

武汉市 2021 届高中毕业生三月质量检测

数 学 试 卷

武汉市教育科学研究院命制

2021.3.2

本试题卷共 5 页,22 题,全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

★祝考试顺利★

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 复数 z 满足 $\frac{\bar{z}}{z} = i$, 则复平面上表示复数 z 的点位于
A. 第一或第三象限 B. 第二或第四象限 C. 实轴 D. 虚轴
2. “ $\tan\theta = \sqrt{3}$ ”是“ $\sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 设 $a = 3^{0.5}$, $b = 4^{0.4}$, $c = 5^{0.3}$, 则
A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$

4. 已知正整数 $n \geq 7$, 若 $(x - \frac{1}{x})(1-x)^n$ 的展开式中不含 x^4 的项, 则 n 的值为

- A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

5. 从 3 双不同的鞋子中随机任取 3 只, 则这 3 只鞋子中有两只可以配成一双的概率是

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{2}{3}$

6. 某圆锥母线长为 2, 底面半径为 $\sqrt{3}$, 则过该圆锥顶点的平面截此圆锥所得截面面积的最大值为

- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. 1

7. 过抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 焦点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点, 过 A, B 分别向 E 的准线作垂线, 垂足分别为 C, D , 若 $\triangle ACF$ 与 $\triangle BDF$ 的面积之比为 4, 则直线 AB 的斜率为

- A. ± 1 B. $\pm \sqrt{3}$ C. ± 2 D. $\pm 2\sqrt{2}$

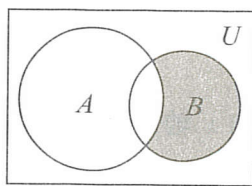
8. 设函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) - 1 (\omega > 0)$, 若对于任意实数 φ , $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ 上至少有 2 个零点, 至多有 3 个零点, 则 ω 的取值范围是

- A. $[\frac{8}{3}, \frac{16}{3})$ B. $[4, \frac{16}{3})$ C. $[4, \frac{20}{3})$ D. $[\frac{8}{3}, \frac{20}{3})$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 图中矩形表示集合 U , A, B 是 U 的两个子集, 则阴影部分可以表示为

- A. $(\complement_U A) \cap B$ B. $\complement_B(A \cap B)$
C. $\complement_U(A \cap (\complement_U B))$ D. $\complement_{A \cup B} A$



10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$, 则有

- A. 存在 $x_0 > 0$, 使得 $f(x_0) = -x_0$
B. 存在 $x_0 < 0$, 使得 $f(x_0) = x_0^2$
C. 函数 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的单调区间和单调性相同
D. 若 $f(x_1) = f(x_2)$ 且 $x_1 \neq x_2$, 则 $x_1 + x_2 \leq 0$

11. 两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 其公差分别为 d_1 和 d_2 , 其前 n 项和分别为 S_n 和 T_n , 则下列命题中正确的是

- A. 若 $\{\sqrt{S_n}\}$ 为等差数列, 则 $d_1 = 2a_1$
- B. 若 $\{S_n + T_n\}$ 为等差数列, 则 $d_1 + d_2 = 0$
- C. 若 $\{a_n b_n\}$ 为等差数列, 则 $d_1 = d_2 = 0$
- D. 若 $b_n \in N^*$, 则 $\{a_{b_n}\}$ 也为等差数列, 且公差为 $d_1 + d_2$

12. 设函数 $f(x) = e^{2x} - 8e^x + 6x$, 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线与该曲线恰有一个公共点 P , 则选项中满足条件的 x_0 有

- A. $-\ln 2$
- B. $\ln 2$
- C. $\ln 4$
- D. $\ln 5$

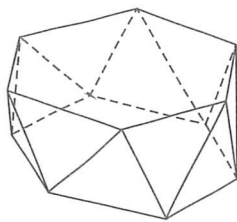
三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 两个单位向量 e_1, e_2 满足 $|e_1| = |e_1 + e_2|$, 则 $|e_1 - e_2| = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的半焦距为 c , 若双曲线 E 与圆 $(x - c)^2 + y^2 = 9a^2$ 恰有三个公共点, 则 E 的离心率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 在一次以“二项分布的性质”为主题的数学探究活动中, 立德中学高三某小组的学生表现优异, 发现的正确结论得到老师和同学的一致好评. 设随机变量 $X \sim B(n, p)$, 记 $p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k=0, 1, 2, \dots, n$. 在研究 p_k 的最大值时, 小组同学发现: 若 $(n+1)p$ 为正整数, 则 $k = (n+1)p$ 时, $p_k = p_{k-1}$, 此时这两项概率均为最大值; 若 $(n+1)p$ 为非整数, 当 k 取 $(n+1)p$ 的整数部分, 则 p_k 是唯一的最大值. 以此为理论基础, 有同学重复投掷一枚质地均匀的骰子并实时记录点数 1 出现的次数. 当投掷到第 20 次时, 记录到此时点数 1 出现 5 次, 若继续再进行 80 次投掷试验, 则当投掷到第 100 次时, 点数 1 总共出现的次数为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 的概率最大.

16. 如图, 该图展现的是一种被称为“正六角反棱柱”的多面体, 其由两个全等且平行的正六边形作为基底, 侧面由 12 个全等的以正六边形的边为底的等腰三角形组成. 若某个正六角反棱柱各棱长均为 1, 则其外接球的表面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知公比不为 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_3 = 5$, 且 a_1, a_3, a_2 构成等差数列.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 求使 $S_k > \frac{23}{8}$ 成立的最大正整数 k .

18. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 它的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $B = \frac{2\pi}{3}, b = \sqrt{6}$.

(I) 若 $\cos A \cos C = \frac{2}{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

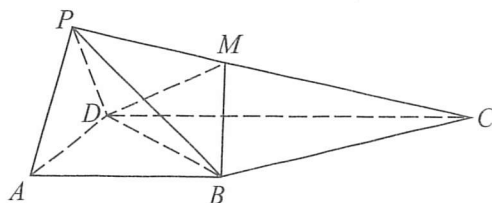
(II) 试问 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = 1$ 能否成立? 若能成立, 求此时 $\triangle ABC$ 的周长; 若不能成立, 请说明理由.

19. (12 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $CD \perp$ 平面 PAD , $AB \parallel CD$, $AB = 1$, $CD = 2$, M 为棱 PC 上一点.

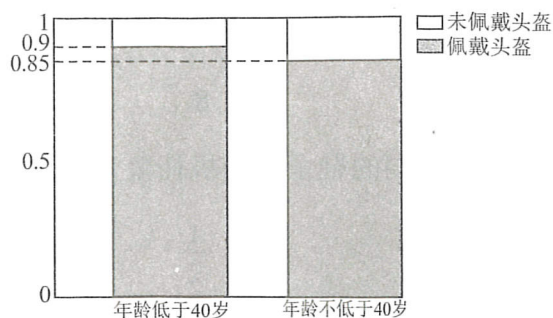
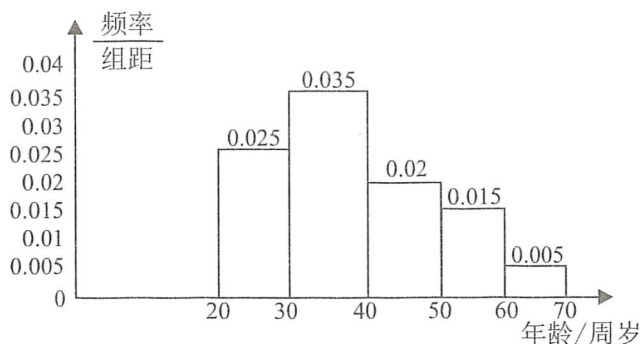
(I) 若 $BM \perp CD$, 证明: $BM \parallel$ 平面 PAD ;

(II) 若 $PA = PD = AD = 2$, 且 $PA \parallel$ 平面 BMD , 求直线 PC 与平面 BMD 所成角的正弦值.



20. (12 分)

有关研究表明, 正确佩戴安全头盔, 规范使用安全带能够将交通事故死亡风险大幅降低, 对保护群众生命安全具有重要作用. 2020 年 4 月, “一盔一带”安全守护行动在全国各地开展. 行动期间, 公安交管部门将加强执法管理, 依法查纠摩托车和电动自行车骑乘人员不佩戴安全头盔, 汽车驾乘人员不使用安全带的行为, 助推养成安全习惯. 该行动开展一段时间后, 某市针对电动自行车骑乘人员是否佩戴安全头盔问题进行调查, 在随机调查的 1000 名骑行人员中, 记录其年龄和是否佩戴头盔情况, 得到如下的统计图表:



(I) Estimate the average age of the city's electric bicycle riders;

(II) According to the given data, complete the following contingency table:

Age \ Whether wearing helmet	Whether wearing helmet	
	Yes	No
[20, 40)		
[40, 70]		

(III) According to (II) contingency table, judge whether there is 99% confidence to believe that wearing safety helmet and age are related?

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

21. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右顶点分别为 A, B , 过椭圆内点 $D(\frac{2}{3}, 0)$ 且不与 x 轴重合的动直线交椭圆 C 于 P, Q 两点, 当直线 PQ 与 x 轴垂直时, $|PD| = |BD| = \frac{4}{3}$.

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 设直线 AP, AQ 和直线 $l: x = t$ 分别交于点 M, N , 若 $MD \perp ND$ 恒成立, 求 t 的值.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = (x-1)e^{x-a} - \ln x$.

(I) 当 $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 的最小值;

(II) 证明: 当 $0 < a \leq 1$ 时, $f(x) \geq \ln a$ 恒成立.