

# 数学试题 (理科)

(考试时间: 120 分钟 满分: 150 分)

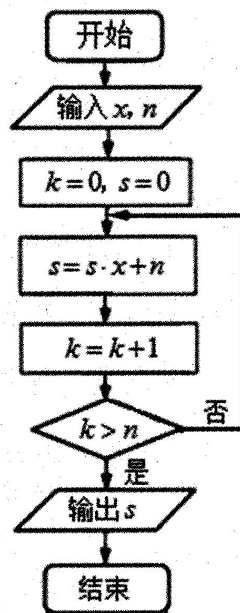
## 注意事项:

1. 答题前, 务必在答题卡和答题卷规定的地方填写自己的姓名、准考证号和座位号后两位。
2. 答第 I 卷时, 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。
3. 答第 II 卷时, 必须使用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔在答题卷上书写, 要求字体工整、笔迹清晰。作图题可先用铅笔在答题卷规定的位置绘出, 确认后再用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔描清楚。必须在题号所指示的答题区域作答, 超出答题区域书写的答案无效, 在试题卷、草稿纸上答题无效。
4. 考试结束, 务必将答题卡和答题卷一并上交。

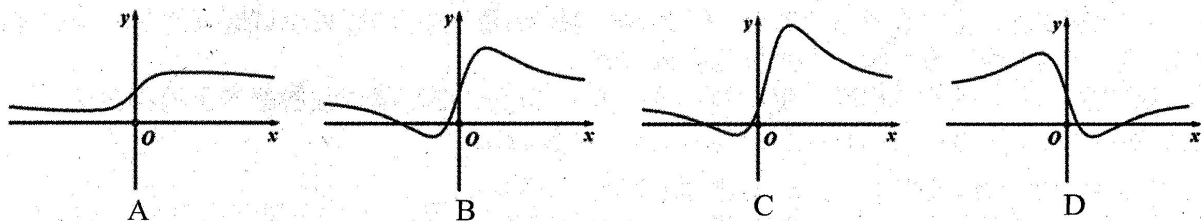
## 第 I 卷 (满分 60 分)

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 满分 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设复数  $z$  满足  $z - iz = 4i$  ( $i$  是虚数单位), 则  $z$  在复平面内的对应点位于  
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 已知  $A = \{x | x^2 < 4x\}$ ,  $B = \{x | y = \lg(x-2)\}$ , 则  $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) =$   
A.  $(0, 2]$  B.  $(-\infty, 2]$  C.  $[2, +\infty)$  D.  $[2, 4)$
3. 声强级(单位: dB)由公式  $L_I = 10 \lg \left( \frac{I}{10^{-12}} \right)$  给出, 其中  $I$  为声强(单位:  $\text{W/m}^2$ ). 某班级为规范同学在公共场所说话的文明礼仪, 开展了“不敢高声语, 恐惊读书人”主题活动, 要求课下同学之间交流时, 每人的声强级不超过 40 dB. 现已知 4 位同学课间交流时, 每人的声强分别为  $10^{-7} \text{ W/m}^2$ ,  $2 \times 10^{-9} \text{ W/m}^2$ ,  $5 \times 10^{-10} \text{ W/m}^2$ ,  $9 \times 10^{-11} \text{ W/m}^2$ , 则这 4 人中达到班级要求的有  
A. 1 人 B. 2 人 C. 3 人 D. 4 人
4. “ $-\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{3}{2}$ ”是“直线  $l: y = kx$  与圆  $C: (x-2)^2 + y^2 = 3$  相交”的  
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件  
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 秦九韶是我国南宋时期的数学家, 他在所著的《数书九章》中提出的多项式求值的算法, 至今仍是比较先进的算法. 右图是应用秦九韶算法的一个程序框图. 执行该程序框图, 若输入  $x = a$ ,  $n = 2$ , 输出  $s = 26$ , 则输入的实数  $a$  的值为  
A. -4 或 -3 B. -3 或 4 C. -4 或 3 D. 3 或 4



6. 函数  $f(x) = \frac{(x+1)^2 + \sin x}{x^2 + 1}$  的图像大致是



7. 已知  $\triangle ABC$  内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 若  $c = \sqrt{3}$ ,  $\triangle ABC$  的面积等于  $\frac{1}{2}c(a \sin A + b \sin B - c \sin C)$ , 则  $a+b$  的取值范围是

- A.  $(2, 3]$       B.  $(\sqrt{3}, 3]$       C.  $(3, 2\sqrt{3}]$       D.  $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$

8. 设抛物线  $x^2 = 4y$  的焦点为  $F$ , 过抛物线上点  $A$  的切线  $l$  的斜率为 2, 则切线  $l$  与  $AF$  夹角的正弦值为

- A.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$       B.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$       C.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$       D.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

9. 某校高三年级在迎新春趣味运动会上设置了一个三分线外定点投篮比赛项目, 规则是: 每人投球 5 次, 投中一次得 1 分, 没投中得 0 分, 且连续投中 2 次额外加 1 分, 连续投中 3 次额外加 2 分, 连续投中 4 次额外加 3 分, 全部投中额外加 5 分. 某同学投篮命中概率为  $\frac{1}{3}$ , 则该同学投篮比赛得 3 分的概率为

- A.  $\frac{1}{81}$       B.  $\frac{4}{81}$       C.  $\frac{4}{27}$       D.  $\frac{40}{243}$

10. 在《通用技术》课上, 某小组同学准备用一个棱长为 6 的正四面体坯料制作一个正三棱柱模型(其底面在正四面体一个面上), 要求削去的材料尽可能少, 则所制作的正三棱柱模型的高为

- A.  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$       B.  $\frac{4\sqrt{6}}{3}$       C. 4      D.  $2\sqrt{6}$

11. 已知  $f(x) = e^x - e^{-x} - \sin 2x$ , 单调递增等差数列  $\{a_n\}$  满足  $f(a_2 - 3) \leq 0$ ,  $f(4a_1) + f(7 - a_2) \geq 0$ , 则  $a_3$  的取值范围是

- A.  $(0, 3]$       B.  $(0, 7)$       C.  $\left(-\frac{7}{3}, 3\right]$       D.  $\left(-\frac{7}{3}, 7\right]$

12. 某校建立了一个数学网站, 本校师生可以用特别密码登录网站免费下载学习资源. 这个特别密码与右图数表有关. 数表构成规律是: 第一行数由正整数从小到大排列得到, 下一行数由前一行每两个相邻数的和写在这两个数正中间下方得到. 以此类推.

每年的特别密码是由该年年份及右表中第年份行(如 2019 年即为第 2019 行)自左向右第一个数的个位数字构成的五位数. 如: 2020 年特别密码前四位是 2020, 第五位是第 2020 行自左向右第 1 个数的个位数字. 以此规则, 2021 年的特别密码是

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | ... |
| 3   | 5   | 7   | 9   | 11  | 13  | 15  | ... |     |
| 8   | 12  | 16  | 20  | 24  | 28  | ... |     |     |
| 20  | 28  | 36  | 44  | 52  | ... |     |     |     |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |     |     |     |

- A. 20212      B. 20214      C. 20216      D. 20218

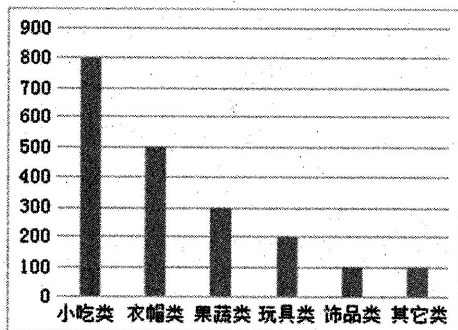
## 第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13 题—第 21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22 题、第 23 题为选考题, 考生根据要求作答.

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 满分 20 分. 把答案填在答题卡上的相应位置.

13. 已知向量  $a = (x, 1)$ ,  $b = (1, -2)$ , 且  $a \parallel b$ , 则  $|a - b| =$  \_\_\_\_\_.

14. 在文明城市创建过程中, 某市创建办公室对市区内从事小吃、衣帽、果蔬、玩具等 6 类商户数进行了统计并绘成如右所示的条形统计图, 对商户进行了文明城市知识教育培训. 2021 年初, 该市创建办公室计划从 2000 户商户中, 按照商户类型进行分层抽样, 随机抽取 100 户进行文明城市知识教育培训效果调查, 则衣帽类和果蔬类商户抽取的户数分别为\_\_\_\_\_.



15. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} - 1$  ( $n \in N^*$ ),  $a_1 = 1$ . 若从四个条件: ①  $A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; ②  $\omega = 2\pi$ ; ③  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ; ④  $B = \frac{1}{2}$

中, 选择一个作为条件补充到题目中, 将数列  $\{a_n\}$  的通项  $a_n$  表示为  $A \sin(\omega n + \varphi) + B$  ( $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的形式, 则  $a_n =$  \_\_\_\_\_.

16. 已知空间三条直线  $l_1, l_2, l_3$  满足  $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ , 两两之间的距离都为 2. 点  $A, B$  是直线  $l_1$  上的两动点, 且  $AB = 2$ ,  $C, D$  分别在直线  $l_2, l_3$  上运动. 下列命题:

- ① 四面体  $ABCD$  的体积是定值;
- ② 四面体  $ABCD$  的棱  $AB$  与  $CD$  所成角为  $\theta$ ,  $CD \cdot \sin \theta$  是定值;
- ③ 四面体  $ABCD$  表面积的最小值为  $\sqrt{3} + \sqrt{7} + 4$ ;
- ④ 四面体  $ABCD$  的内切球的体积最大值为  $\frac{\sqrt{3}}{16} \pi$ .

其中真命题是\_\_\_\_\_. (填上所有真命题的序号)

三、解答题: 本大题共 6 小题, 满分 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

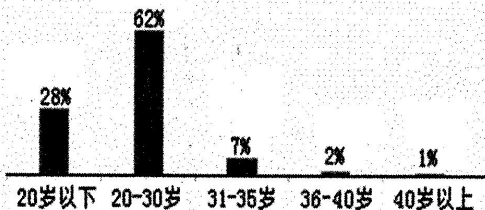
已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$  ( $n \in N^*$ ).

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 设  $b_n = \frac{a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}$ , 数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 求证:  $S_n < \frac{1}{3}$ .

18. (本小题满分 12 分)

某外卖平台对其产品进行调查, 发现用户数量约 2.5 亿, 合作商户超过 200 万家, 活跃骑手超过 50 万名, 日完成订单超过 1800 万. 抽样调查数据显示用户年龄分布如右图. 从所有用户中随机抽取 100 名对其一周内点外卖次数进行统计, 得到数据如下表:



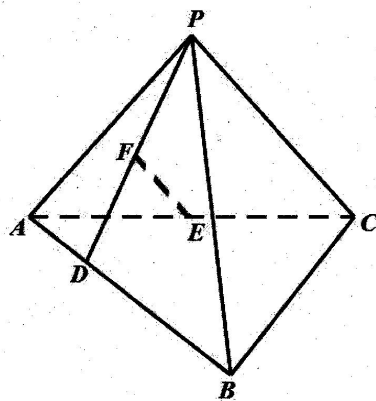
|   | 2 次及以下 | 3-5 次 | 6-8 次 | 8 次以上 |
|---|--------|-------|-------|-------|
| 男 | 2      | 30    | 15    | 5     |
| 女 | 3      | 22    | 20    | 3     |

- (1) 根据上表, 从一周点外卖“8 次以上”的 8 名用户中随机抽取 3 名, 求男性用户数量  $X$  的分布列及其期望;
- (2) 从所有用户中随机抽取  $n$  名用户, 满足“至少一名用户年龄为 30 岁以上”的概率超过  $\frac{1}{2}$ , 若用样本频率估计总体概率, 求  $n$  的最小值. (参考数据:  $\lg 2 \in (0.301, 0.302)$ ,  $\lg 3 \in (0.477, 0.478)$ )

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在三棱锥  $P-ABC$  中,  $PA=PC=\sqrt{3}$ ,  $AC=BC=2\sqrt{2}$ ,  $AC \perp BC$ ,  $D$  为棱  $AB$  上一点,  $BD=3AD$ , 棱  $AC$  的中点  $E$  在平面  $PAB$  上的射影  $F$  在线段  $PD$  上.

- (1) 证明: 平面  $PAC \perp$  平面  $ABC$ ;  
(2) 求二面角  $E-CF-B$  的正弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{1}{2}$ , 右顶点  $M$  到左焦点的距离为 3, 直线  $l$  与椭圆  $C$  交于点  $A, B$ .

- (1) 求椭圆  $C$  的标准方程;  
(2) 设直线  $MA, MB$  的斜率为  $k_1, k_2$ . 若  $4k_1k_2 + 9 = 0$ , 求  $|AB|$  的最小值.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = a(x+2)e^x - (x+3)^2 (a \in \mathbb{R}, e \text{ 为自然对数的底数})$ .

- (1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性;  
(2) 当  $a > \frac{1}{e}$  时, 证明:  $f(x-2) > \ln x - x^2 - x - 3$ .

请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 注意: 只能做所选定的题目, 如果多做, 则按所做的第一个题目计分, 作答时, 请用 2B 铅笔在答题卡上, 将所选题号对应的方框涂黑.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( t^{\frac{1}{4}} - t^{-\frac{1}{4}} \right) \\ y = \sqrt{2} \left( t^{\frac{1}{4}} + t^{-\frac{1}{4}} \right) \end{cases} (t \text{ 为参数})$ . 在以原点为极点,

$x$  轴的正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线  $C_2$  的极坐标方程为  $\rho \sin \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) - 2\sqrt{2} = 0$ .

- (1) 求曲线  $C_1$  和曲线  $C_2$  的直角坐标方程;  
(2) 若曲线  $C_2$  与曲线  $C_1$  交于点  $A, B$ ,  $M(-2, 2)$ , 求  $\frac{1}{|MA|} - \frac{1}{|MB|}$  的值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知  $a, b, c$  为正数, 且满足  $a+b+c=3$ .

- (1) 证明:  $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} \geq 3$ ;  
(2) 证明:  $\frac{2}{a+\sqrt{bc}} + \frac{2}{b+\sqrt{ac}} + \frac{2}{c+\sqrt{ab}} \geq 3$ .