

南外海安金陵考前高三模拟卷

数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题. 本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设复数 z 满足 $(1+i)\bar{z}=1$ ，则 $|z| =$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. 1

2. 已知集合 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ， $B = \{x | \tan x \geq 0, x \in A\}$ ，则 $A \cap B$ 中所有元素的和为

- A. 1 B. 4 C. 5 D. 6

3. 已知向量 a, b 满足 $|a| = 2|b| = 2$ ， $|a - b| = \sqrt{5}$ ，则 $|a + 2b| =$

- A. $2\sqrt{5}$ B. 4 C. $\sqrt{15}$ D. $2\sqrt{2}$

4. 某班 5 名团员参加“共青团知识竞赛”，决出第一名到第五名的名次（无并列名次），已知甲排第三，乙不是第一，丙不是第五，据此推测 5 人的名次排列情况共有（ ）种

- A. 5 B. 8 C. 14 D. 21

5. 若 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ，则 $\frac{\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - 1}{\sin(3\pi - 2\alpha)} =$

- A. $-\frac{1}{2}$ B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. 2

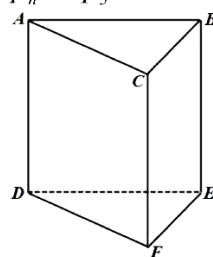
6. 若 $\left(\frac{1}{3}\right)^a = \log_3 a$, $\left(\frac{1}{3}\right)^b = b^3$, $c^{\frac{1}{3}} = 3^{-c}$, 则 a, b, c 的大小关系是

- A. $c < a < b$ B. $c < b < a$ C. $a < c < b$ D. $b < c < a$

7. 如图, 一颗棋子从三棱柱的一个顶点沿棱移到相邻的另一个顶点的概率均为 $\frac{1}{3}$, 开始时,

棋子在上底面点 A 处, 若移了 n 次后, 棋子落在上底面顶点的概率记为 p_n . 则 $p_5 =$

- A. $\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{1}{2}$ B. $\left(\frac{1}{3}\right)^6 + \frac{1}{2}$
C. $\left(\frac{1}{3}\right)^6 - \frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{1}{2}$



8. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形, $PA = PB = PC$, E, F 分别是 PA, AB 的中点, 且 $CE \perp EF$, 则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为

- A. 6π B. 12π C. 24π D. 36π

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 将函数 $f(x) = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度得到 $g(x)$ 的图像, 则下列判断正确的是

- A. 函数 $g(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增
B. 函数 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减
C. 函数 $g(x)$ 图像关于直线 $x = \frac{7\pi}{12}$ 对称
D. 函数 $g(x)$ 图像关于点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 对称

10. 已知函数 $f(x) = x^n - \frac{4}{x^n}$ (n 为正整数), 则下列判断正确的有

A. 对于任意的正整数 n , $f(x)$ 为奇函数

B. 存在正整数 n , $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称

C. 当 n 为奇数时, $f(x)$ 有四个零点

D. 当 n 为偶数时, $f(x)$ 有两个零点

11. 在棱长为1的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M 是棱 CC_1 的中点, N 为侧面 BB_1C_1C 内的动点, 且满足 $A_1N \parallel$ 平面 AD_1M , 则下列结论中正确的有

A. 动点 N 在侧面 BB_1C_1C 内的轨迹长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. 直线 A_1N 与侧面 BB_1C_1C 所成的最小角为 $\frac{\pi}{3}$

C. 直线 A_1N 与侧面 BB_1C_1C 所成的最大角的正切值为 $2\sqrt{2}$

D. 当直线 A_1N 与侧面 BB_1C_1C 所成角最小时, 过点 D, M, N 的平面截正方体所得的截面面积为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

12. 已知双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$, $P(x_0, y_0)$ 为双曲线上一点, 过 P 点的切线为 l , 双曲线的左右焦点 F_1, F_2 到直线 l 的距离分别为 d_1, d_2 , 则

A. $d_1 d_2 = 5$

B. 直线 l 与双曲线渐近线的交点为 M, N , 则 M, N, F_1, F_2 四点共圆

C. 该双曲线的共轭双曲线的方程为 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$

D. 过 F_2 的弦长为5的直线有且只有1条

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 某圆台下底半径为2, 上底半径为1, 母线长为2, 则该圆台的表面积为_____.

14. 高中生必读名著有《西游记》、《红楼梦》、《三国演义》、《水浒传》、《复活》、《老人与海》, 后两本为外国名著, 甲读了其中的两本, 乙读了其中的1本, 则甲、乙看同一本外国名著的概

率为_____.

15. 设 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 直线 l 过 F_1 交椭圆 C 于 A, B

两点, 交 y 轴于 P 点, 若 $\overrightarrow{F_1P} = \overrightarrow{AF_1}$ 且 $\overrightarrow{F_2A} \cdot \overrightarrow{F_2P} = 0$, 则椭圆的离心率为_____.

16. 艾萨克·牛顿 (1642—1727) 被称为有史以来最有影响力的思想家之一, 在数学方面, 牛顿 “明显地推进了当时数学的每一个分支”. 牛顿在给莱布尼茨的信中描述了他的一个发现——

广义二项式展开, 即 $(x+y)^\alpha = \binom{\alpha}{0}x^\alpha + \binom{\alpha}{1}x^{\alpha-1}y + \binom{\alpha}{2}x^{\alpha-2}y^2 + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^{\alpha-k}y^k + \cdots$,

其中广义二项式系数 $\binom{\alpha}{0} = 1$, $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}^*$. 根据

以上信息, 若对任意 $|x| < \frac{1}{2}$ 都有 $\frac{(1-x)^3}{(1+2x)^2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$, 则

$a_3 =$ _____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_{n+1} + a_n = 2n + 7 (n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $a_1 = 4$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 已知数列 $\{b_n\}$ 满足： $b_n = \begin{cases} 1, n=1, \\ \log_{(n+2)} a_n, n \geq 2, n \in \mathbf{N}^* \end{cases}$, 定义使 $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_k (k \in \mathbf{N}^*)$ 为

整数 k 叫做 “幸福数”，求区间 $[1, 2021]$ 内所有 “幸福数” 的和

18 . (12 分) 已知函数 $f(x) = \cos x \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \sin^2 x$.

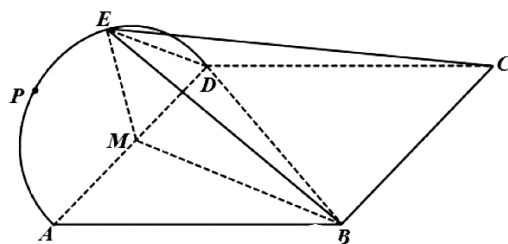
(1) 求 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最值 ;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中 , 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $f\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $a = 7$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{15\sqrt{3}}{4}$, 求 $\sin B + \sin C$ 的值.

19 . (12 分) 如图 , E 是以菱形 $ABCD$ 的边 AD 为直径的半圆弧上一点 , $\angle BAD = 60^\circ$, $AB = BE = 2DE = 2$, 且 M 为 AD 的中点.

(1) 求证 : 平面 $BEM \perp$ 平面 DEM ;

(2) 设 P 为 $\widehat{AE}$ 上任意一点 , 求二面角 $B - PD - C$ 的余弦值取值范围.



20 .(12 分) 某大学采用线上 (网络讲座) 与线下 (现场讲座) 相结合的方式开展一次全院学生参加的《奋进新青年 , 追梦新时代》的专题培训.为了解参加培训的学生对于线上和线下培训的满意程度.现随机抽取15名学生 , 分别对线上、线下两种培训进行满意度测评 , 根据学生的评分 (满分100) 得到如下数据 :

线上 : 70 71 73 75 77 79 82 83 83 90 92 93 95 96 96

线下 : 72 73 77 79 79 84 84 85 87 88 90 93 94 95 96

根据满意度的评分 , 将满意度从低到高分三个等级 :

满意度评分	低于 80 分	80 分到 89 分	不低于 90 分
满意度等级	不满意	满意	很满意

根据所给数据 , 用事件发生的频率估计相应事件发生的概率.

- (1) 从对线上培训评价为 “满意” 与 “很满意” 的样本中随机抽取 3 人 , 设 X 为 3 人中评价为 “很满意” 的人数 , 求随机变量 X 的分布列及数学期望 ;
- (2) 根据以上的数据 , 现随机邀请 5 名评价者对线上、线下培训评分 , 至多有 1 人对线上和线下培训评价等级相同的概率.

21 . (12 分) 已知抛物线 $x^2 = 4y$, P 为抛物线外一点 , 过 P 点作抛物线的切线交抛物线于 A, B 两点 , 交 x 轴于 M, N 两点.

(1) 若 $P(-1, -2)$, 设 $\triangle OAB$ 的面积为 S_1 , $\triangle PMN$ 的面积为 S_2 , 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的值 ;

(2) 若 $P(x_0, y_0)$, 求证 : $\triangle PMN$ 的垂心 H 在定直线上.

22 . (12 分) 设函数 $f(x) = 3\sin x - x^3$, $g(x) = 2e^{x-\frac{2}{3}}$.

(1) 证明 : 当 $x \in [-1, 0]$ 时 , $f(x) \leq 0$;

(2) 判断函数 $F(x) = f(x) - g(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上的零点个数.

南外海安金陵考前高三模拟卷

数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题.本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设复数 z 满足 $(1+i)\bar{z}=1$ ，则 $|z|$ =

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. 1

【答案】B

2. 已知集合 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ， $B = \{x | \tan x \geq 0, x \in A\}$ ，则 $A \cap B$ 中所有元素的和为

- A. 1 B. 4 C. 5 D. 6

【答案】C

3. 已知向量 a, b 满足 $|a| = 2|b| = 2$ ， $|a - b| = \sqrt{5}$ ，则 $|a + 2b|$ =

- A. $2\sqrt{5}$ B. 4 C. $\sqrt{15}$ D. $2\sqrt{2}$

【答案】D

4. 某班 5 名团员参加“共青团知识竞赛”，决出第一名到第五名的名次（无并列名次），已知甲排第三，乙不是第一，丙不是第五，据此推测 5 人的名次排列情况共有（ ）种

- A. 5 B. 8 C. 14 D. 21

【答案】C

5. 若 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, 则 $\frac{\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - 1}{\sin(3\pi - 2\alpha)} =$

A. $-\frac{1}{2}$

B. -2

C. $\frac{1}{2}$

D. 2

【答案】A

6. 若 $\left(\frac{1}{3}\right)^a = \log_3 a$, $\left(\frac{1}{3}\right)^b = b^3$, $c^{\frac{1}{3}} = 3^{-c}$, 则 a, b, c 的大小关系是

A. $c < a < b$

B. $c < b < a$

C. $a < c < b$

D. $b < c < a$

【答案】B

7. 如图, 一颗棋子从三棱柱的一个顶点沿棱移到相邻的另一个顶点的概率均为 $\frac{1}{3}$, 刚开始时,

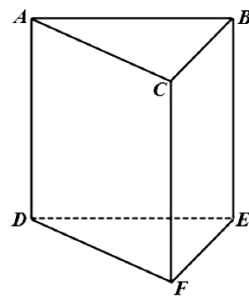
棋子上底面点 A 处, 若移了 n 次后, 棋子落在上底面顶点的概率记为 p_n . 则 $p_5 =$

A. $\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{1}{2}$

B. $\left(\frac{1}{3}\right)^6 + \frac{1}{2}$

C. $\left(\frac{1}{3}\right)^6 - \frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{1}{2}$



【答案】D

【解析】 $p_1 = \frac{2}{3}$, $p_2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{9}$

移了 n 次后棋子落在上底面顶点的概率为 p_n

故落在下底面顶点的概率为 $1 - p_n$

于是移了 $n+1$ 次后棋子落在上底面顶点的概率为

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}(1 - p_n) = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}$$

$$\therefore p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \left\{p_n - \frac{1}{2}\right\} \text{ 是等比数列, 首项为 } \frac{1}{6}, \text{ 公比为 } \frac{1}{3}$$

$$p_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3^n}, \therefore p_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3^5}, \text{选 D.}$$

8. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形, $PA=PB=PC$, E, F 分别是 PA, AB 的中点, 且 $CE \perp EF$, 则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为

A. 6π B. 12π C. 24π D. 36π

【答案】A

【解析】 易证 $PB \perp AC$

$\because EF$ 为 $\triangle PAB$ 中位线, $\therefore EF \parallel PB$

又 $\because EF \perp CE$, $\therefore PB \perp CE$, $CE \cap AC = C$, $AC, CE \subset \text{平面 } PAC$

$\therefore PB \perp \text{平面 } PAC$, $\therefore PB \perp PA$, 且 $PB \perp PC$

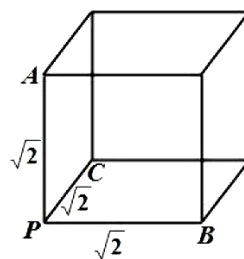
则 PA, PB, PC 两两垂直

如图将 $P-ABC$ 补成一个正方体

$$AB = AC = BC = 2$$

$$\therefore PA = PB = PC = \sqrt{2}$$

外接球半径 $r = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $S = 4\pi r^2 = 6\pi$, 选 A.



二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 将函数 $f(x) = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度得到 $g(x)$ 的图像，则下列判

断正确的是

A. 函数 $g(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增

B. 函数 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减

C. 函数 $g(x)$ 图像关于直线 $x = \frac{7\pi}{12}$ 对称

D. 函数 $g(x)$ 图像关于点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 对称

【答案】ACD

10. 已知函数 $f(x) = x^n - \frac{4}{x^n}$ (n 为正整数), 则下列判断正确的有

A. 对于任意的正整数 n , $f(x)$ 为奇函数

B. 存在正整数 n , $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称

C. 当 n 为奇数时, $f(x)$ 有四个零点

D. 当 n 为偶数时, $f(x)$ 有两个零点

【答案】BD

11. 在棱长为1的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M 是棱 CC_1 的中点, N 为侧面 BB_1C_1C 内的动点, 且满足 $A_1N \parallel$ 平面 AD_1M , 则下列结论中正确的有

A. 动点 N 在侧面 BB_1C_1C 内的轨迹长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. 直线 A_1N 与侧面 BB_1C_1C 所成的最小角为 $\frac{\pi}{3}$

C. 直线 A_1N 与侧面 BB_1C_1C 所成的最大角的正切值为 $2\sqrt{2}$

D. 当直线 A_1N 与侧面 BB_1C_1C 所成角最小时, 过点 D, M, N 的平面截正方体所得的截面面积为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

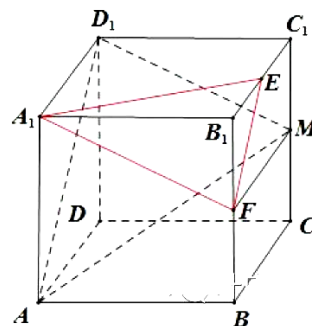
【答案】AC

【解析】 取 B_1C_1 中点 E , BB_1 中点 F , 连 EF

易证 $A_1F \parallel DM$, $EF \parallel AD_1$

$\therefore$ 平面 $A_1EF \parallel$ 平面 AD_1M

$\therefore$ 由 $A_1N \parallel$ 平面 AD_1M , $N \in$ 侧面 BCC_1B_1



$\therefore N$ 点轨迹为 EF , $EF = \frac{\sqrt{2}}{2}$, A 对

$A_1B_1 \perp$ 平面 BB_1C_1C

直线 A_1N 与侧面 BB_1C_1C 所成角 α 为 A_1N 与 A_1B_1 所成角的余角

当 N 与 E (或 F 重合) 时 A_1N 与 A_1B_1 所成角最大

$$\tan \angle NA_1B_1 = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ$$

$\therefore \angle NA_1B_1 < 30^\circ$, $\therefore$ 直线与平面所成角大于 60° , B 错

当 N 为 EF 中点时 , $\angle NA_1B_1$ 最小

$$\text{此时 } \tan \alpha = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \angle NA_1B_1 \right) = \frac{1}{\tan \angle NA_1B_1} = \frac{A_1B_1}{B_1N} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = 2\sqrt{2} , \text{ C 对}$$

当 N 为 B_1M 与 EF 的交点时 , 截面为菱形 DGB_1M (其中 G 为 BB_1 中点)

$$\frac{1}{2} \cdot GM \cdot DB_1 = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{2} > \frac{\sqrt{5}}{2} , \text{ D 错}$$

选 AC.

12 . 已知双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$, $P(x_0, y_0)$ 为双曲线上一点 , 过 P 点的切线为 l , 双曲线的左右

焦点 F_1, F_2 到直线 l 的距离分别为 d_1, d_2 , 则

A . $d_1 d_2 = 5$

B . 直线 l 与双曲线渐近线的交点为 M, N , 则 M, N, F_1, F_2 四点共圆

C . 该双曲线的共轭双曲线的方程为 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$

D . 过 F_2 的弦长为 5 的直线有且只有 1 条

【答案】 AB

【解析】

切线 l 的方程为 $\frac{x_0 x}{4} - \frac{y_0 y}{5} = 1 \Rightarrow 5x_0 x - 4y_0 y = 20$, $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$,

$$d_1 d_2 = \frac{|-15x_0 - 20|}{\sqrt{(5x_0)^2 + (4y_0)^2}} \cdot \frac{|15x_0 - 20|}{\sqrt{25x_0^2 + 16y_0^2}} = \frac{25(9x_0^2 - 16)}{25x_0^2 + 16y_0^2} = \frac{25(9x_0^2 - 16)}{25x_0^2 + (5x_0^2 - 20) \cdot 4} = 5 ,$$

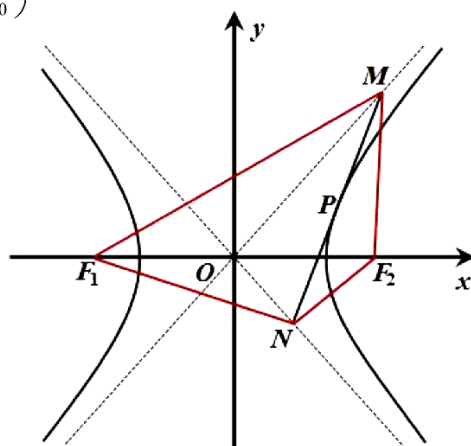
A 正确

$$\text{对于 B, } \begin{cases} 5x_0x - 4y_0y = 20 \\ y = \frac{\sqrt{5}}{2}x \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}x_0 - 2y_0}, \frac{10}{\sqrt{5}x_0 - 2y_0}\right)$$

$$\begin{cases} 5x_0x - 4y_0y = 20 \\ y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x \end{cases}, N\left(\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}x_0 + 2y_0}, \frac{-10}{\sqrt{5}x_0 + 2y_0}\right)$$

$$k_{MF_1} = \frac{\frac{10}{\sqrt{5}x_0 - 2y_0}}{\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}x_0 - 2y_0} + 3} = \frac{10}{4\sqrt{5} + 3\sqrt{5}x_0 - 6y_0} ,$$

$$k_{MF_2} = \frac{\frac{10}{\sqrt{5}x_0 - 2y_0}}{\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}x_0 - 2y_0} - 3} = \frac{10}{4\sqrt{5} - 3\sqrt{5}x_0 + 6y_0}$$



$$\tan \angle F_1 M F_2 = \frac{\frac{10}{4\sqrt{5} - 3\sqrt{5}x_0 + 6y_0} - \frac{10}{4\sqrt{5} + 3\sqrt{5}x_0 - 6y_0}}{1 + \frac{100}{(4\sqrt{5} + 3\sqrt{5}x_0 - 6y_0)(4\sqrt{5} - 3\sqrt{5}x_0 + 6y_0)}} = \frac{60(\sqrt{5}x_0 - 2y_0)}{180 - (3\sqrt{5}x_0 - 6y_0)^2}$$

$$k_{NF_1} = \frac{\frac{-10}{\sqrt{5}x_0 + 2y_0}}{\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}x_0 + 2y_0} + 3} = \frac{-10}{4\sqrt{5} + 3\sqrt{5}x_0 + 6y_0} ,$$

$$k_{NF_2} = \frac{\frac{-10}{\sqrt{5}x_0 + 2y_0}}{\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}x_0 + 2y_0} - 3} = \frac{-10}{4\sqrt{5} - 3\sqrt{5}x_0 - 6y_0}$$

$$\text{则 } \tan \angle F_1 N F_2 = \frac{\frac{-10}{4\sqrt{5} + 3\sqrt{5}x_0 + 6y_0} + \frac{10}{4\sqrt{5} - 3\sqrt{5}x_0 - 6y_0}}{1 + \frac{100}{(4\sqrt{5})^2 - (3\sqrt{5}x_0 + 6y_0)^2}} = \frac{60(\sqrt{5}x_0 + 2y_0)}{180 - (3\sqrt{5}x_0 + 6y_0)^2}$$

$$\tan \angle F_1 M F_2 + \tan \angle F_1 N F_2$$

$$= \frac{60(\sqrt{5}x_0 - 2y_0)[180 - (3\sqrt{5}x_0 + 6y_0)^2] + 60(\sqrt{5}x_0 + 2y_0)[180 - (3\sqrt{5}x_0 - 6y_0)^2]}{[180 - (3\sqrt{5}x_0 - 6y_0)^2][180 - (3\sqrt{5}x_0 + 6y_0)^2]}$$

考察分子

$$= 60\{(\sqrt{5}x_0 - 2y_0)[180 - 9(\sqrt{5}x_0 + 2y_0)^2] + (\sqrt{5}x_0 + 2y_0)[180 - 9(\sqrt{5}x_0 - 2y_0)^2]\}$$

$$= 540\{(\sqrt{5}x_0 - 2y_0)[20 - (\sqrt{5}x_0 + 2y_0)^2] + (\sqrt{5}x_0 + 2y_0)[20 - (\sqrt{5}x_0 - 2y_0)^2]\}$$

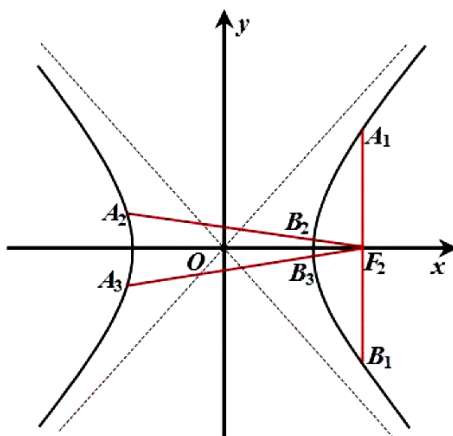
$$= 540[20\sqrt{5}x_0 - 40y_0 - (5x_0^2 - 4y_0^2)(\sqrt{5}x_0 + 2y_0) + 20\sqrt{5}x_0 + 40y_0 - (5x_0^2 - 4y_0^2)(\sqrt{5}x_0 - 2y_0)] = 540[40\sqrt{5}x_0 - 20(\sqrt{5}x_0 + 2y_0 - 20(\sqrt{5}x_0 - 2y_0))] = 0$$

$$\therefore \tan \angle F_1 M F_2 + \tan \angle F_2 N F_2 = 0, \angle F_1 M F_2 + \angle F_2 N F_2 = 180^\circ$$

$\therefore M, N, F_1, F_2$ 四点共圆, B 正确

对于 C, 双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 的共轭双曲线为 $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{4} = 1$, C 错误

对于 D, 过 F_2 的弦长为 5 的直线有 3 条, 如图中的 A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 , D 错, 选 AB.



三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 某圆台下底半径为 2, 上底半径为 1, 母线长为 2, 则该圆台的表面积为_____.

【答案】 11π

14. 高中生必读名著有《西游记》、《红楼梦》、《三国演义》、《水浒传》、《复活》、《老人与海》，后两本为外国名著，甲读了其中的两本，乙读了其中的 1 本，则甲、乙看同一本外国名著的概率

率为_____.

【答案】 $\frac{1}{9}$

15. 设 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 直线 l 过 F_1 交椭圆 C 于 A, B 两点, 交 y 轴于 P 点, 若 $\overrightarrow{F_1P} = \overrightarrow{AF_1}$ 且 $\overrightarrow{F_2A} \cdot \overrightarrow{F_2P} = 0$, 则椭圆的离心率为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

【解析】 设 $P(0, t)$, $\because \overrightarrow{F_1P} = \overrightarrow{AF_1}$, $\therefore F_1$ 为 AP 中点

$$\therefore A(-2c, -t), \overrightarrow{F_2A} \cdot \overrightarrow{F_2P} = 0$$

$$\therefore (-3c_1 - t)(-c, t) = 0, t^2 = 3c^2$$

$$A \text{ 在椭圆上}, \therefore \frac{4c^2}{a^2} + \frac{3c^2}{b^2} = 1$$

$$4b^2c^2 + 3a^2c^2 = a^2b^2, 4(a^2 - c^2)c^2 + 3a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$4a^2c^2 - 4c^4 + 3a^2c^2 = a^4 - a^2c^2, a^4 - 8a^2c^2 + 4c^4 = 0$$

$$1 - 8e^2 + 4e^4 = 0, e^2 = \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{8} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{4}, e \in (0, 1)$$

$$\therefore e^2 = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2, \therefore e = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

16. 艾萨克·牛顿 (1642—1727) 被称为有史以来最有影响力的思想家之一, 在数学方面, 牛顿“明显地推进了当时数学的每一个分支”. 牛顿在给莱布尼茨的信中描述了他的一个发现——

—广义二项式展开, 即 $(x+y)^\alpha = \binom{\alpha}{0}x^\alpha + \binom{\alpha}{1}x^{\alpha-1}y + \binom{\alpha}{2}x^{\alpha-2}y^2 + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^{\alpha-k}y^k + \cdots$,

其中广义二项式系数 $\binom{\alpha}{0} = 1, \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}, \alpha \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{N}^*$. 根据

以上信息, 若对任意 $|x| < \frac{1}{2}$ 都有 $\frac{(1-x)^3}{(1+2x)^2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$, 则

$$a_3 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 -81

【解析】法一：

$$\begin{aligned}(1+2x)^{-2} &= \binom{-2}{0} 1^{-2} + \binom{-2}{1} 1^{-3} 2x + \binom{-2}{2} 1^{-4} \cdot (2x)^2 + \binom{-2}{3} 1^{-5} (2x)^3 + \cdots \\&= 1 + \frac{-2}{1} \cdot 2x + \frac{(-2)(-3)}{2} 4x^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!} 8x^3 + \cdots \\(1-x)^3 &= 1 - 3x + 3x^2 - x^3 \\ \frac{(1-x)^3}{(1+2x)^2} &= 1 - 3x + 3x^2 - x^3 - 4x(1-3x+3x^2) + 12x^2(1-3x) - 32x^3 + a_4x^4 + \cdots \\&= 1 - 7x + 27x^2 - 81x^3 \\\therefore a_3 &= -81\end{aligned}$$

法二：

$$(1-x)^3 = (1+2x)^2(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots), \text{ 显然 } a_0 = 1$$

$$\text{比较两边 } x \text{ 的系数} \Rightarrow C_3^1 \cdot (-1) = a_1 + 4a_0 \Rightarrow a_1 = -7$$

$$\text{比较两边 } x^2 \text{ 的系数} \Rightarrow C_3^2 = a_2 + 4a_1 + 4a_0 \Rightarrow a_2 = 27$$

$$\text{比较两边 } x^3 \text{ 的系数} \Rightarrow C_3^3 \cdot (-1) = a_3 + 4a_2 + 4a_1 \Rightarrow a_3 = -81$$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_{n+1} + a_n = 2n + 7$ ($n \in \mathbf{N}^*$)，且 $a_1 = 4$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 已知数列 $\{b_n\}$ 满足： $b_n = \begin{cases} 1, n=1, \\ \log_{(n+2)} a_n, n \geq 2, n \in \mathbf{N}^* \end{cases}$ ，定义使 $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_k$ ($k \in \mathbf{N}^*$) 为

整数 k 叫做“幸福数”，求区间 $[1, 2021]$ 内所有“幸福数”的和

【解析】

$$(1) \because a_{n+1} + a_n = 2n + 7 \text{ ①}, \therefore n \geq 2, a_n + a_{n-1} = 2n + 5 \text{ ②}$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时}, \text{①} - \text{②} \Rightarrow a_{n+1} - a_{n-1} = 2$$

$\therefore \{a_n\}$ 的奇数项与偶数项各自成等差数列, 且公差均为 2, $a_1 = 4$, $a_2 = 5$

$$\therefore a_{2n-1} = a_1 + 2(n-1) = 2n + 2 = 2n - 1 + 3 \Rightarrow a_n = n + 3 \quad (n \text{ 为奇数})$$

$$a_{2n} = a_2 + 2(n-1) = 2n + 3 \Rightarrow a_n = n + 3 \quad (n \text{ 为偶数})$$

$$\therefore a_n = n + 3$$

$$(2) \quad b_n = \begin{cases} 1, & n=1 \\ \log_{(n+2)}(n+3), & n \geq 2, n \in \mathbf{N}^* \end{cases}$$

$$b_1, b_2, b_3 \cdots b_k = \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdots \log_{(k+2)}(k+3) = \log_4(k+3)$$

$$\text{设 } \log_4(k+3) = m, \quad m \in \mathbf{N}^*, \quad \therefore k = 4^m - 3$$

$$\text{令 } 1 \leq 4^m - 3 \leq 2021 \Rightarrow 1 \leq m \leq 5, m \in \mathbf{N}^*, \quad \therefore m = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$\therefore \text{区间 } [1, 2021] \text{ 内的“幸福数”为 } 4^1 - 3, 4^2 - 3, \cdots, 4^5 - 3$$

$$\therefore \text{所有“幸福数”的和为 } \frac{4 \cdot (1 - 4^5)}{1 - 4} - 3 \times 5 = 1349.$$

$$18. (12 \text{ 分}) \text{ 已知函数 } f(x) = \cos x \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \sin^2 x.$$

$$(1) \text{ 求 } f(x) \text{ 在 } \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \text{ 上的最值;}$$

$$(2) \text{ 在 } \triangle ABC \text{ 中, 角 } A, B, C \text{ 所对的边分别为 } a, b, c, \quad f\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad a = 7, \quad \triangle ABC \text{ 的}$$

$$\text{面积为 } \frac{15\sqrt{3}}{4}, \text{ 求 } \sin B + \sin C \text{ 的值.}$$

【解析】

$$(1) \quad f(x) = \cos x \left(\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) - \sqrt{3} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sin x \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x$$

$$= \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos 2x - \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \therefore \frac{\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6}, \therefore \frac{1}{2} \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$$

$$\therefore \frac{1-3\sqrt{3}}{4} \leq f(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}, \therefore f(x)_{\min} = \frac{1-3\sqrt{3}}{4}, f(x)_{\max} = \frac{2-3\sqrt{3}}{4}$$

$$(2) f\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{3\sqrt{3}}{4} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore \sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow A + \frac{\pi}{3} = \pi, A = \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{15\sqrt{3}}{4} \Rightarrow bc = 15, b^2 + c^2 - 2bc \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 49$$

$$\therefore (b+c)^2 - bc = 49, b+c = 8$$

$$\therefore \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{14\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \frac{b+c}{\sin B + \sin C} = \frac{14\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin B + \sin C = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

19. (12分) 如图, E 是以菱形 $ABCD$ 的边 AD 为直径的半圆弧上一点, $\angle BAD = 60^\circ$, $AB = BE = 2DE = 2$, 且 M 为 AD 的中点.

(1) 求证: 平面 $BEM \perp$ 平面 DEM ;

(2) 设 P 为 $\widehat{AE}$ 上任意一点, 求二面角 $B-PD-C$ 的余弦值取值范围.

【解析】

(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形, $\angle BAD = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ABD$ 为等边 $\triangle$

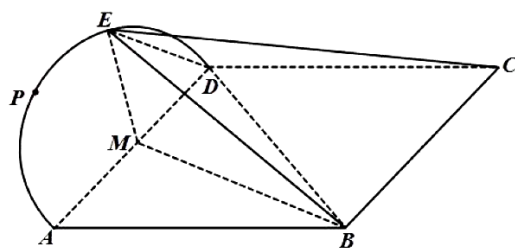
又 $\because M$ 为 AD 的中点, $\therefore BM \perp AD$

$$\because DM = EM = 1, BM = \sqrt{3}, BE = 2, \therefore BM^2 + EM^2 = 4 = BE^2$$

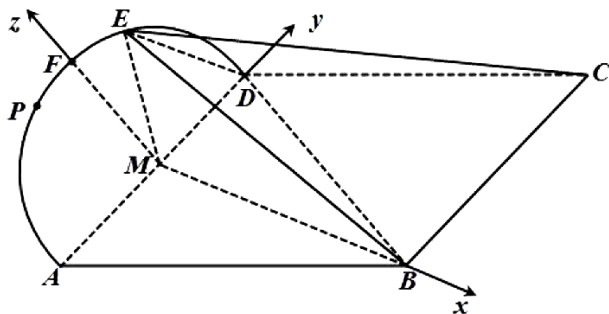
$\therefore BM \perp EM$, 又 $\because AD \cap EM = M, \therefore BM \perp$ 平面 DEM

$\because BM \subset$ 平面 $BEM, \therefore$ 平面 $BEM \perp$ 平面 DEM

(2) 取半圆弧中点 F , 连接 MF , 由 (1) 知 $BM \perp$ 平面 DEM ,



$\because MF \perp AD$, $\therefore MF \perp$ 平面 $ABCD$, 如图以 M 为坐标原点, 建立空间直角坐标系


$$\overrightarrow{BD} = (-\sqrt{3}, 1, 0) \quad , \quad \overrightarrow{PD} = (0, 1 - \cos \theta, -\sin \theta) \quad , \quad \overrightarrow{DC} = (\sqrt{3}, 1, 0)$$
$$\therefore \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{PD} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}x_1 + y_1 = 0 \\ (1 - \cos\theta)y_1 - \sin\theta z_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_1 = (\sin\theta, \sqrt{3}\sin\theta, \sqrt{3}(1 - \cos\theta))$$

$$\begin{cases} \vec{n_2} \cdot \vec{PD} = 0 \\ \vec{n_2} \cdot \vec{DC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 - \cos \theta)y_2 - \sin \theta z_2 = 0 \\ \sqrt{3}x_2 + y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{n_2} = (-\sin \theta, \sqrt{3} \sin \theta, \sqrt{3}(1 - \cos \theta))$$

$$\therefore \cos \alpha = |\cos \varphi| = \frac{\left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \right|}{\left| \frac{2 \sin^2 \theta + 3(1 - \cos \theta)^2}{4 \sin^2 \theta + 3(1 - \cos \theta)^2} \right|} = \frac{\left| \frac{2(1 - \cos^2 \theta) + 3(1 - \cos \theta)^2}{4(1 - \cos^2 \theta) + 3(1 - \cos \theta)^2} \right|}{\left| \frac{2 \sin^2 \theta + 3(1 - \cos \theta)^2}{4 \sin^2 \theta + 3(1 - \cos \theta)^2} \right|}$$

$$= \left| \frac{2(1 + \cos \theta) + 3(1 - \cos \theta)}{4(1 + \cos \theta) + 3(1 - \cos \theta)} \right| = \left| \frac{5 - \cos \theta}{7 + \cos \theta} \right| = \left| \frac{12}{7 + \cos \theta} - 1 \right|, \quad -1 \leq \cos \theta \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{8}{5} \leq \frac{12}{7 + \cos \theta} \leq 2, \quad \frac{3}{5} \leq \frac{12}{7 + \cos \theta} - 1 \leq 1$$

$$\therefore \cos \alpha \text{ 的取值范围为 } \left[\frac{3}{5}, 1 \right].$$

20. (12 分) 某大学采用线上(网络讲座)与线下(现场讲座)相结合的方式开展一次全院学生参加的《奋进新青年, 追梦新时代》的专题培训. 为了解参加培训的学生对于线上和线下培

训的满意程度.现随机抽取15名学生，分别对线上、线下两种培训进行满意度测评，根据学生的评分（满分100）得到如下数据：

线上：70 71 73 75 77 79 82 83 83 90 92 93 95 96 96

线下：72 73 77 79 79 84 84 85 87 88 90 93 94 95 96

根据满意度的评分，将满意度从低到高分三个等级：

满意度评分	低于80分	80分到89分	不低于90分
满意度等级	不满意	满意	很满意

根据所给数据，用事件发生的频率估计相应事件发生的概率.

(1) 从对线上培训评价为“满意”与“很满意”的样本中随机抽取3人，设 X 为3人中评价为“很满意”的人数，求随机变量 X 的分布列及数学期望；

(2) 根据以上的数据，现随机邀请5名评价者对线上、线下培训评分，至多有1人对线上和线下培训评价等级相同的概率.

【解析】

(1) 线上培训满意的人数为3人，很满意的人数为6人

X 的所有可能取值为0,1,2,3

$$P(X=0) = \frac{C_6^0 \cdot C_3^3}{C_9^3} = \frac{1}{84}, \quad P(X=1) = \frac{C_6^1 \cdot C_3^2}{C_9^3} = \frac{3}{14},$$

$$P(X=2) = \frac{C_6^2 \cdot C_3^1}{C_9^3} = \frac{15}{28}, \quad P(X=3) = \frac{C_6^3}{C_9^3} = \frac{5}{21}$$

X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{84}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{21}$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{84} + 1 \times \frac{3}{14} + 2 \times \frac{15}{28} + 3 \times \frac{5}{21} = 2 \text{ 或 } X \text{ 服从于参数为 } H(3, 6, 9) \text{ 的超几何分布,}$$

$$E(X) = \frac{nM}{N} = \frac{3 \times 6}{9} = 2$$

(2) 线上不满意概率： $\frac{2}{5}$ ；满意概率： $\frac{1}{5}$ ，很满意概率： $\frac{2}{5}$

线下不满意概率： $\frac{1}{3}$ ，满意概率： $\frac{1}{3}$ ，很满意的概率： $\frac{1}{3}$

某一名评价者线上、线下评分等级相同的概率为： $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

不同的概率为： $\frac{2}{3}$

$\therefore$ 至多有1人对线上，线下培训评价等级相同的概率为： $C_5^1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{112}{243}$.

21 (12分) 已知抛物线 $x^2 = 4y$ ， P 为抛物线外一点，过 P 点作抛物线的切线交抛物线于 A, B 两点，交 x 轴于 M, N 两点.

(1) 若 $P(-1, -2)$ ，设 $\triangle OAB$ 的面积为 S_1 ， $\triangle PMN$ 的面积为 S_2 ，求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的值；

(2) 若 $P(x_0, y_0)$ ，求证： $\triangle PMN$ 的垂心 H 在定直线上.

【解析】

(1) 设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$

$\therefore$ 直线 PA 的方程为 $x_1x = 4 \cdot \frac{y_1 + y}{2} \Rightarrow x_1x - 2y - 2y_1 = 0$ ①

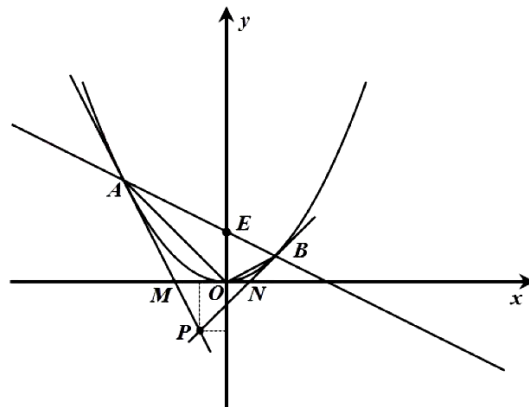
PB 的方程为 $x_2x - 2y - 2y_2 = 0$ ②

$\therefore PA, PB$ 均过 $P(-1, -2)$ ，

$$\therefore \begin{cases} -x_1 + 4 - 2y_1 = 0 \\ -x_2 + 4 - 2y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2y_1 - 4 = 0 \\ x_2 + 2y_2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 $x + 2y - 4 = 0$ 既过 A ，也过 B ，

$\therefore$ 直线 AB 的方程为： $x + 2y - 4 = 0$



设 AB 与 y 轴交于点 $E, E(0, 2)$ ， $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot 2|x_1 - x_2| = |x_1 - x_2|$

在①式中令 $y = 0 \Rightarrow x = \frac{2y_1}{x_1} = \frac{x_1}{2}$ ， $\therefore M\left(\frac{x_1}{2}, 0\right), N\left(\frac{x_2}{2}, 0\right)$

$$\therefore S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{x_1 - x_2}{2} \right| \cdot 2 = \left| \frac{x_1 - x_2}{2} \right|, \therefore \frac{S_1}{S_2} = 2$$

(2) 仿照(1)知AB方程为 $x_0x - 2y - 2y_0 = 0$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $M\left(\frac{x_1}{2}, 0\right)$, $N\left(\frac{x_2}{2}, 0\right)$

$$\begin{cases} x_0x - 2y - 2y_0 = 0 \\ x^2 = 4y \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x_0x + 4y_0 = 0$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_0 \\ x_1x_2 = 4y_0 \end{cases}, \therefore H \text{ 为 } \triangle PMN \text{ 的垂心}$$

$$\text{设 } H(x_0, m), \overrightarrow{MH} = \left(x_0 - \frac{x_1}{2}, m\right), \overrightarrow{PN} = \left(\frac{x_2}{2} - x_0, -y_0\right)$$

$$\text{由 } \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \Rightarrow \left(x_0 - \frac{x_1}{2}\right)\left(\frac{x_2}{2} - x_0\right) - my_0 = 0$$

$$\therefore \frac{x_0}{2}(x_1 + x_2) - x_0^2 - \frac{x_1x_2}{4} - my_0 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x_0}{2} \cdot 2x_0 - x_0^2 - y_0 - my_0 = 0$$

$\therefore m = -1$, 故 $\triangle PMN$ 的垂心在定直线 $y = -1$ 上.

22. (12分) 设函数 $f(x) = 3\sin x - x^3$, $g(x) = 2e^{x-\frac{2}{3}}$.

(1) 证明: 当 $x \in [-1, 0]$ 时, $f(x) \leq 0$;

(2) 判断函数 $F(x) = f(x) - g(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上的零点个数.

【解析】

$$(1) f'(x) = 3\cos x - 3x^2 = 3(\cos x - x^2)$$

$$\text{令 } h(x) = \cos x - x^2, h'(x) = -\sin x - 2x \geq 0, \therefore h(x) \text{ 在 } [-1, 0] \text{ 上 } \nearrow$$

$$\text{注意到 } h(-1) = \cos 1 - 1 < 0, h(0) = 1 > 0$$

$$\therefore \text{存在唯一的 } x_0 \in (-1, 0) \text{ 使 } h(x_0) = 0$$

$$\text{且当 } -1 \leq x < x_0 \text{ 时, } h(x) < 0, f'(x) < 0, f(x) \searrow;$$

$$\text{当 } x_0 < x \leq 0 \text{ 时, } h(x) > 0, f'(x) > 0, f(x) \nearrow$$

注意到 $f(-1) = -3\sin 1 + 1$, $f(0) = 0$, $\because -3\sin 1 + 1 < 0$, $\therefore f(x) \leq 0$

$$(2) F(x) = 3\sin x - x^3 - 2e^{x-\frac{2}{3}} , F'(x) = 3\cos x - 3x^2 - 2e^{x-\frac{2}{3}} ,$$

$$F''(x) = -3\sin x - 6x - 2e^{x-\frac{2}{3}} ,$$

当 $-2 < x \leq -1$ 时 , $F'(x) = 3(\cos x - x^2) - 2e^{x-\frac{2}{3}} < 0$, $\therefore f(x) \searrow$

$$\because F(-2) = -3\sin 2 + 8 - 2e^{-\frac{8}{3}} > 0 , F(-1) = -3\sin 1 + 1 - 2e^{-\frac{5}{3}} < 0$$

$\therefore F(x)$ 在 $(-2, -1)$ 上有一个零点 x_1

当 $-1 \leq x \leq 0$ 时 , 由 (1) 知 $f(x) = 3\sin x - x^3 \leq 0$, $\therefore F(x) < 0$, $F(x)$ 无零点

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时 , } F(x) = 3\sin x - x^3 - 2e^{x-\frac{2}{3}} < 3x - x^3 - 2\left(x + \frac{1}{3}\right) = x - x^3 - \frac{2}{3}$$

$$\text{令 } \varphi(x) = x - x^3 - \frac{2}{3} , \varphi'(x) = 1 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

且当 $0 < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时 , $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x) \nearrow$; 当 $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时 , $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(x) \searrow$

$$\therefore \varphi(x) \leq \varphi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{9} - \frac{2}{3} < 0 , \therefore \text{当 } x > 0 \text{ 时 , } F(x) \text{ 也无零点}$$

综上 : $F(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上有唯一的零点 x_1 .