ 上单调递增, 所以最小值为 $g(\pi) = -2$, 故 D 错误.

11. CD 【解析】数列 $\{a_n\}$ 各项乘以 10 再减 4 得到数列 $\{b_n\}: 0, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, \dots$, 故该数列从第 2 项起构成公比为 2 的等比数列, 所以 $b_n = \begin{cases} 0, n=1, \\ 3 \times 2^{n-2}, n \geq 2, \end{cases}$ 故 A 错误; 从而 $a_n = \frac{b_n+4}{10} = \begin{cases} 0.4, n=1, \\ 0.3 \times 2^{n-2} + 0.4, n \geq 2, \end{cases}$ 所以 $a_{2021} = 0.3 \times 2^{2019} + 0.4$, 故 B 错误; 当 $n=1$ 时, $S_1 = a_1 = 0.4$; 当 $n \geq 2$ 时, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0.4 + 0.3(2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-2}) + 0.4(n-1) = 0.4n + 0.3 \times \frac{1-2^{n-1}}{1-2} = 0.4n + 0.3 \times 2^{n-1} - 0.3$. 当 $n=1$ 时, $S_1 = 0.4$ 也符合上式, 所以 $S_n = 0.4n + 0.3 \times 2^{n-1} - 0.3$, 故 C 正确; 因为 $nb_n = \begin{cases} 0, n=1, \\ 3n \times 2^{n-2}, n \geq 2, \end{cases}$ 所以当 $n=1$ 时, $T_1 = b_1 = 0$, 当 $n \geq 2$ 时, $T_n = b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \dots + nb_n = 0 + 3(2 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + 4 \times 2^2 + \dots + n \times 2^{n-2})$. $2T_n = 3(2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \dots + n \times 2^{n-1})$, 所以 $-T_n = 0 + 3(2 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-2} - n \times 2^{n-1}) = 3\left(2 + \frac{2-2^{n-1}}{1-2} - n \times 2^{n-1}\right) = 3(1-n) \times 2^{n-1}$, 所以 $T_n = 3(n-1) \times 2^{n-1}$. 又

当 $n=1$ 时, T_1 也满足上式, 所以 $T_n = 3(n-1) \times 2^{n-1}$, 故 D 正确.

12. ACD 【解析】当 $-2-r < m < -2+r$ 时, 点 M 在圆 C 内, 此时有 $|TM| + |TC| = |CM'| = r > |CM|$, 故 T 的轨迹是以 C, M 为焦点的椭圆, 故 A 正确; 当 $r=1, m=2$ 时, 点 M 在圆 C 外, 此时有 $||TM| - |TC|| = |CM'| = r < |CM|$, 故 T 的轨迹是以 C, M 为焦点的双曲线, 其中 $2a = r = 1, 2c = CM = 4$, 故双曲线方程为 $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{15}{4}} = 1$, 故 B 错误; 当 $m=2$ 时, $1 \leq r \leq 2$ 时, T 的

轨迹是以 C, M 为焦点的双曲线, 方程为 $\frac{x^2}{\frac{r^2}{4}} - \frac{y^2}{4 - \frac{r^2}{4}} = 1$, 所以离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\frac{r}{2}} = \frac{4}{r}$, 当 $1 \leq r \leq 2$ 时, $2 \leq e \leq$

4, 故 C 正确; 当 $r = 2\sqrt{2}, m=2$ 时, T 的轨迹方程为 $x^2 - y^2 = 2$, 设 $S(p, q)$, 则 $p^2 - q^2 = 2$, 直线 SN 的方程为 $y - q = -(x - p)$, 它与 $y = x$ 的交点 N 的坐标为 $\left(\frac{p+q}{2}, \frac{p+q}{2}\right)$, 所以 $|ON| = \frac{\sqrt{2}}{2} |p+q|, |SN| = \frac{|p-q|}{\sqrt{2}}$, 所以 $S_{\triangle SNO} = \frac{1}{2} \times |ON| \cdot |SN| = \frac{|p^2 - q^2|}{4} =$

$\frac{1}{2}$ 为定值, 故 D 正确.

三、填空题

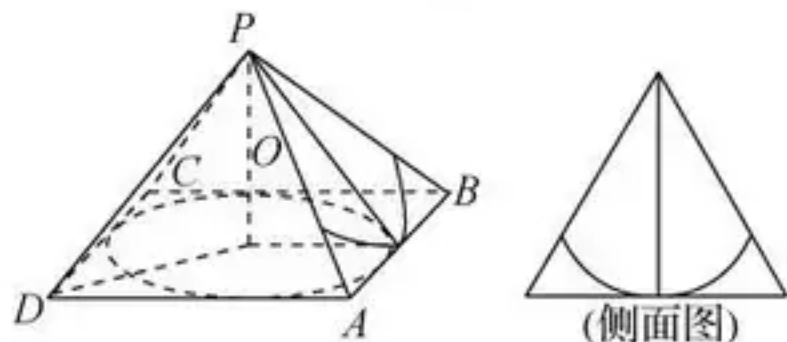
13. 70 【解析】由题意 $P(x < m+10) = P(x > 2m-20)$. 又 $X \sim N(100, 225)$, 所以 $m+10+2m-20 = 200$, 所以 $m=70$.

14. $x-y-1=0$, 或 $x+y+1=0$ 【解析】抛物线 $x^2 = 4y$ 的准线方程为 $y = -1$, 所以 $P(0, -1)$. 设切点坐标为 $\left(x_0, \frac{x_0^2}{4}\right)$, 切线斜率为 $k = \frac{x_0}{2} = \frac{\frac{x_0^2}{4} + 1}{x_0}$, 解得 $x_0 = \pm 2$. 当 $x_0 = 2$ 时, $k = 1$, 切线方程为 $x - y - 1 = 0$; 当 $x_0 = -2$ 时, $k = -1$, 切线方程为 $x + y + 1 = 0$.

15. $\sqrt{3}$ 【解析】 $|AM| = |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{\left(\frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{c^2 + b^2 + bc}}{2} = \frac{\sqrt{(c+b)^2 - bc}}{2}$. 因为 $b+c = 4 \geq 2\sqrt{bc}$, 所以 $bc \leq 4, -bc \geq -4$, 当且仅当 $b=c=2$ 时, 等号成立, 所以 $\frac{\sqrt{(c+b)^2 - bc}}{2} \geq \frac{\sqrt{16-4}}{2} = \sqrt{3}$.

16. $\frac{7\sqrt{2}}{18}\pi, \frac{9\pi}{2}$ 【解析】因为 $AB=2, V_{\text{四棱锥}P-ABCD} = \frac{4}{3}$, 所以四棱锥 $P-ABCD$ 的高 $h=1$. 易知侧面 PAB 底边 AB 的高为 $\sqrt{2}$, 所以球面与侧面 PAB 的交线为弧线,

如图,且长度 $l \approx \frac{35^\circ \times 2}{180^\circ} \pi \times \sqrt{2} = \frac{7\sqrt{2}}{18} \pi$. 设四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的球心为 O , 则 O 在四棱锥 $P-ABCD$ 的高线上, 设外接球的半径为 R , 则 $(1-R)^2 + (\sqrt{2})^2 = R^2$, 解得 $R = \frac{3}{2}$, $V_{\text{球}O} = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9\pi}{2}$.



四、解答题

17. 解: 因为 $\cos 2B + 3\cos B = 1$,
所以 $2\cos^2 B + 3\cos B - 2 = 0$,

解得 $\cos B = \frac{1}{2}$ 或 $\cos B = -2$ (舍去), (2 分)

所以在 $\triangle ABC$ 中, $B = \frac{\pi}{3}$. (3 分)

因为 $\sin A \sin C = \frac{3}{4} = \sin^2 B$, 所以 $b^2 = ac$. (5 分)

所以由余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = a^2 + c^2 - ac$,

又 $b^2 = ac$, 所以 $a^2 + c^2 - 2ac = 0$, 即 $a = c$,
所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形. (6 分)

因为 $AD = \frac{1}{3}AB$,

所以在 $\triangle ADC$ 中, 由余弦定理得 $CD = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{3}a\right)^2 - a \cdot \left(\frac{1}{3}a\right)} = \frac{\sqrt{7}}{3}a$. (7 分)

选择条件①: 由 $\triangle ABC$ 的外接圆面积为 3π , 得 $2R = 2\sqrt{3}$.

所以 $\frac{a}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3}$, 所以 $a = 3$. 故 $CD = \sqrt{7}$. (10 分)

选择条件②: 由 $\triangle ADC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$,

得 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$,

所以 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$, 解得 $a = 3$. 故 $CD = \sqrt{7}$. (10 分)

选择条件③: 由 $\triangle BDC$ 的周长为 $5 + \sqrt{7}$,

得 $a + \frac{2a}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}a = 5 + \sqrt{7}$,

所以 $a = 3$. 故 $CD = \sqrt{7}$. (10 分)

18. 解: (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,
因为 $S_4 = S_5 = -20$, 所以 $a_5 = S_5 - S_4 = 0$.
因为 $S_5 = 5a_3 = -20$, 所以 $a_3 = -4$,
所以 $d = \frac{a_5 - a_3}{5 - 3} = 2$,

所以 $a_n = a_5 + (n - 5)d = 2n - 10$. (6 分)

(2) 由题意知 $b_n = 4 \times 4^{n-1} = 4^n$.

因为 $a_m = 2m - 10$, 所以 $2m - 10 = 4^n$, $m = \frac{4^n + 10}{2}$.

因此 $c_n = \frac{4^n + 10}{2} = \frac{4^n}{2} + 5$.

所以 $T_n = \frac{4^1}{2} + 5 + \frac{4^2}{2} + 5 + \frac{4^3}{2} + 5 + \dots + \frac{4^n}{2} + 5 = \frac{4(1 - 4^n)}{1 - 4} + 5n = \frac{2}{3} \times 4^n + 5n - \frac{2}{3}$. (12 分)

19. (1) 证明: 过点 B_1 作平面 AOB 的垂线, 垂足为 C ,
如图, 则 C 是 OB 的中点, 所以 $BC = 1$.

又 $\angle OBB_1 = \frac{\pi}{3}$, 所以 $BB_1 = 2$.

连接 OB_1 , 因为 $BB_1 = OB = 2$,
所以 $\triangle OBB_1$ 为等边三角形.

因为点 M 为 BB_1 的中点, 所以 $BB_1 \perp OM$.

因为平面 $AA_1O_1O \perp$ 平面 BB_1O_1O ,

平面 $AA_1O_1O \cap$ 平面 $BB_1O_1O = OO_1$, 且 $AO \perp OO_1$,
 $AO \subset$ 平面 AA_1O_1O ,

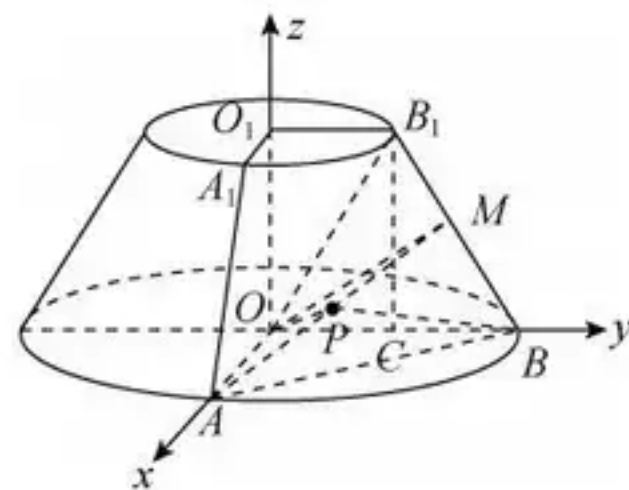
所以 $AO \perp$ 平面 BB_1O_1O .

因为 $BB_1 \subset$ 平面 BB_1O_1O , 所以 $AO \perp BB_1$.

又因为 $AO \cap OM = O$, $AO \subset$ 平面 OMA , $OM \subset$ 平面 OMA ,

所以 $BB_1 \perp$ 平面 OMA .

因为 $OP \subset$ 平面 OMA , 所以 $BB_1 \perp OP$. (4 分)



(2) 解: 以 O 为坐标原点, OA, OB, OO_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $B_1(0, 1, \sqrt{3})$, $M\left(0, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P\left(1, \frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $\overrightarrow{OP} = \left(1, \frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $\overrightarrow{OB} = (0, 2, 0)$.

(6 分)

设平面 OPB 的一个法向量为 $n = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \overrightarrow{OP} \cdot n = 0, \\ \overrightarrow{OB} \cdot n = 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} x + \frac{3}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{4}z = 0, \\ 2y = 0, \end{cases}$

取 $z = 4\sqrt{3}$, 得 $x = -3, y = 0$,

所以 $n = (-3, 0, 4\sqrt{3})$, (9 分)

因为 $BB_1 \perp$ 平面 OAM ,

所以平面 OAM 的一个法向量为 $\overrightarrow{BB_1} = (0, -1, \sqrt{3})$, (10 分)

所以 $\cos \langle \overrightarrow{BB_1}, n \rangle = \frac{\overrightarrow{BB_1} \cdot n}{|\overrightarrow{BB_1}| |n|} = \frac{12}{2 \times \sqrt{57}} = \frac{2\sqrt{57}}{19}$. (11 分)

所以平面 OAM 与平面 OPB 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{57}}{19}$. (12 分)

20. 解: (1) 设事件 M 为“耕地(包括永久农田和一般耕地)种植三大谷物”,

$$\text{则 } P(M) = \frac{90+30}{100+50} = \frac{4}{5}.$$

所以 A 村庄每亩耕地种植三大谷物的概率为 $\frac{4}{5}$. (3 分)

(2) 由(1)知, 每个村庄的三大谷物的种植情况符合要求的概率均为 $\frac{4}{5}$,

由题意知, X 的所有可能取值为 $-5, -3, -1, 1, 3, 5$.

$$\text{则 } P(X=-5) = \left(1 - \frac{4}{5}\right)^5 = \frac{1}{3125},$$

$$P(X=-3) = C_5^1 \frac{4}{5} \times \left(1 - \frac{4}{5}\right)^4 = \frac{4}{625},$$

$$P(X=-1) = C_5^2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \left(1 - \frac{4}{5}\right)^3 = \frac{32}{625},$$

$$P(X=1) = C_5^3 \left(\frac{4}{5}\right)^3 \times \left(1 - \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{128}{625},$$

$$P(X=3) = C_5^4 \left(\frac{4}{5}\right)^4 \times \left(1 - \frac{4}{5}\right) = \frac{256}{625},$$

$$P(X=5) = C_5^5 \left(\frac{4}{5}\right)^5 = \frac{1024}{3125}.$$

则该乡镇的总积分 X 的分布列为

X	-5	-3	-1	1	3	5
P	$\frac{1}{3125}$	$\frac{4}{625}$	$\frac{32}{625}$	$\frac{128}{625}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{1024}{3125}$

$$E(X) = (-5) \times \frac{1}{3125} + (-3) \times \frac{4}{625} + (-1) \times \frac{32}{625} + 1 \times \frac{128}{625} + 3 \times \frac{256}{625} + 5 \times \frac{1024}{3125} = 3. \quad (8 \text{ 分})$$

(3)

劳动力 年龄层次	种植情况		合计
	种植三大谷物	种植棉、油、蔬菜等	
中老年劳动力	65	15	80
青壮年劳动力	5	15	20
合计	70	30	100

$$K^2 \text{ 的观测值 } k = \frac{100 \times (65 \times 15 - 15 \times 5)^2}{80 \times 20 \times 70 \times 30} \approx 24.107.$$

因为 $24.107 > 10.828$,

所以有 99.9% 的把握认为种植作物的种类与劳动力的年龄层次有关. (12 分)

21. 解: (1) 设 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$.

以线段 F_1F_2 为直径的圆过点 P , 所以 $PF_1 \perp PF_2$.

$$\text{所以 } \overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = \left(-c + \frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \left(c + \frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0, \text{ 所以 } c = \sqrt{3}, \text{ 所以 } a^2 - b^2 = 3. \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{将 } P\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ 代入 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0),$$

$$\text{解得 } a^2 = 4, b^2 = 1,$$

$$\text{所以椭圆 } C \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1. \quad (4 \text{ 分})$$

(2) 当直线 MN 的斜率不存在时, 设直线 MN 的方程为 $x = m$,

$$\text{设 } M(m, y_0), N(m, -y_0), \text{ 则 } \frac{m^2}{4} + y_0^2 = 1 \quad \text{①}.$$

$$\text{又 } S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} \times 2|y_0| |m| = 1, \text{ 所以 } m^2 y_0^2 = 1 \quad \text{②}.$$

$$\text{由①②得 } m^2 = 2, y_0^2 = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } k_1 k_2 = \frac{y_0}{m} \cdot \frac{-y_0}{m} = -\frac{y_0^2}{m^2} = -\frac{1}{4}. \quad (5 \text{ 分})$$

当直线 MN 的斜率存在时, 设直线 MN 的方程为 $y = kx + m, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ y = kx + m, \end{cases}$$

$$\text{得 } (4k^2 + 1)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0,$$

$$\Delta = 64k^2 - 16m^2 + 16 > 0,$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = \frac{-8km}{1+4k^2}, x_1 x_2 = \frac{4m^2-4}{1+4k^2}, \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } y_1 y_2 = (kx_1 + m)(kx_2 + m) = k^2 x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 = \frac{m^2-4k^2}{1+4k^2},$$

$$\text{所以 } k_1 k_2 = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = \frac{m^2-4k^2}{4m^2-4} \quad \text{③}. \quad (8 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} \text{又 } |MN| &= \sqrt{1+k^2} \sqrt{|x_1-x_2|^2} \\ &= \sqrt{1+k^2} \sqrt{\frac{64k^2m^2-16(m^2-1)(1+4k^2)}{(1+4k^2)^2}} \\ &= 4\sqrt{1+k^2} \frac{\sqrt{4k^2-m^2+1}}{1+4k^2}, \end{aligned}$$

$$\text{点 } O \text{ 到直线 } MN \text{ 的距离 } d = \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} d \times |MN| = \frac{1}{2} \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} \times 4\sqrt{1+k^2} \cdot$$

$$\frac{\sqrt{4k^2-m^2+1}}{1+4k^2} = \frac{2|m|\sqrt{4k^2-m^2+1}}{1+4k^2} = 1,$$

即 $4m^4 - 4(4k^2 + 1)m^2 + (4k^2 + 1)^2 = 0$,

$$\text{解得 } m^2 = \frac{1+4k^2}{2}, \quad (10 \text{ 分})$$

$$\text{代入 ③ 式, 得 } k_1 k_2 = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = \frac{m^2 - 4k^2}{4m^2 - 4} =$$

$$\frac{\frac{1+4k^2}{2} - 4k^2}{4 \times \frac{1+4k^2}{2} - 4} = -\frac{1}{4}. \quad (11 \text{ 分})$$

综上可知, 当 $\triangle OMN$ 的面积为定值 1 时, $k_1 k_2$ 是定值 $-\frac{1}{4}$. (12 分)

22. 解: (1) 由题意得 $h(x) = m \left(\ln x + x + \frac{2}{x} \right) - \frac{e^x}{x} (x > 0)$,

$$\text{则 } h'(x) = m \left(\frac{1}{x} + 1 - \frac{2}{x^2} \right) - \frac{x e^x - e^x}{x^2} = \frac{m(x^2 + x - 2) - e^x(x-1)}{x^2} = \frac{[m(x+2) - e^x](x-1)}{x^2}, \quad (1 \text{ 分})$$

① 当 $m \leq 0$ 时, $m(x+2) - e^x < 0$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减.

所以 $h(x)$ 在 $x=1$ 处取到极大值, 有唯一的极大值点 $x=1$. (2 分)

② 当 $m > 0$ 时, $h(x)$ 极值点的个数与关于 x 的方程 $m(x+2) - e^x = 0$ 的正实数根有关,

即与函数 $y=m$ 与函数 $y=\frac{e^x}{x+2} (x \in (0, +\infty))$ 的图象的交点个数有关.

$$\text{令 } q(x) = \frac{e^x}{x+2}, \text{ 则 } q'(x) = \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2} > 0,$$

所以 $q(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $q(x) > q(0) = \frac{1}{2}$. (3 分)

结合图象知, (i) 当 $0 < m \leq \frac{1}{2}$ 时, $m(x+2) - e^x < 0$ 恒成立,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减.

所以 $h(x)$ 在 $x=1$ 处取到极大值, 有唯一的极大值点 $x=1$. (4 分)

(ii) 当 $m > \frac{1}{2}$ 时, 存在唯一的 $x_0 \in (0, +\infty)$,

$$\text{使得 } m - \frac{e^x}{x+2} = 0.$$

若 $x_0 = 1$, 则 $m = \frac{e}{3}$, 方程 $(x+2) \left[m - \frac{e^x}{(x+2)} \right] (x-1) = 0$ 有两个相等的实数根 1.

当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

所以 $h(x)$ 没有极值.

若 $x_0 \neq 1$, 则 $m \neq \frac{e}{3}$, 方程 $(x+2) \left[m - \frac{e^x}{(x+2)} \right] (x-1) = 0$ 有两个不相等的实数根 1 和 x_0 , 此时 $h(x)$ 有两个极值点. (6 分)

综上, 当 $m \leq \frac{1}{2}$ 时, 函数 $h(x)$ 有一个极值点,

当 $m > \frac{1}{2}$ 且 $m \neq \frac{e}{3}$ 时, 函数 $h(x)$ 有两个极值点,

当 $m = \frac{e}{3}$ 时, 函数 $h(x)$ 无极值点. (7 分)

(2) 由题意知, $\varphi(x) \geq 1$ 恒成立即 $x e^x - \ln x + x - kx \geq 1$ 恒成立, 等价于 $k \leq \left(\frac{x e^x - \ln x - 1 + x}{x} \right)_{\min}$.

$$\text{令 } m(x) = \frac{x e^x - \ln x - 1 + x}{x},$$

$$\text{则 } m'(x) = \frac{x^2 e^x + \ln x}{x^2}.$$

$$\text{令 } \mu(x) = x^2 e^x + \ln x,$$

易知 $\mu(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{当 } x_1 = \frac{1}{e} \text{ 时, } \mu\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e^2} e^{\frac{1}{e}} - 1 = \frac{1}{e^2 - \frac{1}{e}} - 1 < 0,$$

$$\text{当 } x_2 = 1 \text{ 时, } \mu(1) = e > 0,$$

所以 $\mu(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上存在唯一的零点 x_0 ,

$$\text{且 } \mu(x_0) = x_0^2 e^{x_0} + \ln x_0 = 0,$$

在区间 $(0, x_0)$ 上, $\mu(x) < 0$, $m(x)$ 单调递减, 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上, $\mu(x) > 0$, $m(x)$ 单调递增,

$$\text{所以 } m(x)_{\min} = m(x_0) = \frac{x_0 e^{x_0} - \ln x_0 - 1 + x_0}{x_0}. \quad (9 \text{ 分})$$

$$\text{又因为 } \mu(x_0) = 0, \text{ 所以 } x_0 e^{x_0} = -\frac{1}{x_0} \ln x_0,$$

$$\text{即 } x_0 e^{x_0} = \ln \frac{1}{x_0} \cdot e^{\ln \frac{1}{x_0}}.$$

$$\text{令 } p(x) = x e^x (x > 0), p'(x) = e^x + x e^x > 0,$$

所以 $p(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{所以 } x_0 = \ln \frac{1}{x_0}, \text{ 即 } e^{x_0} = \frac{1}{x_0},$$

$$\text{所以 } m(x_0) = \frac{1 + x_0 - 1 + x_0}{x_0} = 2, \quad (11 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } k \leq 2, \text{ 即 } k \in (-\infty, 2]. \quad (12 \text{ 分})$$