

天一大联考
2020—2021 学年高中毕业班阶段性测试(二)

理科数学·答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1.【答案】 C

【命题意图】 本题考查正弦函数求值,诱导公式的应用.

【解析】 $\sin \frac{2\,021\pi}{3} = \sin\left(673\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = -\sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.【答案】 D

【命题意图】 本题考查集合的交集运算,一元二次不等式的解法.

【解析】 由已知可得 $A = \{x|y = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}\} = \{x|-x^2 - 2x + 3 \geq 0\} = \{x|-3 \leq x \leq 1\}$, $B = \left\{x \left| 2^x > \frac{1}{2} \right. \right\} = \{x|x > -1\}$, 所以 $A \cap B = \{x|-1 < x \leq 1\}$.

3.【答案】 B

【命题意图】 本题考查等差数列、等比数列的性质,前 n 项和的计算.

【解析】 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d \neq 0)$, 则由已知可得 $\begin{cases} a_1 + d = 6, \\ (a_1 + 2d)^2 = a_1(a_1 + 8d), \end{cases}$ 解得 $a_1 = d = 3(d = 0$

的情况舍去), 所以 $a_n = 3n$, 所以 $S_5 = 3 \times 5 + \frac{5 \times 4}{2} \times 3 = 45$.

4.【答案】 A

【命题意图】 本题考查利用导数求切线方程.

【解析】 由 $f(x) = x^2 + \ln x - 2$, 得 $f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$, 所以 $f(1) = -1$, $f'(1) = 3$, 所以切线方程为 $y = 3(x - 1) - 1 = 3x - 4$.

5.【答案】 B

【命题意图】 本题考查三角函数的实际应用.

【解析】 设 AC 的高度为 x , 则由已知可得 $AB = 3x$, $BC = BE = 2x$, $BD = \frac{AB}{\tan \angle ADB} = 3\sqrt{3}x$, 所以 $DE = BD - BE = 3\sqrt{3}x - 2x = 79$, 解得 $x = \frac{79}{3\sqrt{3} - 2} \approx 24.7$, 所以楼高 $AB \approx 3 \times 24.7 = 74.1 \approx 74$ (米).

6.【答案】 D

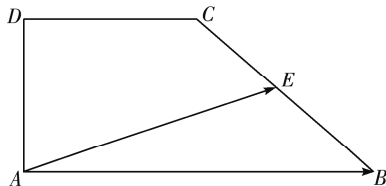
【命题意图】 本题考查充要条件的判断.

【解析】 当 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ 时, 有 $0 \leq a < b$; 当 $\log_{0.2} a > \log_{0.2} b$ 时, 有 $0 < a < b$. 故“ $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ ”是“ $\log_{0.2} a > \log_{0.2} b$ ”的必要不充分条件.

7.【答案】 C

【命题意图】 本题考查向量的线性运算,数量积的几何意义.

【解析】 由题意可得 $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$, 所以 $AB \parallel DC$, $|\overrightarrow{AB}| = 2|\overrightarrow{DC}| = 2$. 又 $AB \perp AD$, 所以四边形 $ABCD$ 是直角梯形, 如图所示, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$ 的值为 $|\overrightarrow{AB}|$ 与 $\overrightarrow{AE}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 方向的投影的乘积. 又 E 是 BC 的中点, 所以 $\overrightarrow{AE}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 方向的投影为 $\frac{3}{4}|\overrightarrow{AB}| = \frac{3}{2}$, 所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 2 \times \frac{3}{2} = 3$.



8.【答案】 B

【命题意图】 本题考查函数图象的识别.

【解析】 由已知可得函数的定义域为 $x \in \mathbf{R}$, 且 $x \neq 0$, $f(-x) = (-x)^2 + \frac{\ln|-x|}{2(-x)^2} = x^2 + \frac{\ln|x|}{2x^2} = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是偶函数, 图象关于 y 轴对称, 故可排除 C、D; 又当 $x=1$ 时, $f(x)=1>0$, 故可排除 A. 故选 B.

9.【答案】 A

【命题意图】 本题考查三角恒等变换.

【解析】 由 $\cos 2\alpha + \sin\left(\frac{5\pi}{4} - \alpha\right) = 0$, 可得 $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha) = 0$, 即 $(\cos \alpha - \sin \alpha) \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$. 因为 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 所以 $\cos \alpha - \sin \alpha \neq 0$, $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 即 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, 于是 $\alpha = \frac{7\pi}{12}$, 所以 $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10.【答案】 B

【命题意图】 本题考查基本不等式及其应用.

【解析】 由已知可得 $a+b = \frac{1}{3}(3a+3b) = \frac{1}{3}[(2a+b) + (a+2b)] = \frac{1}{3}[(2a+b) + (a+2b)]$.
 $\left(\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b}\right) = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{2a+b}{a+2b} + \frac{a+2b}{2a+b}\right) \geq \frac{1}{3}\left(2 + 2\sqrt{\frac{2a+b}{a+2b} \cdot \frac{a+2b}{2a+b}}\right) = \frac{4}{3}$, 当且仅当 $\frac{2a+b}{a+2b} = \frac{a+2b}{2a+b}$, 即 $a = b = \frac{2}{3}$ 时取等号, 所以 $a+b$ 的最小值为 $\frac{4}{3}$.

11.【答案】 C

【命题意图】 本题考查函数的奇偶性、周期性的应用.

【解析】 由已知可得 $f(x) = -f(x+2)$, 则 $f(x+2) = -f(x+4)$, 所以 $f(x) = f(x+4)$, 所以 $f(x)$ 的周期为 4. 又因为 $f(0) + f(2) = 0$, $f(1) + f(3) = 0$, 所以 $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 0$, 所以 $f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(2021) = 505[f(0) + f(1) + f(2) + f(3)] + f(0) + f(1) = f(0) + f(1)$. 又因为 $f(0) = 0$, $f(1) = 2 + 1 = 3$, 所以 $f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(2021) = 3$.

12.【答案】 A

【命题意图】 本题考查函数的零点, 导数的应用.

【解析】 设 $F(x) = x^2 f(x) - 2$, 则 $F'(x) = x^2 f'(x) + 2xf(x) = x[xf'(x) + 2f(x)]$. 因为对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, 恒有 $xf'(x) + 2f(x) < 0$, 所以当 $x > 0$ 时, $F'(x) < 0$, 函数 $y = F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 当 $x < 0$ 时, $F'(x) > 0$, 所以函数 $y = F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 所以 $F(x)_{\max} = F(0) = -2 < 0$, 所以函数 $y = F(x)$ 没有零点, 故 $g(x) = f(x) - \frac{2}{x^2} = \frac{F(x)}{x^2}$ 也没有零点.

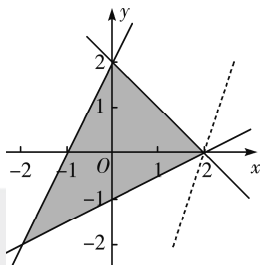
二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13.【答案】 6

【命题意图】 本题考查线性规划.

【解析】 作出约束条件 $\begin{cases} 2x - y + 2 \geq 0, \\ x + y - 2 \leq 0, \\ x - 2y - 2 \leq 0 \end{cases}$ 表示的可行域,如图阴影部分所示. 由 $z = 3x - y$ 可得 $y = 3x - z$, 平移直

线 $y = 3x$, 可知当直线过点 $(2, 0)$ 时, z 取得最大值, 最大值为 6.



14. 【答案】 $\sqrt{5}$

【命题意图】 本题考查向量的模、数量积.

【解析】 因为 $a = (1, 3)$, 所以 $a^2 = 10$, 又 $|a - b| = \sqrt{13}$, 所以 $a^2 - 2a \cdot b + b^2 = 13$, 即 $10 - 2a \cdot b + b^2 = 13$, 解得 $b^2 = 5$, 所以 $|b| = \sqrt{5}$.

15. 【答案】 $2 - \frac{n+2}{2^n}$

【命题意图】 本题考查数列的递推公式, 数列前 n 项和的求法.

【解析】 令 $n = 1$, 可得 $a_1 = 2$. 又由已知可得 $S_n - 2a_n + 2 = 0$, 当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} - 2a_{n-1} + 2 = 0$, 两式相减, 可得

$\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2$, 又因为 $a_1 = 2$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列, 所以 $a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$, 所以 $\frac{n}{a_n} = \frac{n}{2^n}$,

所以 $T_n = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n}$, $\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \cdots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}}$, 两式相减, 得 $\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots +$

$\frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} = \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^{n+1}} = 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}$, 得 $T_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

16. 【答案】 ①④

【命题意图】 本题考查新定义问题.

【解析】 对于①, 显然 $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \geq \sqrt{x_1 + x_2} > \sqrt{x_3}$, 即 $f(x_1) + f(x_2) > f(x_3)$, 是“类单调递增函数”; 对于②,

取 $x_1 = x_2 = 2, x_3 = 3$, 此时 $x_1^2 + x_2^2 = 8, x_3^2 = 9$, 即 $f(x_1) + f(x_2) < f(x_3)$, 不是“类单调递增函数”; 对于③, 取 $x_1 =$

$x_2 = x_3 = 1$, 此时 $\ln x_1 + \ln x_2 = 0, \ln x_3 = 0$, 即 $f(x_1) + f(x_2) = f(x_3)$, 不是“类单调递增函数”; 对于④, $x_1, x_2,$

$x_3 \in (0, \frac{\pi}{2})$, 若 $x_1 + x_2 \leq \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin x_1 + \sin x_2 \geq \sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_1 = \sin(x_1 + x_2) > \sin x_3$, 若 $\frac{\pi}{2} < x_1 +$

$x_2 < \pi$, 则 $0 < \frac{\pi}{2} - x_2 < x_1 < \frac{\pi}{2}$, $\sin x_1 + \sin x_2 > \sin(\frac{\pi}{2} - x_2) + \sin x_2 = \cos x_2 + \sin x_2 = \sqrt{2} \sin(x_2 + \frac{\pi}{4}) > 1 >$

$\sin x_3$, 即 $f(x_1) + f(x_2) > f(x_3)$, 是“类单调递增函数”. 所以是“类单调递增函数”的有①④.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. 【命题意图】 本题考查解三角形, 三角恒等变换及正、余弦定理的应用.

【解析】 (I) 由条件和正弦定理得 $\sin C(\cos B - 2\cos A) = (2\sin A - \sin B)\cos C$, (2 分)

得 $\sin(B + C) = 2\sin(A + C)$ (4 分)

因为 $A + B + C = \pi$, 所以 $\sin A = 2\sin B$, (5 分)

所以由正弦定理可得 $\frac{a}{b} = 2$ (6 分)

(Ⅱ) 因为 $\cos C = \frac{3}{4}, c = 2, \frac{a}{b} = 2,$

所以由余弦定理得 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3}{4}, \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$

即 $\frac{(2b)^2 + b^2 - 4}{4b^2} = \frac{3}{4},$ 解得 $b = \sqrt{2}, \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$

则 $a = 2b = 2\sqrt{2}. \dots\dots\dots (9 \text{ 分})$

又 $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{\sqrt{7}}{4}, \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{2}. \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$

18. 【命题意图】 本题考查线面平行的证明, 利用空间向量求二面角.

【解析】 (Ⅰ) 取 CD 的中点 F , 连接 EF, AF .

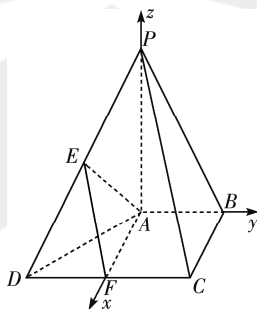
因为 E 为 PD 的中点, 所以 $EF \parallel PC. \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

因为 $CD = 2AB$, 所以 $AB = CF. \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

又 $AB \parallel CD, AB \perp BC$, 所以四边形 $ABCF$ 是矩形, 所以 $AF \parallel BC. \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$

因为 $EF \cap AF = F, PC \cap BC = C$, 所以平面 $AEF \parallel$ 平面 $PBC. \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$

因为 $AE \subset$ 平面 AEF , 所以 $AE \parallel$ 平面 $PBC. \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$



(Ⅱ) 由已知和(Ⅰ)可得 AB, AF, PA 两两垂直, 建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz. \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$

设 $CD = 2AB = 2$, 则 $PA = CD = 2BC = 2,$

所以 $A(0,0,0), P(0,0,2), C(1,1,0), D(1,-1,0),$

所以 $\vec{AP} = (0,0,2), \vec{DC} = (0,2,0), \vec{PD} = (1,-1,-2), \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$

设平面 APD 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z).$

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \vec{AP} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \vec{PD} = 0, \end{cases} \text{ 即} \begin{cases} 2z = 0, \\ x - y - 2z = 0. \end{cases}$$

令 $x = 1$, 得 $\mathbf{m} = (1, 1, 0). \dots\dots\dots (9 \text{ 分})$

设平面 CPD 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z),$

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{DC} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{PD} = 0, \end{cases} \text{ 即} \begin{cases} 2y = 0, \\ x - y - 2z = 0. \end{cases}$$

令 $x = 2$, 得 $\mathbf{n} = (2, 0, 1). \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$

$$\text{所以} \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{2}{\sqrt{2} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

故二面角 $A-PD-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}. \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$

19. 【命题意图】 本题考查相互独立事件的概率计算公式, 概率的实际应用.

【解析】 (I) 若他们都未戴口罩, 则恰有 3 人被感染的概率是 $P = C_5^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}$ (3 分)

(II) (i) 当被感染的两人都未戴口罩时, $P_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{9}{10}\right)^3 = \frac{729}{4\,000}$; (5 分)

当被感染的两人中, 只有一人戴口罩时, $P_2 = C_3^1 \times \frac{1}{10} \times \left(\frac{9}{10}\right)^2 \times C_2^1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{243}{2\,000}$; (6 分)

当被感染的两人都戴口罩时, $P_3 = C_3^2 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 \times \frac{9}{10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{27}{4\,000}$ (7 分)

所以 $P(X=2) = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{729}{4\,000} + \frac{243}{2\,000} + \frac{27}{4\,000} = \frac{621}{2\,000}$ (8 分)

(ii) 设戴口罩的 3 人被感染的人数为 Y , 则 $Y \sim B\left(3, \frac{1}{10}\right)$, (9 分)

设未戴口罩的 2 人被感染的人数为 Z , 则 $Z \sim B\left(2, \frac{1}{2}\right)$, (10 分)

所以 $E(X) = E(Y) + E(Z) = 3 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{13}{10}$ (12 分)

20. 【命题意图】 本题考查椭圆的性质以及应用, 直线与椭圆的位置关系, 定值问题.

【解析】 (I) 设椭圆 C 的半焦距为 c . 由已知可得 $2a=4$, 解得 $a=2$ (1 分)

因为 $\angle F_1AF_2 = 60^\circ$,

易得在 $\text{Rt}\triangle OAF_2$ 中, $\angle OAF_2 = 30^\circ$, $|OA| = b$, $|OF_2| = c$,

$|AF_2| = a = 2$.

所以 $\cos \angle OAF_2 = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 解得 $b = \sqrt{3}$ (3 分)

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ (4 分)

(II) 当直线 MN 的斜率不存在时, $MN \perp x$ 轴.

由 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0$ 可得 $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{ON}$.

结合椭圆的对称性, 可设 $M(x, x)$, $N(x, -x)$, 则 $d = |x|$ (5 分)

将点 $M(x, x)$ 代入椭圆 C 的方程, 得 $\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$,

解得 $x = \pm \frac{2\sqrt{21}}{7}$, 所以 $d = \frac{2\sqrt{21}}{7}$ (6 分)

当直线 MN 的斜率存在时, 设直线 MN 的方程为 $y = kx + m$,

此时点 O 到直线 MN 的距离 $d = \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$, 即 $d^2 = \frac{m^2}{1+k^2}$ (7 分)

设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$

可得 $(3+4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0$,

则 $\Delta = 64k^2m^2 - 4(3+4k^2)(4m^2 - 12) > 0$, 得 $m^2 < 4k^2 + 3$.

所以 $x_1 + x_2 = -\frac{8km}{3+4k^2}$, $x_1x_2 = \frac{4m^2 - 12}{3+4k^2}$ (8 分)

所以 $x_1x_2 + y_1y_2 = x_1x_2 + (kx_1 + m)(kx_2 + m) = (1+k^2)x_1x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2$

$= (1+k^2) \cdot \frac{4m^2 - 12}{3+4k^2} - \frac{8k^2m^2}{3+4k^2} + m^2 = \frac{7m^2 - 12(k^2 + 1)}{3+4k^2}$ (9 分)

又因为 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0$, 所以 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$,

$$\text{即 } \frac{7m^2 - 12(k^2 + 1)}{3 + 4k^2} = 0, \text{ 解得 } m^2 = \frac{12}{7}(1 + k^2). \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } d^2 = \frac{12}{7}, \text{ 得 } d = \frac{2\sqrt{21}}{7}. \dots\dots\dots (11 \text{ 分})$$

综上所述, 点 O 到直线 MN 的距离 d 是 $\frac{2\sqrt{21}}{7}$, 是定值. $\dots\dots\dots (12 \text{ 分})$

21. 【命题意图】 本题考查导数及其应用, 考查不等式恒成立求参数取值范围.

【解析】 (I) 由已知可得 $f'(x) = \frac{2}{x} - a (x > 0)$. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{2}{a}$.

当 $0 < x < \frac{2}{a}$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x > \frac{2}{a}$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减. $\dots\dots\dots (4 \text{ 分})$

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{2}{a})$ 上单调递增, 在 $(\frac{2}{a}, +\infty)$ 上单调递减. $\dots\dots\dots (5 \text{ 分})$

$$(II) g(x) = f(x) + x^2 = 2\ln x - ax + x^2,$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{2}{x} - a + 2x = \frac{2x^2 - ax + 2}{x} (x > 0). \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

若函数 $g(x) = f(x) + x^2$ 有两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$,

则 x_1, x_2 是方程 $2x^2 - ax + 2 = 0$ 的两个不等正实根.

$$\text{所以 } \begin{cases} \Delta = a^2 - 16 > 0, \\ x_1 + x_2 = \frac{a}{2} > 0, \end{cases} \text{ 解得 } a > 4. \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = \frac{a}{2} > 2 \text{ ①}, x_1 x_2 = 1 \text{ ②},$$

$$\text{所以 } 0 < x_1 < 1 < x_2. \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

要使 $g(x_1) - mx_2 > 0$ 恒成立, 只需 $\frac{g(x_1)}{x_2} > m$ 恒成立.

$$\text{由 ①② 可得 } \frac{g(x_1)}{x_2} = \frac{2\ln x_1 - ax_1 + x_1^2}{x_2} = \frac{2\ln x_1 - 2x_1^2 - 2 + x_1^2}{\frac{1}{x_1}} = -x_1^3 - 2x_1 + 2x_1 \ln x_1. \dots\dots\dots (9 \text{ 分})$$

$$\text{令 } h(t) = -t^3 - 2t + 2t \ln t (0 < t < 1), \text{ 则 } h'(t) = -3t^2 + 2 \ln t, \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

当 $0 < t < 1$ 时, $h'(t) < 0$, $h(t)$ 为减函数,

$$\text{所以 } h(t) > h(1) = -3. \dots\dots\dots (11 \text{ 分})$$

所以要使 $g(x_1) - mx_2 > 0$ 恒成立, 只需满足 $m \leq -3$.

所以实数 m 的取值范围是 $(-\infty, -3]$. $\dots\dots\dots (12 \text{ 分})$

22. 【命题意图】 本题考查参数方程、极坐标方程和直角坐标方程之间的转换, 一元二次方程根与系数关系的应用.

【解析】 (I) 曲线 C_1 的直角坐标方程为 $\sqrt{3}x - y = 2\sqrt{3} + 2$, 即 $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} - 2$. $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3(1 + \cos t), \\ y = -2 + 3\sin t \end{cases}$ (t 为参数),

消去参数 t , 可得 C_2 的普通方程为 $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$ (4 分)

(II) 曲线 C_1 的参数方程可写为 $\begin{cases} x = 2 + \frac{1}{2}s, \\ y = -2 + \frac{\sqrt{3}}{2}s \end{cases}$ (s 为参数), (6 分)

代入曲线 C_2 的普通方程, 得 $\left(\frac{s}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}s}{2}\right)^2 = 9$, 整理得 $s^2 - s - 8 = 0$ (7 分)

设 A, B 所对应的参数分别为 s_1, s_2 , 则 $\begin{cases} s_1 + s_2 = 1, \\ s_1 s_2 = -8, \end{cases}$ (8 分)

所以 $|AB| = |s_1 - s_2| = \sqrt{1^2 + 4 \times 8} = \sqrt{33}$ (10 分)

23. 【命题意图】 本题考查绝对值不等式的解法和点到直线的距离公式, 考查分类讨论思想和转化思想.

【解析】 (I) $f(x) = |2x-1| + |x+2| = \begin{cases} -3x-1, & x \leq -2, \\ -x+3, & -2 < x < \frac{1}{2}, \\ 3x+1, & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$ (2 分)

由 $f(x) > 4$, 可得 $\begin{cases} x \leq -2, \\ -3x-1 > 4, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -2 < x < \frac{1}{2}, \\ -x+3 > 4, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2}, \\ 3x+1 > 4, \end{cases}$ (3 分)

解得 $x \leq -2$ 或 $-2 < x < -1$ 或 $x > 1$ (4 分)

所以不等式的解集为 $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$ (5 分)

(II) 由 (I) 易求得 $f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \times \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}$, 即 $m = \frac{5}{2}$ (6 分)

所以 $3a - 4b = 2m = 5$, 即 $3a - 4b - 5 = 0$ (7 分)

因为点 $(2, -1)$ 到直线 $3x - 4y - 5 = 0$ 的距离 $d = \frac{|2 \times 3 - 4 \times (-1) - 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 1$, (9 分)

所以 $(a-2)^2 + (b+1)^2$ 的最小值为 $d^2 = 1$ (10 分)

天一文化
TIANYI CULTURE