

2021 年高三年级统一质量检测

数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题.本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{y \mid y = \log_2 x, x > 4\}$ ， $B = \left\{x \in \mathbf{R} \mid y = x^{\frac{1}{2}}\right\}$ ，则 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B$

- A. $(-\infty, 2]$ B. $[2, +\infty)$ C. $[0, 2]$ D. $(0, 2)$

【答案】C

2. 若 α, β 表示两个不同的平面， m 为平面 α 内一条直线，则

- A. “ $m \parallel \beta$ ” 是 “ $\alpha \parallel \beta$ ” 的充分不必要条件
B. “ $m \parallel \beta$ ” 是 “ $\alpha \parallel \beta$ ” 的必要不充分条件
C. “ $m \perp \beta$ ” 是 “ $\alpha \perp \beta$ ” 的必要不充分条件
D. “ $m \perp \beta$ ” 是 “ $\alpha \perp \beta$ ” 充要条件

【答案】B

3. 已知双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ 的一条渐近线的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ ，则该双曲线的离心率为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. 2

【答案】C

4. 18 世纪末期, 挪威测量学家威塞尔首次利用坐标平面上的点来表示复数, 使复数及其运算具有了几何意义, 例如, $|z| = |OZ|$, 也即复数 z 的模的几何意义为 z 对应的点 Z 到原点的距离.

在复平面内, 复数 $z_0 = \frac{a+2i}{1+i}$ (i 是虚数单位, $a \in \mathbf{R}$) 是纯虚数, 其对应的点为 Z_0 , Z 为

曲线 $|z| = 1$ 上的动点, 则 Z_0 与 Z 之间的最小距离为

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

【答案】B

5. 若 $f(x) = \begin{cases} \log_3(x+1), & x \geq 0 \\ 2^x, & x < 0 \end{cases}$, 不等式 $f(x) > \frac{1}{2}$ 的解集为

- A. $(-1, 0) \cup (\sqrt{3}-1, +\infty)$ B. $(-\infty, 1-\sqrt{3}) \cup (1, +\infty)$
C. $(-1, 0) \cup (0, \sqrt{3}-1)$ D. $(-\infty, -1) \cup (\sqrt{3}-1, +\infty)$

【答案】A

6. 已知角 θ 终边上有一点 $P\left(\tan\frac{4}{3}\pi, 2\sin\left(-\frac{17}{6}\pi\right)\right)$, 则 $\cos\theta$ 的值为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】D

7. 已知 $y = f(x)$ 为奇函数, $y = f(x+1)$ 为偶函数, 若当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = \log_2(x+a)$, 则 $f(2021) =$

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

【答案】C

$f(x)$ 为奇函数, $f(0) = 0$ 且 $f(x)$ 关于原点对称①

$\because x \in [0, 1]$ 时 $f(x) = \log_2(x+a)$, $\therefore \log_2(0+a) = 0$, $\therefore a = 1$.

$\therefore x \in [0, 1]$ 时 $f(x) = \log_2(x+1)$.

$\because y = f(x+1)$ 为偶函数关于 y 轴对称.

则 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称②

由①②可知 $\begin{cases} f(-x) = -f(x) \\ f(x) = f(2-x) \end{cases}$

$$\therefore f(x) = f(2-x) = -f(x-2), \therefore f(x+2) = -f(x).$$

$$\therefore f(x+4) = -f(x+2) = -f(-f(x)) = f(x),$$

$$\therefore f(x) \text{ 周期为 } 4, f(2021) = f(1) = \log_2 2 = 1, \text{ 选 C.}$$

8. 在抛物线 $x^2 = \frac{1}{2}y$ 第一象限内一点 (a_n, y_n) 处的切线与 x 轴交点横坐标记为 a_{n+1} , 其中

$n \in \mathbf{N}^*$, 已知 $a_2 = 32$, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $m \geq S_n$ 恒成立, 则 m 的最小值为

A. 16

B. 32

C. 64

D. 128

【答案】D

$$y = 2x^2, y' = 4x, k = 4a_n, \text{ 切线: } y - 2a_n^2 = 4a_n(x - a_n)$$

$$\text{令 } y = 0, x = \frac{a_n}{2}, \therefore a_{n+1} = \frac{a_n}{2}, a_2 = 32, \text{ 则 } a_1 = 64 \neq 0, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}.$$

$\therefore \{a_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列.

$$S_n = \frac{64 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{2}} = 128 - 128 \left(\frac{1}{2} \right)^n, 0 < \left(\frac{1}{2} \right)^n \leq \frac{1}{2}, 64 \leq S_n < 128.$$

$\therefore m \geq S_n$ 恒成立 $\Leftrightarrow m \geq 128$, 选 D.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目

要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知圆 $C: x^2 + y^2 - kx + 2y + \frac{1}{4}k^2 - k + 1 = 0$, 下列说法正确的是

A. k 的取值范围是 $k > 0$

B. 若 $k = 4$, 过 $M(3, 4)$ 的直线与圆 C 相交所得弦长为 $2\sqrt{3}$, 其方程为 $12x - 5y - 16 = 0$

C. 若 $k=4$, 圆 C 与圆 $x^2+y^2=1$ 相交

D. 若 $k=4$, $m>0, n>0$, 直线 $mx-ny-1=0$ 恒过圆 C 的圆心 , 则 $\frac{1}{m}+\frac{2}{n} \geq 8$ 恒成立

【答案】ACD

10. 已知向量 $\vec{a} = \left(2\sin^4 \frac{x}{2}, \cos^4 \frac{x}{2} - f(x) \right)$, $\vec{b} = \left(1, -\frac{1}{2} \right)$, 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线 , 则下列说法正确的是

A. 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到函数 $y = \frac{1}{4} \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{3}{4}$ 的图象

B. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π

C. 直线 $x = \frac{3\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 的一条对称轴

D. 函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} \right)$ 上单调递减

【答案】BC

11. 若实数 $a < b$, 则下列不等关系正确的是

A. $\left(\frac{2}{5} \right)^b < \left(\frac{2}{5} \right)^a < \left(\frac{3}{5} \right)^a$

B. 若 $a > 1$, 则 $\log_a ab > 2$

C. 若 $a > 0$, 则 $\frac{b^2}{1+a} > \frac{a^2}{1+b}$

D. 若 $m > \frac{5}{3}$, $a, b \in (1, 3)$, 则 $\frac{1}{3}(a^3 - b^3) - m(a^2 - b^2) + a - b > 0$

【答案】BCD

$\because y = \left(\frac{2}{5} \right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上 $\searrow$,

又 $\because a < b$, $\therefore \left(\frac{2}{5} \right)^a > \left(\frac{2}{5} \right)^b$, $y = x^a$, 当 $a > 0$ 时 , y 在 $(0, +\infty)$ $\nearrow$;

当 $a < 0$ 时, y 在 $(0, +\infty) \searrow$;

$\therefore$ 无法判断 $\left(\frac{2}{5}\right)^a$ 与 $\left(\frac{3}{5}\right)^a$ 大小, A 错;

$a > 1$ 时, $1 < a < b$, $\therefore \log_a b > \log_a a = 1$

$\log_a ab = \log_a a + \log_a b > 2$, B 对;

$a > 0$ 时, $0 < a < b$, $\frac{b^2}{1+a} - \frac{a^2}{1+b} = \frac{b^3 + b^2 - a^3 - b^2}{(1+a)(1+b)} = \frac{(b^3 - a^3) + (b^2 - a^2)}{(1+a)(1+b)} > 0$

$\therefore \frac{b^2}{1+a} > \frac{a^2}{1+b}$, C 对;

令 $t = a + b \in (2, 6)$, $\frac{a^2 + ab + b^2 + 3}{a + b} = \frac{a^2 + a(t - a) + (t - a)^2 + 3}{t} = \frac{a^2 - at + t^2 + 3}{t}$

$= t + \frac{a^2 + 3}{t} - a < 6 + \frac{a^2 + 3}{6} - a = \frac{1}{6}a^2 - a + \frac{13}{2}$

$< \frac{1}{6} \times 9 - 6 + \frac{13}{2} = 5$, $\therefore \frac{a^2 + ab + b^2 + 3}{a + b} < 3m$,

$\therefore a^2 + ab + b^2 + 3 < 3m(a + b)$,

$(a^2 + ab + b^2)(a - b) + 3(a - b) > 3m(a + b)(a - b)$

$a^3 - b^3 - 3m(a^2 - b^2) + 3(a - b) > 0$, $\frac{1}{3}(a^3 - b^3) - m(a^2 - b^2) + (a - b) > 0$, D 对

选 BCD.

12. 在南方不少地区, 经常看到人们头戴一种用木片、竹篾或

苇蒿等材料制作的斗笠, 用来遮阳或避雨, 随着旅游和文化交

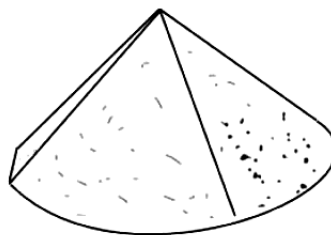
流活动的开展, 斗笠也逐渐成为一种时尚旅游产品. 有一种外形

为圆锥形的斗笠, 称为“灯罩斗笠”, 根据人的体型、高矮等制

作成大小不一的型号供人选择使用, 不同型号的斗笠大小经常用帽坡长(母线长)和帽底宽(底

面圆直径长)两个指标进行衡量, 现有一个“灯罩斗笠”, 帽坡长 20 厘米, 帽底宽 $20\sqrt{3}$ 厘米,

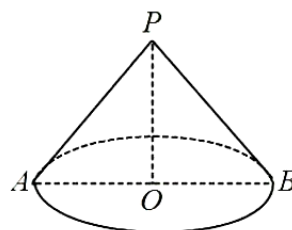
关于此斗笠, 下面说法正确的是



- A. 斗笠轴截面（过顶点和底面中心的截面图形）的顶角为 120°
- B. 过斗笠顶点和斗笠侧面上任意两母线的截面三角形的最大面积为 $100\sqrt{3}$ 平方厘米
- C. 若此斗笠顶点和底面圆上所有点都在同一个球上，则该球的表面积为 1600π 平方厘米
- D. 此斗笠放在平面上，可以盖住的球（保持斗笠不变形）的最大半径为 $20\sqrt{3} - 30$ 厘米

【答案】ACD

对于 A, $PO = \sqrt{400 - 300} = 10$,
 $\therefore \sin \angle BPO = \frac{\sqrt{3}}{2}, \angle BPO = 60^\circ$
 $\therefore \angle APB = 120^\circ$, 故 A 正确.



对于 B, 截面三角形面积和 $S_{\text{截}} = \frac{1}{2} PA^2 \cdot \sin \theta = 200 \sin \theta \leq 200$, B 错;

对于 C, 设外接球球心为 M, 半径为 R, $\therefore MA = MP = R$

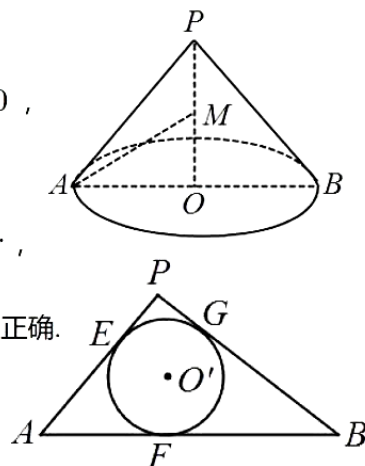
在 $\triangle AOM$ 中, 由勾股定理 $\Rightarrow 300 + (10 - R)^2 = R^2 \Rightarrow R = 20$,

$\therefore S_{\text{表}} = 4\pi \cdot 400 = 1600\pi$, C 正确;

对于 D, 设球心为 O' , 截面主视图如下图, 设内切圆半径为 r ,

$\therefore \frac{1}{2}(20 + 20 + 20\sqrt{3})r = \frac{1}{2} \cdot 20\sqrt{3} \cdot 10$, $r = 20\sqrt{3} - 30$, D 正确.

选: ACD.



三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项是_____. (用数字作答)

【答案】240

14. 已知非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$, 且 $(\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{a}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为_____.

【答案】 120°

15. 某驾驶员培训学校为对比了解“科目二”的培训过程采用大密度集中培训与周末分散培训两种方式的效果，调查了 105 名学员，统计结果为：接受大密度集中培训的 55 个学员中有 45

名学员一次考试通过，接受周末分散培训的学员一次考试通过的有 30 个.根据统计结果，认为

“能否一次考试通过与是否集中培训有关”犯错误的概率不超过_____.

$$\text{附：} k^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.05	0.025	0.010	0.001
k	3.841	5.024	6.635	10.828

【答案】0.025

	集中培训	分散培训	合计
一次考过	45	30	75
一次未考过	10	20	30
合计	55	50	105

$$k^2 = \frac{105(45 \times 20 - 10 \times 30)^2}{55 \times 50 \times 75 \times 30} = 6.109 \in (5.024, 6.635),$$

$\therefore$ 答案：0.025.

16. 2021 年是中国传统的“牛”年，可以在平面坐标系中用抛物线与圆勾勒出牛的形象.已知

抛物线 $Z: x^2 = 4y$ 的焦点为 F ，圆 $F: x^2 + (y - 1)^2 = 4$ 与抛物线 Z 在第一象限的交点为

$P\left(m, \frac{m}{4}\right)$ ，直线 $l: x = t (0 < t < m)$ 与抛物线 Z 的交点为 A ，直线 l 与圆 F 在第一象限的交点

为 B ，则 $m =$ _____； ΔFAB 周长的取值范围为_____。(第一空 2 分，第二空 3 分)

【答案】2；(4,6)

方法一：

$$\begin{cases} x^2 = 4y \\ x^2 + (y - 1)^2 = 4 \\ x > 0, y > 0 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x = 2, \\ y = 1 \end{cases} \therefore m = 2$$

$$\begin{cases} x=t \\ x^2=4y \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=t \\ y=\frac{t^2}{4} \end{cases}, A\left(t, \frac{t^2}{4}\right)$$

$$\begin{cases} x=t \\ x^2+(y-1)^2=4 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=t \\ y=1+\sqrt{4-t^2} \end{cases}, B(t, 1+\sqrt{4-t^2})$$

$$\Delta FAB \text{ 周长} = FA + FB + AB = \frac{t^2}{4} + 1 + 1 + \sqrt{4-t^2} - \frac{t^2}{4} + 2 = \sqrt{4-t^2} + 4 \in (4, 6)$$

方法二：

$$\begin{cases} x^2=4y \\ x^2+(y-1)^2=4 \end{cases} \Rightarrow y^2+2y-3=0 \Rightarrow y=1$$

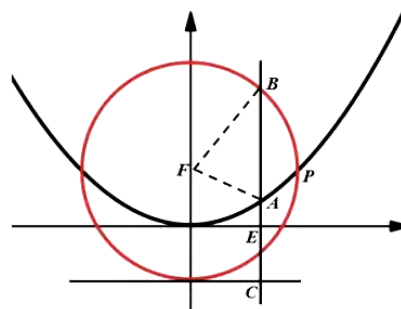
$$\therefore \frac{m^2}{4}=1, m=2$$

过 A 作 $y=-1$ 的垂线，垂足为 C ，

$$\therefore AF=AC, \therefore \Delta ABF \text{ 的周长为 } AC+AB+BF=BC+2=3+BE$$

$$\therefore BE \in (1, 3), \therefore \text{周长} \in (4, 6)$$

故应填：2，(4,6)



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 从 “① $S_n = n\left(n + \frac{a_1}{2}\right)$ ；② $S_2 = a_3$ ， $a_4 = a_1 a_2$ ；③ $a_1 = 2$ ， a_4 是 a_2, a_8 的等比

中项.” 三个条件任选一个，补充到下面横线处，并解答.

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，公差 d 不等于零，_____， $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_n = S_{2^{n+1}} - S_{2^n}$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 W_n ，求 W_n .

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

选①.

$$(1) S_n = n \left(n + \frac{a_1}{2} \right) = n^2 + \frac{a_1}{2}n, \text{ 令 } n=1 \Rightarrow a_1 = 1 + \frac{a_1}{2} \Rightarrow a_1 = 2$$

$$\therefore S_n = n^2 + n \text{ ①. 当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_{n-1} = (n-1)^2 + n - 1 \text{ ②}$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = 2n, \text{ 而 } a_1 = 2, \therefore a_n = 2n.$$

$$(2) S_n = n^2 + n, b_n = (2^{n+1})^2 + 2^{n+1} - (2^n)^2 - 2^n = 3 \cdot 2^{2n} + 2^n$$

$$\therefore W_n = \frac{12 \cdot [1 - 4^n]}{1 - 4} + \frac{2 \cdot (1 - 2^n)}{1 - 2} = 4(4^n - 1) + 2(2^n - 1) = 4^{n+1} + 2^{n+1} - 6$$

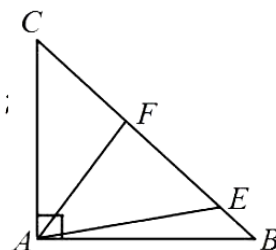
18. (12分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB \perp AC, AB = AC = 2$, 点 E, F 是线段 BC (含端点)

上的动点, 且点 E 在点 F 的右下方, 在运动的过程中, 始终保持 $\angle EAF = \frac{\pi}{4}$ 不变, 设

$\angle EAB = \theta$ 弧度.

(1) 写出 θ 的取值范围, 并分别求线段 AE, AF 关于 θ 的函数关系式;

(2) 求 $\triangle EAF$ 面积 S 的最小值.



$$(1) 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \text{ 由题意知 } \frac{AE}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{AB}{\sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)} \Rightarrow AE = \frac{\sqrt{2}}{\sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)}$$

$$\frac{AF}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{AC}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)} \Rightarrow AF = \frac{\sqrt{2}}{\cos \theta}.$$

$$(2) S_{\triangle EAF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cos \theta} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta \right) \cos \theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2} \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{4} \right) + 1} \geq \frac{2}{\sqrt{2} + 1} = 2(\sqrt{2} - 1).$$

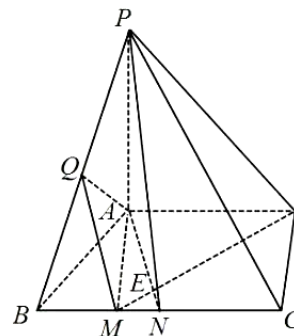
当且仅当 $\theta = \frac{\pi}{8}$ 时, 取 “=”.

19. (12分) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $BC \perp CD$,

$PA = AD = 2$, $CD = 1$, $BC = 3$, 点 M, N 在线段 BC 上, $BM = 2MN = 1$, $AN \cap MD = E$, Q 为线段 PB 上的一点.

(1) 求证: $MD \perp$ 平面 PAN ;

(2) 若平面 MQA 与平面 PAN 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{4}{5}$, 求直线 MQ 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值.



(1) 证明: $\because BC = 3, BM = 1, \therefore CM = 2, AD = CM$,

又 $\because AD \parallel CM, \therefore AD \parallel CM, \therefore$ 四边形 $AMCD$ 为平行四边形.

又 $\because BC \perp CD, \therefore$ 四边形 $AMCD$ 为矩形.

$$\because \frac{MN}{AM} = \frac{AM}{AD} = \frac{1}{2}, \therefore \triangle AMN \sim \triangle DAM$$

$$\therefore \angle AED = \angle MAN + \angle AME = \angle ADM + \angle AME = 90^\circ$$

$\therefore MD \perp AN$, 又 $\because PA \perp$ 平面 $ABCD, \therefore PA \perp MD, AN \cap PA = A$,

$\therefore MD \perp$ 平面 PAN .

(2) 如图建立空间直角坐标系

则 $M(1,0,0), A(0,0,0), P(0,0,2), N\left(1, \frac{1}{2}, 0\right), B(1,-1,0)$,

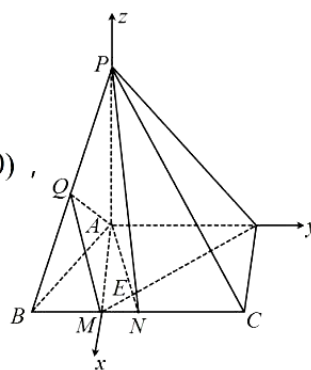
$Q(x,y,z)$

$$\text{设 } \overrightarrow{BQ} = \lambda \overrightarrow{BP} \Rightarrow (x-1, y+1, z) = \lambda(-1, 1, 2) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda - 1 \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

$$\therefore Q(1-\lambda, \lambda-1, 2\lambda)$$

$$\overrightarrow{MQ} = (-\lambda, \lambda-1, 2\lambda), \overrightarrow{AM} = (1, 0, 0), \overrightarrow{AP} = (0, 0, 2), \overrightarrow{AN} = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$$

设平面 MQA 与平面 PAN 的一个法向量分别为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$.



$$\therefore \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \vec{MQ} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{AM} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda x_1 + (\lambda - 1)y_1 + 2\lambda z_1 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_1 = (0, 2\lambda, 1 - \lambda)$$

$$\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \vec{AP} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{AN} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z_2 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{2}y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_2 = (1, -2, 0)$$

设平面 MQA 与平面 PAN 所成锐二面角为 θ ,

$$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{4\lambda}{\sqrt{4\lambda^2 + (1 - \lambda)^2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

此时 $\vec{MQ} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$, 平面 $ABCD$ 的一个法向量 $\vec{n}_3 = (0, 0, 1)$,

$$\therefore \sin \alpha = \frac{|\vec{n}_3 \cdot \vec{MQ}|}{|\vec{n}_3| \cdot |\vec{MQ}|} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

20. (12分) 某商场每年都会定期答谢会员, 允许年度积分超过指定积分的会员参加特价购物赠券活动. 今年活动的主题为“购物三选一, 真情暖心里”, 符合条件的会员可以特价购买礼包 A (十斤肉类)、礼包 B (十斤蔬菜) 和礼包 C (十斤鸡蛋) 三类特价商品中的任意一类, 并且根据购买的礼包不同可以获赠价值不等的代金券. 根据以往经验得知, 会员购买礼包 A 和礼包 B 的概率均为 $\frac{2}{5}$.

(1) 预计今年有 400 名符合条件的会员参加活动, 求商场为此活动需要准备多少斤鸡蛋合理;
(2) 在促销活动中, 若有甲、乙、丙三位会员同时参与答谢活动, 各人购买礼包相互独立, 已知购买礼包 A 或礼包 B 均可以获得 50 元商场代金券, 购买礼包 C 可以获得 25 元商场代金券, 设 Y 是三人获得代金券金额之和. 求 Y 的分布列和数学期望..

$$(1) \text{ 会员购买礼包 } C \text{ 的概率为 } 1 - \frac{2}{5} \times 2 = \frac{1}{5},$$

$$\therefore \text{准备鸡蛋: } 400 \times \frac{1}{5} \times 10 = 800 \text{ (斤)}$$

(2) Y 的所有可能取值为: 150, 125, 100, 75

$$P(Y=150) = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}, \quad P(Y=125) = C_3^1 \cdot \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{48}{125}$$

$$P(Y=100) = C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \frac{4}{5} = \frac{12}{125}, \quad P(Y=75) = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$$

$\therefore Y$ 的分布列如下

Y	150	125	100	75
P	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

$$\therefore E(Y) = 150 \times \frac{64}{125} + 125 \times \frac{48}{125} + 100 \times \frac{12}{125} + 75 \times \frac{1}{125} = \frac{384}{5} + 48 + \frac{48}{5} + \frac{3}{5} = 135.$$

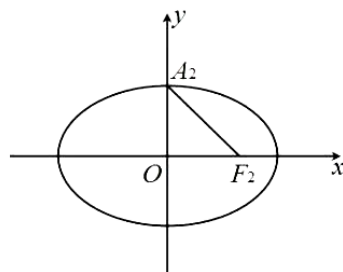
21. (12分) 在平面直角坐标系中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 右焦点为 F_2 , 上顶点为 A_2 , 点 $P(a, b)$ 到直线 F_2A_2 的距离等于 1.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 若直线 $l: y = kx + m (m > 0)$ 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, D 为 AB 中点, 直线 DE, DF 分别与圆 $W: x^2 + (y - 3m)^2 = m^2$ 相切于点 E, F , 求 $\angle EWF$ 的最小值.

(1) 直线 F_2A_2 的方程为 $\frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow bx + cy - bc = 0$

$$P(a, b) \text{ 到直线 } F_2A_2 \text{ 的距离为 } \frac{ab + bc - bc}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{ab}{a} = b = 1$$

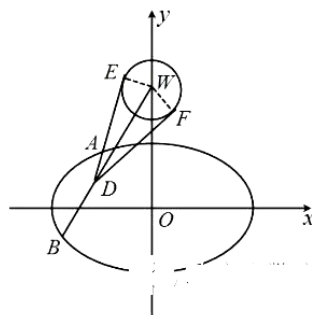


而 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a^2 = b^2 + c^2$, $\therefore a = 2$, 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $D(x_0, y_0)$

$$\begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 4(kx + m)^2 = 4,$$

$$\therefore (1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0$$



$$\Delta = 64k^2m^2 - 4(1+4k^2)(4m^2-4) = 0, \therefore x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-4km}{1+4k^2},$$

$$\therefore D\left(\frac{-4km}{1+4k^2}, \frac{m}{1+4k^2}\right),$$

$$\therefore \sin \angle EDW = \frac{m}{DW} = \frac{m}{\sqrt{\frac{16k^2m^2}{(1+4k^2)^2} + \left(\frac{m}{1+4k^2} - 3m\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{16k^2}{(1+4k^2)^2} + \left(\frac{1}{1+4k^2} - 3\right)^2}}$$

$$\text{令 } \frac{1}{1+4k^2} = t, \therefore \sin \angle EDW = \frac{1}{\sqrt{4t - 4t^2 + (t-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{-3t^2 - 2t + 9}} \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore \angle EDW \leq 30^\circ, \therefore \angle EWF \geq 120^\circ.$$

22. (12分) 青岛胶东国际机场的显著特点之一是弯曲曲线的运用, 衡量曲线弯曲程度的重要指标是曲率. 曲线的曲率定义如下: 若 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, $f''(x)$ 是 $f'(x)$ 的导函数, 则

$$\text{曲线 } y = f(x) \text{ 在点 } (x, f(x)) \text{ 处的曲率 } K = \frac{|f''(x)|}{(1 + [f'(x)]^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x - b \cos(x-1)$ ($a \geq 0, b > 0$), 若 $a = 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点

$$(1, f(1)) \text{ 处的曲率为 } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



(1) 求 b ;

(2) 若函数 $f(x)$ 存在零点, 求 a 的取值范围;

(3) 已知 $1.098 < \ln 3 < 1.099$, $e^{0.048} < 1.050$, $e^{-0.045} < 0.956$, 证明: $1.14 < \ln \pi < 1.15$.

(1) $a = 0$ 时, $f(x) = -\ln x - b \cos(x-1)$, $f(1) = -b$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x} + b \sin(x-1), \quad f''(x) = \frac{1}{x^2} + b \cos(x-1)$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } (1, -b) \text{ 处的曲率 } k = \frac{|1+b|}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b = 1.$$

$$(2) f(x) = ae^x - \ln x - \cos(x-1) = 0 \Rightarrow a = \frac{\ln x + \cos(x-1)}{e^x}$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{\ln x + \cos(x-1)}{e^x}, \therefore g(x) \leq \frac{\ln x + 1}{e^x} \leq \frac{x}{e^x} \leq \frac{1}{e},$$

当且仅当 $x=1$ 时取 " $=$ ", 显然, 当 $a > \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 无零点.

$$\text{当 } 0 \leq a \leq \frac{1}{e} \text{ 时, } g(1) = \frac{1}{e} \geq a, \quad g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{-1 + \cos\left(\frac{1}{e} - 1\right)}{e^{\frac{1}{e}}} < 0 \leq a$$

$\therefore$ 存在 $x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ 使 $g(x_0) = a$, 符合题意.

综上: 实数 a 的取值范围为 $\left[0, \frac{1}{e}\right]$.

(3) 由 (2) 知 $\frac{\ln x + 1}{e^x} \leq \frac{1}{e}$, $\therefore \ln x + 1 \leq e^{x-1}$ (当且仅当 $x=1$ 时取 " $=$ ")

$$\therefore \ln \frac{\pi}{3} + 1 < e^{\frac{\pi}{3}-1} < e^{0.048}, \therefore \ln \pi < e^{0.048} - 1 + \ln 3 < 1.050 - 1 + 1.099 < 1.15$$

$$\text{又} \because \ln \frac{3}{\pi} + 1 < e^{\frac{3}{\pi}-1} < e^{-0.045}, \therefore \ln \pi > \ln 3 + 1 - e^{-0.045} > 1.098 + 1 - 0.956 > 1.14$$

综上: $1.14 < \ln \pi < 1.15$